

論文2003-40SC-3-4

## 미지입력 관측기 설계를 위한 하알함수 접근법

## (The Haar Function Approach for the Unknown Input Observer Design)

金 珍 泰 \* , 李 漢 錫 \*\* , 林 潤 植 \*\*\* , 金 鐘 夫 \*\*\*\* ,  
李 明 珪 \*\*\*\*\*

(Jin-Tae Kim, Han-Seok Lee, Yoon-Sick Lim, Jong-Boo Kim, and Myung-Kyu Lee)

## 요 약

본 연구에서는 월쉬함수를 이용하여 샘플링 구간내에서 데이터를 처리할 수 있는 온라인 월쉬변환과 샘플링 구간내에서 미분 방정식을 계산할 수 있는 새로운 온라인 월쉬함수 미분연산법을 제안하였다. 스케일링 인자의 도입과 다음구간에서의 초기조건을 계산하여 줌으로써 임의의 샘플링 시간을 취할 수 있게 하였으며 제안된 월쉬함수 온라인 알고리즘을 이용하여 기존의 직교함수가 가지는 최종시간까지의 신호를 모두 알고 있어야 그 적용이 가능하다는 단점을 제거하였다. 유사변환법을 이용하여 유도된 동적 시스템에 대한 Luenberger관측기를 월쉬함수를 이용하여 새롭게 변환함으로써 관측기에 포함된 출력의 미분항을 없애기 위한 불필요한 관측기 방정식의 분할을 피하였으며 대수적으로 상태 및 미지입력을 추정하였다. 제안된 방법을 이용하면 실시간 처리를 요하는 시스템에 유용하게 적용될 것으로 기대된다.

## Abstract

This paper proposes a real-time application of Walsh functions which is based on the on-line Walsh transformation and on-line Walsh function's differential operation. In the existing method of orthogonal functions, a major disadvantage is that process signals need to be recorded prior to obtaining their expansions. This paper proposes a novel method of Walsh transformation to overcome this shortcoming. And the proposed method apply to the unknown inputs observer(UIO) design for linear time-invariant dynamical systems

**Keyword :** Walsh function, unknown input observer, Walsh function's differential operation

\* 正會員, 成均館大學校 情報通信工學部

(School of Information and Communications Eng. Sungkyunkwan Univ.)

\*\* 正會員, 富川大學 컴퓨터制御科

(Dept. of Computer Control, Bucheon College)

\*\*\* 正會員, 驪州大學 電氣科

(Dept. of Electricity, Yejoon Institute of Technology)

\*\*\*\* 正會員, 仁德大學 컴퓨터情報電子應用系列

(Induk Institute of Technology)

\*\*\*\*\* 正會員, 慶星大學校 電氣電子 및 컴퓨터工學部

(School of Electrical and Computer Eng. Kyung Sung Univ.)

接受日字:2002年9月2日, 수정완료일:2003年5月6日

## I. 서론

직교함수를 이용한 미지입력 관측기(UIO: unknown input observer)나 고장검출 및 분리(FDI: fault detection and isolation) 관측기<sup>[6, 10]</sup>등을 설계할 때는 적분연산행렬의 적용이 부적절하여 이러한 문제 해결을 위한 직교함수의 미분연산에 관한 연구가 소수 진행되었다. 본 논문에서는 샘플링 구간내에서 월쉬함수를 사용할 수 있는 온라인 월쉬변환을 이용할 수 있는 방법과 샘플링 구간내에서 함수의 미분값을 계산할 수 있는 온라인 월쉬함수 미분연산법을 제시하였고 제시한 방법을 미지입력관측기에 적용하였다.

선형동적 시스템의 상태를 추정하기 위하여 Luenberger 관측기를 사용하는 경우에는 대상 시스템의 입력을 모두 알고 있거나 혹은, 모두 측정이 가능하다는 가정이 필요하다. 그러나 실제로는 대상 시스템에 미지의 입력이 존재하는 경우가 많으며, 심지어는 시스템의 입력을 전혀 모르는 경우도 많다. 따라서, 미지의 입력을 포함하는 선형 시불변 시스템의 상태 관측기 설계와 미지입력값 추정의 문제는 최근 수년간 많은 관심을 받아 왔다<sup>[1-5]</sup>. 최근 들어 기하학적접근<sup>[1]</sup>, 특이치 분해방법에 의한 접근<sup>[2]</sup>, 일반화된 역행렬을 이용한 접근<sup>[3]</sup>, 좌표 변환방법을 이용한 접근<sup>[4, 5]</sup>등 미지입력 관측기 설계에 관한 연구가 활발히 연구되어지고 있다. 그러나 좌표변환방법에서 구한 관측기 방정식과 미지입력식은 시스템의 출력에서 직접 구할 수 없는 출력에 관한 미분항을 포함하고있다. 이러한 미분항을 처리하기 위하여 많은 방법들이 연구되었으며, M. Hou 와 P. C. Müller<sup>[6]</sup>는 임의의 조건을 만족하는 상호 관련 없는 두 개의 좌표변환행렬의 정의를 통해 미지 입력으로부터 자유로운 동적 시스템을 유도하고, 시스템 입력과 출력만으로 이루어진 관측기 방정식을 제안하였다. 또한 Y. Guan 과 M. Saif<sup>[4]</sup>는 미지입력이 포함된 동적 시스템을 한 번의 좌표변환을 이용하여 미지 입력으로부터 자유로운 상태만으로 구성된 새로운 동적 시스템을 유도하고, 이 동적 시스템에 대한 관측기를 설계하였다. 그러나 두가지 방법모두 미지입력 추정식에는 출력의 미분항을 포함하고 있다.

