大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 13 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XIII, No.2, 123-141. May 2003

중학생들의 수학적 언어 수준

김선희* · 이종희**

본 연구는 Freudenthal의 언어 수준을 토대로 중학생들의 수학적 언어의 이해 수준과 사용수준을 조사하였다. 본 연구에서 개발한 기하 개념에 대한 언어 이해 검사는 신뢰도와 타당도를 가진 것이었으며, 이 검사를 통해 학생들이 수학적 언어를 이해하는 것에 수준의 위계가 있음이 밝혀졌다. 학생들이 수학 개념을 설명하면서 사용하는 언어의 수준은 수학적 언어를 이해하는 수준과 상관이 없었으며, 과제에 따라 정답에 기여하는 언어 사용 수준이 달랐다. 마지막으로 중학생들이 이해하기에 쉬운 언어는 수학적 대상에 이름을 붙인 지표를 일상언어의 관계로 설명되는 3수준이었으며 이것은 언어 이해 수준, 언어 사용 수준과 상관이 없었다. 본 연구의 결과를 토대로 교사는 학생들의 이해 수준과 사용 수준이 다르다는 점을 염두에 두고 그에 맞게 수학 학습 지도를 해야 할 것이며, 수학적 언어를 자신 있게 사용할 수 있는 의사소통의 과제를 제시해야 할 것이다.

Ⅰ. 서론

수학은 개념, 문제해결, 알고리즘, 추론, 의사소통의 측면을 갖고 있으며 이러한 수학을 학습자가 이해하고 사용하기 위해서는 언어가 필요하다. Vygotsky(1985)는 사고의 발달이 이루어지기 위해 언어가 선행되어야 한다고 하였는데, 아동의 언어 발달에서 뿐 아니라 새로운 언어 체계인 수학을 학습하면서 수학적 사고가 발달하기 위해서는 수학 언어가 자연스럽고 유연한 사고의 매개 수단으로서 사용될 필요가 있다. 수학은 일상 생활에서 사용되는 일상언어와 수학 사회에서 약속한 상징, 시각화를 안내하는 다이어그램, 그래프 등의 시각적 표현으로 표현되며, 이러한 여러 기호[1)]를 통하여 학생들은 수학적 의미를 깨닫고 알맞은 수학적 표현을 만들어 문제를 해결하고 상징을 조작하여 공식을 유도하면서 수학을 경험하게 된다. 따라서 수학의 학습에는, 기호 체계의 규칙과 의미를 이해하고 수학적 사고를 기호 표현을 사용하여 나타내는 것이 포함되어야 한다.

수학은 일상언어, 상징, 시각적 표현의 기호에 의해 표현되나, 본 연구에서의 수학적 언어는 일상언어와 상징에만 한정하기로 한다. 언어는 음성 또는 문자를 수단으로 하여 사상이나 감정을 표현하여 전달하는 활동으로(이희승,

---

* 광장중학교, math1207@bcline.com, 제 1 저자
** 이화여자대학교, jonghee@ewha.ac.kr, 제 2 저자

1) 기호는 어떤 대상을 대신하면서 그 대상에 대한 해석자의 해석이 필요한 역동적인 표현이다. 따라서 시각적 표현과 언어 또한 기호에 포함된다. 본 연구에서 언어는 기호에 포함되며, 상징은 수학 사회에서 규약에 의해 정한 대수 기호 등을 말한다.

1996), 시각적 표현은 개념적 내용을 완전히 표현하기에 부족한 면이 있기 때문에 본 연구에서 제외하기로 한다.

수학적 언어에는 일상언어와 상징의 요소가 포함되어 있는데 일상언어와 상징은 텍스트에서 각기 다른 역할을 담당한다. Freudenthal(1978)은 수학적 내용을 나타내는 언어의 수준을 4가지로 구분하고 일상언어를 사용하는 것이 상징을 사용하는 것보다 더 낮은 수준의 언어임을 말하였다. 이러한 언어의 수준은 학습의 위계로 규정될 필요는 없지만 학습과정에서 발견되는 것으로 볼 수 있다. 즉, 수학적 언어의 수준은 학습 결과의 부산물로 볼 수 있으며, 어떤 수학적 개념이 각각의 언어 수준으로 제시될 때 학습자가 상위 수준의 표현을 이해했다면 하위 수준 또한 이해한 것으로 볼 수 있는지를 생각해볼 수 있다. 조영미(2001)는 학교 수학에 제시된 정의의 수준을 Freudenthal과 van Hiele의 수준에 의해 구분하면서 각각의 위계를 조사하였으나 학생들의 이해 수준과 학습 수준에 대해서 앞으로 연구가 이루어져야 할 것을 제언하였다. 이에 본 연구에서는 학생들이 기하 단원에서 학습하는 개념에 대하여, Freudenthal의 언어 수준을 참조하여 학생들의 이해 수준을 알아보고 그 위계성을 확인하고자 한다.