따라서 본 연구에서는 유사변환법을 이용하여 유도된 동적 시스템에 대한 Luenberger관측기를 월쉬함수를 이용하여 새롭게 변환함으로써 관측기에 포함된 출

력의 미분항을 없애기 위한 불필요한 관측기 방정식의 분할을 피하고자 한다. 또한 시스템 출력의 미분값을 본 연구에서 새롭게 전개한 온라인 월쉬함수 미분연산법을 이용하여 시스템의 출력값을 월쉬함수 계수벡터만으로 구함으로써, 시스템의 입력과 측정된 출력값의 계수값만으로 추정된 상태값과 미지입력값을 실시간으로 계산할 수 있는 방법을 제안한다.

## II. 월쉬함수 및 월쉬변환

월쉬함수는 함수의 발생순서의 배열에 따라 세 가지 형태로 분류되는데, 본 연구에서는 시스템이론 및 제어이론에 주로 이용되는 펠리배열 월쉬함수를 이용한다. 펠리배열 월쉬함수는 Rademacher함수의 연속적인 곱에 의해 발생하는 순서에 따라 배열되는 월쉬함수를 말한다.

$$Pal(n, t) = \prod_{i=1}^p Rad(i, t)^{b_i} \quad (1)$$

$$\text{단, } n=0, 1, \dots, m-1, \quad p = \log_2 m$$

여기서  $b_i$ 는  $n$ 을 2진수로 표현할 때의 각 자릿수 값을 말한다. 또한 월쉬함수는 구간  $[0, T)$ 에서 다음과 같은 직교특성(orthogonality)을 갖고 있다.

$$\int_0^T Pal(i, t) Pal(j, t) dt = \begin{cases} T, & (i=j) \\ 0, & (i \neq j) \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{단, } i, j=0, 1, \dots, m-1$$

적분 가능한 임의의 함수  $x(t)$ 는 구간  $[0, T)$ 에서 다음과 같이 월쉬함수로 유한급수전개 할 수 있다.

$$x(t) = X Pal(t) = \sum_{n=0}^{m-1} X_n Pal(n, t) \quad (3)$$

여기서  $Pal(t)$ 는  $m$ 차 월쉬벡터이고  $X$ 는 월쉬계수행렬을 나타낸다. 월쉬계수  $X_n$ 은  $n$ 번째 월쉬함수의 계수로서 평균자승오차를 최소로 한다는 조건으로 결정되며 다음과 같다.

$$X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) Pal(n, t) dt \quad (4)$$

식 (4)를 월쉬변환이라하며 이에 대응되는 식 (3)을 월쉬역변환이라 한다.

임의의 함수를 월쉬함수로 표현할 수 있는 것과 마

칸가지로 월쉬함수의 적분 또한 월쉬함수로 다시 표현할 수 있다.

$$\int_0^t Pal(i, \tau) d\tau = P Pal(i, t) \quad (5)$$

$Pal(i, t)$ 는 월쉬함수로 구성되는 벡터함수이며  $P$ 를 월쉬함수의 적분을 위한 연산행렬, 간단히 적분연산자라 하며 다음과 같다.

$$P_{(m \times m)} = \begin{bmatrix} P_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})} & -\frac{1}{2m} I_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})} \\ \frac{1}{2m} I_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})} & 0_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})} \end{bmatrix} \quad (6)$$

단,  $P_{(1 \times 1)} = \frac{1}{2}$

### III. 온라인 월쉬함수 미분연산법 유도

#### 1. 월쉬함수 온라인 알고리즘

시구간  $t \in [0, 1)$ 에서 정의되는 월쉬변환식인 식 (3)과 식 (4)는 전체 구간에서의 데이터를 이용한다. 본 절에서는 이러한 월쉬변환식을 전체구간이 아닌 샘플링 구간에서의 데이터를 이용하여 처리할 수 있도록 온라인 월쉬변환에 대하여 유도한다. 먼저, 시구간  $t \in [0, 1)$ 에서 월쉬함수 전개항수가  $m$ 일 때,  $j$ 번째 미소구간을 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta_j = [t_j, t_{j+1}) \quad (7)$$

단,  $t_j = j \cdot \frac{1}{m}$

또한, 식 (4)에서의  $i$ 번째 월쉬계수  $F_i$ 는 미소구간에서의 적분값에 대한 합으로 나타낼 수 있다.

$$F_i = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) Pal(i, t) dt \quad (8)$$

단,  $i = 0, 1, \dots, m-1$

식 (8)에서  $j$ 번째 미소구간에서의  $i$ 번째 월쉬함수에 대한 계수는 식 (9)와 같다.

$$F_i(\Delta_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) Pal(i, t) dt \quad (9)$$

단,  $i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, m-1$

결국, 식 (9)를 이용하여  $j$ 번째 미소구간에서의 월쉬계수를 식 (10)과 같이 구할 수 있다.

$$F(\Delta_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) Pal^T(t) dt \quad (10)$$

단,  $j = 0, 1, \dots, m-1$

또한, 월쉬함수는 미소구간에서 항상 일정한 값인 0 또는  $\pm 1$ 의 값을 가지므로 식 (10)을 이산화된 식으로 표현할 수 있으며, 이는  $j$ 번째 미소구간에서의 월쉬변환이다.

$$F(t_j) = \frac{1}{m} f(t_j) Pal^T(t_j) \quad (11)$$

단,  $j = 0, 1, \dots, m-1$

식 (11)에 대응되는  $j$ 번째 미소구간에서의 월쉬역변환은 식 (12)와 같다.

$$f^*(t_j) = F(t_j) \cdot Pal(t_j) \quad (12)$$

단,  $j = 0, 1, \dots, m-1$

식 (6)으로 표현되는 월쉬함수의 적분연산행렬은 시구간  $t \in [0, 1)$ 에서의 적분연산행렬을 나타낸다. 따라서 미소구간에서의 월쉬변환을 적용하기 위해서는 미소구간에서의 월쉬함수에 대한 적분연산행렬을 필요로 하며 다음의 과정으로 유도할 수 있다. 미소구간  $\Delta_j$ 에서의 월쉬함수의 적분값  $P \cdot Pal(t_j^*)$ 는 미소구간에서 존재하므로 식 (13)과 같이 구간에서의 평균값으로 나타낼 수 있다.

$$P \cdot Pal(t_j^*) = \frac{1}{2} \left( \int_0^{t_j} Pal(\tau) d\tau + \int_0^{t_{j+1}} Pal(\tau) d\tau \right) \quad (13)$$

단,  $t_j^* \in \Delta_j$

식 (13)의 우변항을 월쉬함수에 대한 적분항과 미소구간에서의 적분항으로 분할하여 표현하면 식 (14)와 같다.

$$\begin{aligned} P \cdot Pal(t_j^*) &= \int_0^{t_j} Pal(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \left( \int_0^{t_{j+1}} Pal(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} Pal(\tau) d\tau \right) \\ &= \int_0^{t_j} Pal(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} Pal(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

계속해서, 식 (15)와 같이  $t \in t_j^*$ 시점에서의 오차함수를 정의한다. 식 (15)에서와 같이 오차함수는 월쉬함수의 실제 적분값과 월쉬함수에 월쉬함수의 적분연산행렬을 곱한 값의 차로 정의하였다.

$$e(t_j^+) = \int_0^{t_j^+} Pa\lambda(\tau) d\tau - P \cdot Pa\lambda(t_j^+) \quad (15)$$

다음으로, 식 (15)에 식 (14)의 관계를 도입하면 식 (16)과 같다.

$$e(t_j^+) = \int_0^{t_j^+} Pa\lambda(\tau) d\tau - \left\{ \int_0^{t_j^+} Pa\lambda(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_j^-}^{t_j^+} Pa\lambda(\tau) d\tau \right\} \quad (16)$$

따라서, 식 (16)을 정리한 후 미소구간  $\Delta_j$ 에서의 월쉬함수가 항상 일정한 값을 가지므로 오차함수를 식 (17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} e(t_j^+) &= -\frac{1}{2}(t_{j+1} - t_j)Pa\lambda(t_j) \\ &= -\frac{1}{2m} Pa\lambda(t_j) \end{aligned} \quad (17)$$

다음으로, 식 (17)을 식 (15)에 대입하여 정리하면 식 (18)과 같고

$$\begin{aligned} \int_0^{t_j^+} Pa\lambda(t) dt &= \left( P - \frac{1}{2m} I \right) Pa\lambda(t_j) \\ &= P_L Pa\lambda(t_j) \end{aligned} \quad (18)$$

식 (18)에서  $P_L$ 이 월쉬함수의 미소구간에서의 적분연산행렬이다.

다음으로, 샘플링 구간내에서 이전구간에서의 데이터를 현재구간에서 사용하기 위한 미소구간에서의 월쉬함수의 지연연산행렬을 유도한다. 이러한 지연연산행렬은 현재구간에서의 미·적분 연산을 할 때 이전구간에서의 데이터들을 이용하기 위하여 요구된다.

먼저, 미소구간  $\Delta_{j-1}$ 까지의 월쉬함수의 적분값  $P \cdot Pa\lambda(t_j^-)$ 는  $\Delta_j$ 구간에서의 과정과 마찬가지로 다음과 같다.

$$\int_0^{t_j^-} Pa\lambda(t) dt = \left( P + \frac{1}{2m} I \right) Pa\lambda(t_{j-1}) \quad (19)$$

계속해서, 식 (18)과 식 (19)를 이용하여 현재 미소구간에서의 월쉬함수값과 이전 미소구간에서의 월쉬함수값의 관계를 살펴본다. 월쉬함수에 대한 적분값은 연속함수이므로 식 (20)과 같이  $t = t_j^+$ 에서 연속이다.

$$\int_0^{t_j^+} Pa\lambda(t) dt = \int_0^{t_j^-} Pa\lambda(t) dt \quad (20)$$

이제 식 (18)과 식 (19)를 식 (20)의 양변에 대입하여  $Pa\lambda(t_{j-1})$ 항으로 정리하면 식 (21)과 같다.

$$\begin{aligned} Pa\lambda(t_{j-1}) &= \left( P + \frac{1}{2m} I \right)^{-1} P_L Pa\lambda(t_j) \\ &= D_L Pa\lambda(t_j) \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에서  $D_L$ 이 월쉬함수의 미소구간에서의 지연연산행렬이다. 이상의 변환과정을 온라인 월쉬변환이라 한다.