개념의 위계와 관련된 연구로는 CSMS 프로젝트(Leake, 1996), 함수 그래프에 대한 이해의 수준을 나눈 Leake(1996)의 연구가 있으며, 수준과 관련하여 Goldin(1987)은 문제해결에서 언어의 수준을, Nellisen과 Tomic(1998)은 상식에서 출발하여 상징으로 진행하는 표현의 수준에 대해 고찰한 바 있다. 그러나 개념과 관련되어 학생들의 수학적 언어의 수준을 조사한 연구는 미흡한 실정이다.

학생들은 교사나 교과서에 의해 설명되는 언어를 이해하는 것 뿐 아니라 개념, 문제해결, 알고리즘, 추론, 의사소통의 수학에서 자신의 생각을 수학적 언어를 사용하여 표현할 필요가 있다. 본 연구는 언어의 이해와 언어의 사용이 각기 다른 언어 기능에 속한다고 보고 중학생들의 언어 사용에서의 수준 또한 조사하여 언어 이해 수준과 상관이 있는지 알아본다. 그리고 언어 사용 수준에 따라 정확한 답을 하는 여부에 차이가 있는지도 알아본다.

본 연구의 연구문제는 다음과 같다.

첫째, Freudenthal의 언어 수준이 학생들의 언어 이해 수준에도 적용되는가? 학생들의 언어 이해 수준은 위계적인가?

둘째, Freudenthal의 수준에 비추어 볼 때, 학생들의 언어 사용 수준은 어떠한가? 언어 사용 수준과 언어 이해 수준은 상관이 있는가? 언어 사용 수준에 따라 정답 여부가 달라지는가?

셋째, 학생들은 어떤 수준의 언어를 이해하기에 쉽다고 생각하는가?

II. 이론적 배경

1. 수학 학습에서 언어

인간은 언어에 의해 사고를 하고 사고는 언어를 통해 표현되듯이, 수학적 사고와 수학적 언어는 불가분의 관계이다. Piaget와 Vygotsky처럼 언어와 사고 어느 것이 먼저인지 논하지 않더라도 수학은 그만의 독특한 언어를 통해 구성되며 수학의 발전은 수학 언어의 발전과 더불어 이루어졌다고 해도 과언은 아니다. 대수의 역사적 발전이 일상적인 언어 표현을 사용한 언어적 대수 단계에서 미지수를 표현하기 위해 문자를 사용하기 시작한 생략적 대수 단계, 미지의 양과 주어진 양까지도 문자로 나타내는 상징적 대수 단계로 이루어진 것을 보아

도, 일상언어와 상징 언어의 사용이 대수의 학문적 발전에 영향을 주었음을 알 수 있다.

학교 수학에서 일상언어는 학년이 낮을수록 수학적 내용을 설명하고 예시하는데 많이 사용되고 있으며 Freudenthal(1978)은 수학적 언어의 수준을 설정하면서 일상언어의 사용을 하위 수준으로 언급하였다. 그러나 학생들은 일상 생활에서 사용하는 언어 뿐 아니라 수학 사회에서 규정한 상징을 사용하여 수학을 학습해야 한다. 의미가 압축된 상징을 이해하고 사용해야 하는 것은 학생들이 수학을 어렵게 여기는 이유 중 하나이므로, 학교 수학에서는 교수학적 변환을 거쳐 학생들의 학습 수준과 심리적 수준에 맞게 용어를 정의하고 개념을 설명한다. 하지만 학생들에게 친숙한 모국어의 일상언어만으로 모든 수학을 설명하는 것은 무리이다. 학습하는 수학의 내용이 확장되고 심화되면서 일상 생활에서 사용하는 모국어로 알고리즘을 찾고 수학 문제를 해결하기에는 한계가 있다. 과정과 절차에서 시작된 수학적 내용이 압축되어 하나의 대상으로 인식되는 수학 개념의 발전에는 상징의 역할이 중요하다.