## 2. 온라인 월쉬함수 미분연산법

미소구간에서의 미분연산법을 구하기 위하여  $j$ 번째 시점  $t = t_j$ 에서의 함수  $f(t)$ 에 관한 미분을 식 (22)와 같이 평균변화율의 식으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_j} &\simeq \frac{f(t_j) - f(t_j - \Delta_j)}{\Delta_j} \\ &= \frac{f(t_j) - f(t_{j-1})}{\Delta_j} \end{aligned} \quad (22)$$

단,  $\Delta_j = [t_j, t_{j+1})$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$

식 (22)의 양변에 나타나는 항들을 미소구간에서 월쉬변환하면 다음과 같다.

$$f(t_j) = F(t_j) Pa\lambda(t_j) \quad (23)$$

$$f(t_{j-1}) = F(t_{j-1}) Pa\lambda(t_{j-1}) \quad (24)$$

$$\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=t_j} = f'(t_j) \simeq F(t_j) Pa\lambda(t_j) \quad (25)$$

여기서,  $F(t_j)$ 는  $t = t_j$ 시점에서의 함수  $f(t)$ 의 미분값에 대한  $j$ 번째 미소구간에서의 월쉬계수를 나타낸다. 다음으로, 식 (23)~식 (25)의 관계를 식 (22)에 도입한 후

$$F(t_j) Pa\lambda(t_j) = \frac{1}{\Delta_j} [F(t_j) Pa\lambda(t_j) - F(t_{j-1}) Pa\lambda(t_{j-1})] \quad (26)$$

단,  $\Delta_j = \frac{1}{m}$

식 (26)의 양변에 나타나는 월쉬벡터를 소거하기 위하여 미소구간에서의 지연연산행렬식인 식 (21)의 관계를 도입하면 식 (27)과 같다.

$$F(t_j) Pa\lambda(t_j) = m [F(t_j) Pa\lambda(t_j) - F(t_{j-1}) \cdot D_L Pa\lambda(t_j)] \quad (27)$$

다음으로, 양변의 월쉬벡터를 소거하면 식 (28)과 같이 계수값으로 구성된 대수방정식을 이용하여  $t=t_j$  시점에서의 함수  $f(t)$ 의 미분값에 대한 미소구간에서의 월쉬계수인  $F(t_j)$ 를 구할 수 있다.

$$F(t_j) = m \cdot [F(t_j) - F(t_{j-1}) \cdot D_L] \quad (28)$$

식 (28)에서 구한  $F(t_j)$ 를 미소구간에서 월쉬역변환하면 함수  $f(t)$ 에 대한  $t=t_j$ 시점에서의 미분값을 구할 수 있으며, 식 (28)에서 보듯이 현재구간에서의 미분값에 대한 계수는 현재구간에서의 함수값에 대한 계수와 이전구간에서의 함수값에 대한 계수를 이용하여 구할 수 있음을 알 수 있다.

#### IV. 온라인 월쉬함수 미분연산법을 이용한 미지입력관측기 설계

##### 1. 유사변환법(coordinate transformation method)

다음과 같이 미지입력이 포함된 선형 동적 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) \quad (29)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (30)$$

여기서,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $d \in \mathbb{R}^q$  이고, 각각 시스템 상태, 입력, 출력과 미지입력을 나타낸다. 만약  $\rho(C) = m$ ,  $\rho(D) = q$  이고  $m \geq q$  이면,  $T_1^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}$ 를 만족하는 정칙행렬  $T_1$ 을 정의할 수 있으며 식 (29), 식 (30)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_1^*(t) = A_{11}^* x_1^*(t) + A_{12}^* x_2^*(t) + B_1^* u(t) \quad (31)$$

$$\dot{x}_2^*(t) = A_{21}^* x_1^*(t) + A_{22}^* x_2^*(t) + B_2^* u(t) + d(t) \quad (32)$$

$$y(t) = C_1^* x_1^*(t) + C_2^* x_2^*(t) \quad (33)$$

단,  $x(t) = T_1 x^*(t) = T_1 \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix}$ ,  $x_1^* \in \mathbb{R}^{(n-q)}$ ,

$x_2^* \in \mathbb{R}^q$  이고,  $CT_1 = [C_1^* C_2^*]$

$$T_1^{-1}A T_1 = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}, \quad T_1^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \end{bmatrix}$$

식 (32)로부터 새로운 변수  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  를 다음과 같이 정의하자.

$$z(t) = A_{21}^* x_1^*(t) \quad (34)$$

$$z(t) \triangleq \dot{x}_2^*(t) - B_2^* u(t) - d(t) - A_{22}^* x_2^*(t) \quad (35)$$

계속해서 식 (33)과 식 (34)로부터 다음의 식 (36)을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} C_1^* & C_2^* \\ A_{21}^* & 0 \end{bmatrix} x^*(t) + \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix} y^*(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} C_1^* & C_2^* & \vdots & -I_m & 0 \\ A_{21}^* & 0 & \vdots & 0 & -I_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

여기서,  $y^*(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$

식 (36)에서 최변행렬의 계수(rank)가 전열계수(full row rank)  $m+q$  를 항상 만족하므로, 식 (37)의 관계를 만족하는 정칙변환 행렬  $T_2 \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$  를 결정할 수 있다.

$$T_2 \cdot \begin{bmatrix} C_1^* & C_2^* & \vdots & -I_m & 0 \\ A_{21}^* & 0 & \vdots & 0 & -I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \vdots & N_1 & N_2 \\ M_2 & I_q & \vdots & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (37)$$