그러나 일상언어와 상징의 두 가지 언어가 수학 학습에서 함께 사용되면서 학생들은 언어에 대한 문법과 의미, 해석을 올바르게 하지 못하여 오류를 저지르고 학습의 장애를 겪을 수 있다. 수학을 표현하는 두 가지 언어로서 일상언어와 수학 상징이 수학 학습에서 일으킬 수 있는 문제점들을 생각해 보자.

첫째, 일상언어는 수학의 이해를 제한시킬 수 있다(Pirie, 1998). 일상언어에서 갖고 있는 이미지가 수학과 다르거나 부분적이고 불완전할 때 수학적 이해를 방해할 수 있다. 예를 들어, "집합"이라는 수학 용어는 체육시간에 '모여라'라는 뜻으로 사용되던 용어로 그 이미지가 학생들에게 고착되어 있다면 그것을 원소들의 모임인 대상으로 받아들여 공집합 등을 이해하는 것은 어색한 일일 것이다.

둘째, 일상언어와 관계적 수학 상징의 문법이 일치하지 않는 것은 학생들에게 새로운 언어 체계를 학습하는 부담을 준다. 예를 들어 '2 더하기 3'은 '2+3'이지만, '2와 3을 더하면 5이다'는 '2, 3, +, 5, ='가 아니다. 수학을 학습하기 위해 수학적 상징을 학습하는 것은 그 상징 사이의 관계인 구문론적 규칙의 학습도 포함하며, 일상언어의 용어와 문법체계 뿐 아니라 수학적 상징과 그 체계의 문법도 알아야 하는 것이다. 이것이 잘 이루어지지 않았을 때는 자신의 아이디어와 달리 수학적으로 옳지 않은 식을 써서 문제를 해결하는 경우가 생긴다.

셋째, 수학의 상징은 여러 수학적 의미를 압축해서 포함하지만 하나의 표현으로 나타나기 때문에 학생들이 그 의미를 해석하기 어려울 수 있다. 그래서 학습자는 상징이 사용된 사용역(register)에서 어떤 의미가 옳은 해석인지를 선택해야 한다. 예를 들어, 문자 변수는 수학적인 것을 의미하는 일반 법칙을 형식화하기 위해 사용되거나, 또는 운동하는 성질을 가지는 변하는 대상 그 자체로 사용되기도 하며 이 두 가지가 합쳐져 무엇인가를 대신하는 자리지기의 개념으로 사용되므로(김남희, 1997), 그 문자가 사용되는 것이 방정식인지 항등식인지, 도형의 점을 가리키는 지표(index)[2]인지 해석되어야 그 의미가 파악될 수 있다.

넷째, 상징은 간략하다는 장점이 있지만 그 자체가 오해의 근원이 될 수도 있다(Pirie,

2) Peirce는 기호와 그것이 가리키는 사물의 관계에 의해 기호를 지표(index), 도상(icon), 상징(symbol)로 구분하였다. 지표는 그것이 가리키는 대상과 물리적인 관계를 유지하는 기호로, 지시대명사나 고유명사 그리고 정확한 사물을 가리키는 일반명사도 지표로 분류될 수 있다(Eco, 2000).

1998). 이는 동일한 의미를 일상언어와 상징으로 모두 표현할 수 있을 때 표현간의 번역에서 문제가 되거나 상징의 심층적 의미를 파악하지 않고 표면적 관계만을 기억할 때 발생하게 된다. 예를 들어 정수의 곱셈에서 (-)와 (-)의 곱은 (+)라는 것을 배운 학생이 -2-3=+6라는 오류를 범하는 것을 종종 볼 수 있다.

학생들은 일상언어와 상징을 통해 수학적 사고를 하고 문제 해결을 하고 알고리즘을 적용하고 개념을 습득해 간다. 위에서 보았듯이 이러한 지적 기능을 담당하는 언어가 항상 학습에 장점만을 제공하지는 않는다. 수학을 학습하는 데에는 수학에서만 사용되는 독특한 상징과 상징 체계의 구성 또한 포함되기 때문에 여러 장애를 가져올 수도 있는 것이다. 따라서 수학을 가르치는 교사와 교육자들은 학생들의 수학을 평가하고 관찰할 때 이러한 언어의 이해와 사용에 관심을 가져야 한다.