이제 식 (37)을 만족하는 변환행렬  $T_2$ 를 식 (36)의 양변에 곱하여 풀면 다음과 같고

$$M_1 x_1^*(t) + N_1 y(t) + N_2 z(t) = 0 \quad (38)$$

$$M_2 x_1^*(t) + x_2^*(t) + N_3 y(t) + N_4 z(t) = 0 \quad (39)$$

식 (34)를 대입하여 정리하면 다음의 식 (40), 식 (41)을 구할 수 있다.

$$(M_1 + N_2 A_{21}^*) x_1^*(t) + N_1 y(t) = 0 \quad (40)$$

$$x_2^*(t) = -(M_2 + N_4 A_{21}^*) x_1^*(t) - N_3 y(t) \quad (41)$$

식 (41)에서 구한  $x_2^*(t)$  를 식 (31)에 대입하고 식 (40)에서  $\tilde{y}(t) \triangleq -N_1 y(t)$  라 하면, 식 (42)와 같이 상태  $x_1^*(t)$  만으로 이루어진  $(n-q)$ 차의 새로운 동적 방정식을 유도할 수 있다.

$$\dot{x}_1^*(t) = A^o x_1^*(t) + B_1^* u(t) - A_{12}^* N_3 y(t) \quad (42)$$

$$\tilde{y}(t) = (M_1 + N_2 A_{21}^*) x_1^*(t) \quad (43)$$

단,  $A^o = [A_{11}^* - A_{12}^* M_2 - A_{12}^* N_4 A_{21}^*]$

## 2. 대수적 미지입력 관측기 설계

다음으로 새로운 동적방정식 식 (42)에 대한 Luenberger 관측기를 설계하면 다음과 같다<sup>[10]</sup>.

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) = & A^o w(t) + B_1^* u(t) - A_{12}^* N_3 y(t) \\ & + L(\tilde{y}(t) - (M_1 + N_2 A_{21}^*)w(t)) \end{aligned} \quad (44)$$

오차함수를 식 (45)와 같이 정의하자.

$$e(t) = w(t) - x_1^*(t) \quad (45)$$

식 (42)와 식 (45)를 이용하여 다음의 식 (46)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & \dot{w}(t) - \dot{x}_1^*(t) \\ = & [A^o - L(M_1 + N_2 A_{21}^*)]e(t) \end{aligned} \quad (46)$$

여기서,  $L$ 은  $[A^o - L(M_1 + N_2 A_{21}^*)]$ 의 고유값이 음의 값을 갖도록 하는 관측기 이득 행렬이다. 식 (45)에  $\tilde{y}(t) = -N_1 y(t)$ 의 관계를 대입하여 정리하면 식 (47)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) = & F w(t) + G u(t) + H y(t) \quad (47) \\ \text{단, } F = & [A^o - L(M_1 + N_2 A_{21}^*)], \\ G = & B_1^*, \quad H = -(A_{12}^* N_3 + L N_1) \end{aligned}$$

다음으로 식 (47)에서 구해진 추정값과 식 (41)로부터 다음의 식 (48)을 구할 수 있고

$$x_1^*(t) = w(t) \quad (48)$$

$$x_2^*(t) = -(M_2 + N_4 A_{21}^*)w(t) - N_3 y(t) \quad (49)$$

식 (29)로 주어진 시스템의 추정상태는 식 (50)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} = & T_1 \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} \\ = & T_1 \cdot \begin{bmatrix} w(t) \\ -(M_2 + N_4 A_{21}^*)w(t) - N_3 y(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (50)$$

식 (48)을 식 (32)에 대입하여 정리하면 다음과 같고

$$\begin{aligned} d(t) = & -(M_2 + N_4 A_{21}^*) \dot{w}(t) - N_3 \dot{y}(t) \\ & - [A_{21}^* - A_{22}^* (M_2 + N_4 A_{21}^*)] w(t) \\ & + A_{22}^* N_3 y(t) - B_2^* u(t) \end{aligned} \quad (51)$$

식 (51)에 식 (47)을 대입하여 구한 미지입력값에 대한 추정 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{d}(t) = & Q w(t) + R y(t) + S u(t) - N_3 \dot{y}(t) \quad (52) \\ \text{단, } R = & -(M_2 + N_4 A_{21}^*) H - A_{22}^* N_3, \\ Q = & -(M_2 + N_4 A_{21}^*) F - A_{21}^* + A_{22}^* (M_2 + N_4 A_{21}^*), \\ S = & -(M_2 + N_4 A_{21}^*) G + B_2^* \end{aligned}$$

다음으로 식 (47)의 추정상태를 구하는 식과 식 (52)의 미지입력값을 월쉬함수를 이용하여 구하여 보자. 임의의 샘플링 시간을 취하기 위하여 샘플링 시간  $t_s$ 와 월쉬함수 전개항수  $m$ 이 주어질 때 임의의 샘플링 시간을 이용하기 위하여 식 (47)을  $\tau = \frac{1}{t_m} t$ 로 스케일링한다.

$$\begin{aligned} \dot{w}(\tau) = & t_m \cdot F w(\tau) + t_m \cdot G u(\tau) + t_m \cdot H y(\tau) \quad (53) \\ \text{단, } t_m = & m \cdot t_s \end{aligned}$$

임의의 샘플링 시간을 취하기 위하여 스케일링된 식 (53)을 미소구간에서의 미분연산법을 이용하여 구하는 과정은 다음과 같다.