수학적 언어에 관심을 갖고 이를 교육에서 강조하는 것은 수학 자체가 언어라는 점에서도 생각해 볼 수 있다. Sierpinska(1994)는 체계로서의 언어와 사회적 실행으로서의 언어에 의미가 존재한다고 하였다. 수학이 규칙과 패턴을 찾고, 추론을 하고, 정의하고, 일반화하고, 도식화, 형식화, 알고리듬화, 국소적 조직화 등의 수학화 활동을 통해 학습되는 것이라면(정영옥, 1997), 학습되는 과정과 결과에서 나타난 언어가 바로 수학의 실행과 체계가 되며 따라서 수학적 언어가 수학이 될 수도 있는 것이다.

2. 수학적 언어의 수준

Freudenthal(1978)은 학습 과정에서 수학적 언어의 수준이 필요하지는 않지만 그런 과정이 발견되고 있다고 하였다. Freudenthal의 제안에 따라 학습 과정에서 언어의 수준이 발견된다면, 학생들은 이러한 언어의 수준을 순서대로 경험한 것이며 학습이 끝난 후 어떤 언어 수준에 머물러 있는지 파악해 볼 수 있을 것이다. 수학을 구성하고 있는 일상언어와 상징을 Freudenthal은 어떤 수준으로 나누고 있는지 알아보기로 한다.

Freudenthal의 첫 번째 언어 수준은 명시적(ostensive) 언어 수준이다. 이 수준의 언어는 대명사를 이용하여 '이것'이나 '저것'과 같은 단어를 사용하거나 명시적 예를 사용한다. 예를 들어, 제곱근을 설명할 때 '$3^2=9$ 그래서 3은 9의 제곱근'이라고 설명하면 이 수준의 언어를 사용했다고 할 수 있으며, 이 언어는 화자의 의도와 대화의 맥락을 공유해야 의미가 잘 이해될 수 있다.

둘째는 관계적 언어의 수준이다. 이 수준의 언어는 지시사를 피하고 일상언어를 사용하여 관계를 진술한다. 예를 들어, 제곱근을 설명할 때 '제곱해서 주어진 수가 되는 수'라고 진술한다. 이 수준의 언어는 생략되고 압축될 수 있는 수학적 의미를 구조적으로 나타내기에는 한계가 있다.

셋째는 규약적 변수를 도입하는 언어의 수준이다. 이 수준에서는 관계적 언어가 더 유연하게 기능하며 수학적 대상을 나타내는 상징을 도입한다. 예를 들어, 제곱근을 설명할 때 '$x=\sqrt{a} \leftrightarrow x^2=a$'의 기호를 사용하는 경우이다.

마지막으로 적절한 함수를 도입하는 함수적 언어의 수준이다. 예를 들어, 평행이동을 '좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 점 $\mathrm{P}'(x+a, y+b)$로 대응시키는 함수 $T: (x, y) \to (x+a, y+b)$'라고 표현하는 경우가 이 수준에 해당한다. 중학교 수학에서는 거의 예를 찾아볼 수 없다.

학습 과정에서 발견되는 언어의 수준을 언급한 Freudenthal(1978)과 van Hiele의 기하 학습

수준을 바탕으로 조영미(2001)는 학교 수학의 정의 수준을 탐색하였다. van Hiele의 0수준과 1수준을 각각 정의의 0수준과 1수준에 대응시켰는데, 0수준은 전(前)수학적 수준이고 1수준은 기술적 수준이다. 그리고 1수준을 시각적 특성과 성질과 관계를 동시에 사용하는 1a 단계와 순전히 성질과 관계만으로 정의하는 1b의 단계로 세분하였다. 정의의 2수준은 대상 기호를 사용하는 수준으로 대상을 나타내는 문자기호가 사용된다. 문자기호를 사용할 수 있는 부분에서 생략하는 단계를 2a, 사용될만한 자리에 기호가 모두 사용되고 있는 단계는 2b 수준으로 본다. 정의의 3수준은 관계 기호를 사용하는 수준으로 기호화한 관계적 표현을 사용하며, 2수준에 해당하는 표현과 관계 기호 표현이 함께 사용될 때는 3a, 2수준에 해당하는 표현 없이 곧장 관계 기호 표현만 사용하는 경우는 3b 수준이다. 마지막으로 4수준은 Freudenthal과 마찬가지로 함수 언어를 사용하는 수준으로 설정하고 있다.