우선, 식 (53)의 양변에 벡터들을  $j$ 번째 미소구간에서 월쉬함수급수 전개하면 식 (54)~식 (57)과 같다.

$$w(t_j) = W(t_j) Pal(t_j) \quad (54)$$

$$u(t_j) = U(t_j) Pal(t_j) \quad (55)$$

$$y(t_j) = Y(t_j) Pal(t_j) \quad (56)$$

$$\dot{w}(t_j) = \dot{W}(t_j) Pal(t_j) \quad (57)$$

$$\text{단, } j = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

여기서,  $W(t_j)$ 는  $w(\tau)$ 에 대한  $j$ 번째 미소구간에서의 월쉬함수 계수행렬을 나타내며 결정해야 될 값이며,  $U(t_j)$ 와  $Y(t_j)$ 는 각각  $u(\tau)$ 와  $y(\tau)$ 에 대한  $j$ 번째 미소구간에서의 월쉬함수 계수행렬을 나타낸다. 또한  $\dot{W}(t_j)$ 는  $w(\tau)$ 의  $t=t_j$ 시점에서의 미분에 대한 월쉬함수 계수행렬을 나타내며 III장 2절에서 제안된 온라인 월쉬함수 미분연산법에 관한 식 (28)을 도입하면 식 (58)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{W}(t_j) = m \cdot [W(t_j) - W(t_{j-1})] \cdot D_L \quad (58)$$

다음으로 식 (54)~식 (57)의 관계를 식 (53)에 도입하여 양변의 월쉬벡터를 소거하면 다음과 같다.

$$m \cdot [W(t_j) - W(t_{j-1}) \cdot D_L] \\ = t_m \cdot F W(t_j) + t_m \cdot G U(t_j) + t_m \cdot H Y(t_j) \quad (59)$$

단,  $t_m = m \cdot t_s, j = 0, 1, 2, \dots, m-1$

양변을  $m$ 으로 나눈 후 구해야 하는  $W(t_j)$ 항으로 정리하여 나타내면 다음과 같다.

$$[I - t_s \cdot F] W(t_j) \\ = W(t_{j-1}) \cdot D_L + t_s \{ G U(t_j) + H Y(t_j) \} \quad (60)$$

단,  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$

다음으로, 식 (60)을  $X(t_j)$ 항에 대하여 정리하면 식 (61)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(t_j) = [I - t_s \cdot F]^{-1} \cdot \\ [W(t_{j-1}) \cdot D_L + t_s \{ G U(t_j) + H Y(t_j) \}] \quad (61)$$

단,  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$

따라서, 식 (61)에서 구한  $j$ 번째 미소구간에서의 월쉬 함수 계수행렬  $W(t_j)$ 를 식 (62)에서와 같이 미소구간에서 월쉬역변환하면  $j$ 번째 미소구간에서의 상태벡터  $w^*(t_j)$ 를 구할 수 있다.

$$w^*(t_j) = W(t_j) \cdot Pal(t_j) \quad (62)$$

단,  $j = 0, 1, \dots, m-1$

또한, 식 (63)의 관계를 이용하여 다음구간에서의 초기조건을 계산함으로써 시구간을 임의의 구간까지 확장이 가능하다<sup>[8]</sup>.

$$w(t_m) = w(0) + t_s F \cdot \sum_{i=0}^{m-1} w^*(t_i) \\ + t_s G \cdot \sum_{i=0}^{m-1} u^*(t_i) + t_s H \cdot \sum_{i=0}^{m-1} y^*(t_i) \quad (63)$$

다음으로 위의 과정에서 구한 추정상태  $w(t_j)$ 를 이용하여 식 (52)의 미지입력값을 월쉬함수로 구하여보자. 하지만 식 (52)의 미지입력값에 대한 추정방정식에는 대상시스템에서 측정된 출력값으로 구해낼 수 없는 출력의 미분값  $y(t)$ 가 존재한다. 이는 실제로 미지입력을 추정하기 위해서는 추가의 미분기를 필요로 하며 이로 인하여 만약 출력측에 측정잡음이 있을 경우 이는 미지입력추정에 지대한 영향을 미칠 것이다. 따라서 본 연구에서는 이러한 추가의 미분기를 사용하지 않고 III장에서 제안된 온라인 월쉬함수 미분연산식을 이용

하여 간단한 대수적 계산으로 미지입력값을 구할 것이다. 식 (52)의 벡터들을 미소구간 월쉬변환을 이용하여 전개하고 시스템 출력에 대한 미분치가 존재하므로 III장 2절에서 제시한 온라인 월쉬함수 미분연산식을 도입한 후 양변이 월쉬벡터를 소거하면 다음과 같다.

$$D(t_j) = QW(t_j) + RY(t_j) + SU(t_j) - N_3 Y(t_j) \quad (64)$$

단,  $Y(t_j) = m \cdot [Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \cdot D_L]$

식 (64)로부터 미지입력에 대한 월쉬계수행렬인  $D(t_j)$ 를 구할 수 있고 미소구간 월쉬역변환하면  $j$ 번째 미소구간에서의 미지입력값  $d^*(t_j)$ 를 구할 수 있다.

$$d^*(t_j) = D(t_j) \cdot Pal(t_j) \quad (65)$$

이상의 방법을 반복하면 월쉬함수를 이용하여 상태 및 미지입력 값을 실시간으로 추정할 수 있게 된다.

## V. 시뮬레이션

식 (66)과 같이 하나의 미지입력을 갖는 선형 시불변 시스템<sup>[5]</sup>을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \quad (66)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (67)$$

$$x(t_0) = [1 \ 0.5 \ -1]^T \quad (68)$$

식 (31)의 형태와 식 (37)의 관계를 만족하는 좌표변환행렬  $T_1$  과  $T_2$  를 다음과 같이 선택하였다.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

관측기 이득 값을  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  으로 임의 선택하였으며 이때, 관측기의 극점은 -1, -2로 안정하게 결정되었음을 알 수 있다.

$$\dot{\omega}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \omega(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) \quad (70)$$

이제 추정된 상태를 이용하여 미지입력값에 대한 추정 방정식을 유도하면, 식 (71)과 같다.

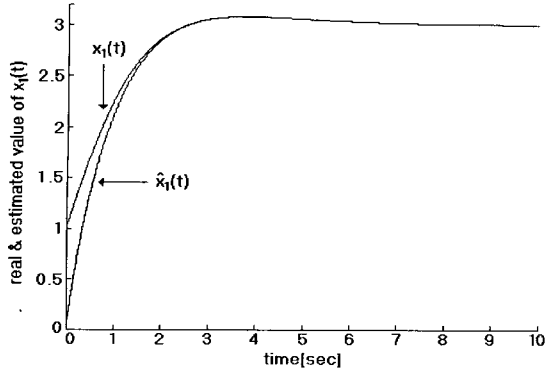
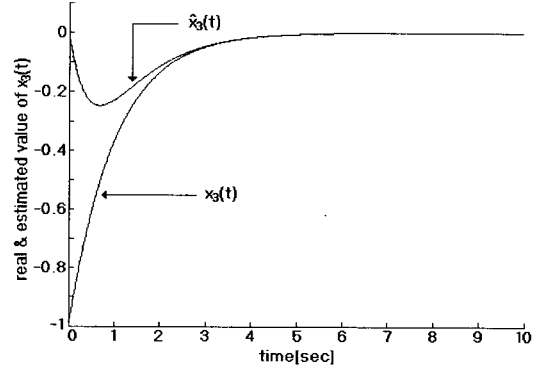
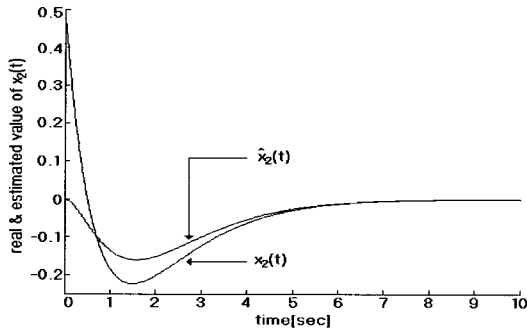
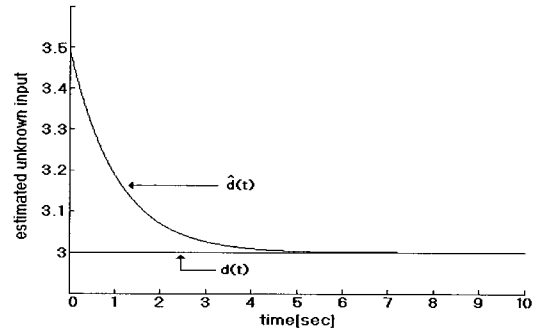
그림 1.  $x_1(t)$ 의 실제값과 추정값Fig. 1. Real and estimated values of  $x_1(t)$ .그림 3.  $x_3(t)$ 의 실제값과 추정값Fig. 3. Real and estimated values of  $x_3(t)$ .그림 2.  $x_2(t)$ 의 실제값과 추정값Fig. 2. Real and estimated values of  $x_2(t)$ .

그림 4. 제안된 방법에 의한 미지입력 추정 값

Fig. 4. Estimated unknown inputs using proposed algebraic method.

$$\begin{aligned} \hat{z}(t) = & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} y(t) \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) \end{aligned} \quad (71)$$

미지입력값을  $d=[3]$ 이라고 가정하고, 샘플링시간  $t_s=0.01$ 일쉬함수 전개항수를  $m=4$ 으로 선택하여 MATLAB ver6.0을 이용하여 실시간으로 시뮬레이션한 10초까지의 데이터를 나타내었다.

<그림 1>, <그림 2>, <그림 3>에서는 관측기 방정식을 제안된 일쉬변환과 미소구간에서의 적분과 미분식을 이용하여 해를 구한 뒤 관측기를 통하여 실시간으로 추정된 상태값인  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ 를 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 상태  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ 가 초기값의 오차를 극복하고 실제 상태에 수렴함을 알 수 있다.

<그림 4>에서는 제안된 방법을 이용하여 미지입력값을 추정한 경우의 추정값을 나타내었다. 이는 미지입력 추정식에 포함되어 있는 출력에 대한 미분값을 추가의 미분기를 통하지 않고 대수적인 방법으로 구한 결과를 보여주고 있다.

## VI. 결 론

본 논문에서는 샘플링 구간 내에서 일쉬변환을 이용할 수 있는 방법과 샘플링 구간 내에서 미분방정식을 대수적으로 해석할 수 있도록 평균변환을 식에 바탕을 둔 온라인 일쉬함수 미분연산법을 제시하였다. 유사변환법을 이용하여 유도된 동적 시스템에 대한 관측기를 제안된 온라인 일쉬변환법을 이용하여 새롭게 변환함으로써 관측기 방정식에 포함된 출력의 미분항으로 인하여 발생하는 불필요한 관측기 방정식의 분할을 피하였다. 제안된 관측기를 대수적 알고리즘에 의하여 상태를 추정할 수 있음을 보였고, 추정된 상태들의 일쉬함수 계수 벡터만으로 미지입력값을 추정할 수 있음을 예제를 통해 검증해 보았다. 또한 제안된 방법은 각 샘플링 구간에서 계산을 수행하므로 적용예에서 보듯이 실시간으로 상태 및 미지입력을 추정하고 있음을 알 수 있다. 이는 지금까지의 일쉬함수와 같은 직교함수가 가지는 단점인 최종시간까지의 신호를 모두 알고 있어



야만 적용 가능하다는 단점을 제거하고 현재 샘플링 구간에서의 신호를 이용하여 실시간 데이터를 처리할 수 있으며 이는 미지입력 관측기뿐만 아니라 실시간 처리를 요하는 시스템에 유용하게 적용될 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] BHATTACHARYYA, S. P., "Observer design for linear systems with unknown inputs," IEEE Trans. Auto. Cont., vol. 23, pp. 473~484, 1978.

[2] FAIRMAN, F. W., MAHIL, S. S., and LUK, L., "Disturbance decoupled observer design via singular value decomposition," IEEE Trans. Auto. Cont., vol. 29, pp. 84~86, 1984.

[3] YANG, F., and WILDE, R. W., "Observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Trans. Auto. Cont., vol. 33, pp. 677~681, 1988.

[4] GUAN, Y., and SAIF, M., "A novel approach to the design of unknown input observer," IEEE Trans. Auto. Cont., vol. 36, pp. 632~635, 1991.

[5] HOU, M., and MÜLLER, P. C., "Design of observers for linear systems with unknown inputs," IEEE Trans. Auto. Cont., vol. 37, pp. 871~875, 1992.

[6] 안비오, 이명규, 안두수, "STWS를 이용한 선형 시불변 시스템의 미지 입력 관측기 설계에 관한 연구", 대한전기학회 논문집 제 46 권 제 1 호, pp 128~131, 1997

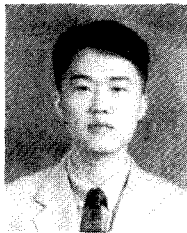
[7] J. L. Atsushi Watanabe and Seiichi Kawata, "On operational matrices of Walsh functions", Proc. American Control Conference Albuquerque, 2272~2277, 1997.

[8] 이명규, "고속월쉬변환에 의한 선형시변계의 해석 및 최적제어를 위한 새로운 접근방법", 대한전기학회논문집 제 47 권 1호, pp 75~82, 1998

[9] Yi Xiong, Mehrdad Saif, "Output derivative free design of unknown input plus state functional observer", Proc. of American Control Conference, pp 399~403, 2000

[10] 안비오, "블럭펠스함수 전개를 이용한 Descriptor 시스템의 대수적 관측기 설계", 대한전기학회 논문집 제 50D 권 제 6 호, pp 259~265, 2001

저 자 소 개



金 珍 泰(正會員)

1997년 : 경성대학교 공대 전기공학과(공학사). 1999년 : 성균관대학교대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과(공학석사). 1999년~2001년 : 동대학원 전기전자 및 컴퓨터 공학과(공학박사). <주관심분야 : 지능제

어, BioMEMS, Lab on a Chip>



林 潤 植(正會員)

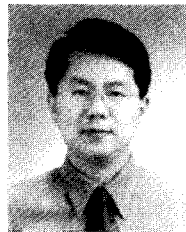
1993년 : 성균관대학교대학원 전기공학과(공학석사). 1998년 : 성균관대학교대학원 전기공학과(공학박사). 1998년 : 여주대학 전기과 교수 재직중 <주관심분야 : 제어이론 및 응용, 마이크로프로세서 응용

및 자동화 분야>



李 漢 錫(正會員)

1990년 : 성균관대학교대학원 전기공학과 졸업(공학사). 1992년 : 성균관대학교대학원 전기공학과(공학석사). 1996년 : 성균관대학교 전기공학과(공학박사). 1997년~1999년 : 한국 원자력연구소 초빙연구원. 2000년~현재 : 부천대학 컴퓨터제어과 조교수. <주관심분야 : 대규모 시스템의 계층별 제어, VXIBus를 이용한 자동제측 시스템>



金 鐘 夫(正會員)

1985년 : 성균관대학교 전기공학과(공학사). 1988년 : 성균관대학교대학원 전기공학과(공학석사). 1993년 : 성균관대학교대학원 전기공학과(공학박사). 1996년~1997년 : 오하이오 주립대 교환교수. 1988년~

1991년 : LG정보통신연구소. 1991년~현재 : 인덕대학 컴퓨터정보전자응용계열 교수. <주관심분야 : 디지털방송, DAB, DMB, 디지털제어 등>



李明珪(正會員)

1982년 2월 : 성균관대학교 전기공학  
학과(공학사). 1984년 2월 : 성균관  
대학교대학원 전기공학과(공학석  
사). 1990년 2월 : 성균관대학교대  
학원 전기공학과(공학박사). 1991  
년 3월~현재 : 경성대학교 전기전  
자컴퓨터공학부 교수. <주관심분야 : 비집중형제어, 비  
선형시스템제어>