본 연구는 Freudenthal의 언어 수준과 조영미의 정의 수준을 기초로 하여 학생들의 언어 수준을 탐색하고자 한다. 연구 대상인 중학생들은 아직 함수에 대한 개념과 표현을 충분히 학습하지 못하였으므로, Freudenthal의 4수준에 해당하는 함수적 언어의 수준이 파악되기 힘들다. 그래서 함수적 언어의 수준은 조사하지 않았으며, Freudenthal의 3수준을 대상을 나타내는 지표를 사용하는 것과 관계의 상징으로 나타내는 두 수준으로 분리하기로 한다. 이것은 조영미의 정의 수준 2, 3과도 일치한다. 즉, 본 연구의 3수준은 대상을 상징으로 사용하는 대상 지표의 수준이며, 4수준은 상징간의 관계를 상징으로 기술하는 관계적 상징의 수준이다. 일상언어가 아닌 수학 상징을 대상으로 사용하게 되는 대상 지표의 수준은 일상언어에 의해 과정으로 설명되던 것이 하나의 대상으로 압축되고 대상화되는 것을 분리하고자 한 것이며[3], 수학적 대상을 상징으로 나타내고 그 관계조차 상징을 사용하는 관계적 상징의 수준은 수학의 조직화와 구조화를 하려는 시도로 보아 두 수준을 분리하였다.

본 연구에서 정한 수학적 언어의 수준은 <표 1>의 내용으로 되어 있으며, 각 수준에 따라 언어 이해 검사의 문항이 구성된다.

<표 1> 수학적 언어의 수준

본 연구의 수준		수준의 특징	Freudenthal의 언어 수준	학교 수학의 정의 수준(조영미)
1 수준	명시적 언어 수준	일상언어의 예와 지시사를 사용한 구체적인 언어를 사용한다	1	1a
2 수준	관계적 언어 수준	상대적 관계를 일상언어를 사용하여 나타낸다	2	1b
3 수준	대상 지표의 수준	수학적 대상을 일상언어가 아닌 지표로 나타낸다	3	2a, 2b
4 수준	관계적 상징의 수준	수학적 관계를 상징을 통해 표현한다	3	3a, 3b

언어는 논리적 사고를 통해 지식을 구성하게 하는 지적 기능과 다른 사람과 사회적 관계를 유지시키게 하는 의사소통의 기능을 담당한다 (Trabant, 2001). Vygotsky도 언어의 기능을 열거

3). Peirce의 도상, 지표, 상징은 구분 가능한 기호의 분류이지만 서로 중복되는 역할을 할 수도 있다. 여기서 수학적 대상의 지표는 수학 상징의 모양을 가지고 지표의 기능을 담당하는 기호이다.

할 때 의사소통의 사회적 기능과 지적인 인지적 기능을 언급한 바 있다(Wertsch, 1995). 본 연구에서 조사하고자 하는 수학적 언어의 수준은 이런 기능 각각에서 살펴볼 수 있으며, 이에 따라 지적인 기능에는 언어 이해 검사를, 의사소통 기능에는 언어 사용 검사를 실시한다.

언어 이해 검사는 하나의 개념을 1~4수준 각각으로 설명하는 문항으로 구성되었고, 각 수준의 위계가 존재하는지 통계적 방법을 이용하여 알아볼 것이다. 그리고 각 수준의 응답을 2/3 이상 한 학생은 그 수준에 도달한 것으로 하여 학생들의 이해 수준을 알아본다.

언어 사용 검사는 학생들이 개념을 설명할 때 사용하는 언어의 수준을 파악하는 것으로, 과제가 주어지는 형식이나 문제를 이해하는 것에 따라 언어 사용에 영향을 줄 것으로 여겨져 3가지 형식의 문항을 학생들에게 제시하였다. 첫째는 그림이 주어지지 않고 과제를 읽고 개념을 설명하는 형식이며, 둘째는 그림이 주어져 문제 내용이 더 잘 이해되도록 한 것이며, 셋째는 그림이 주어지고 그림에 포함된 점을 문자로 표기하여 지표를 포함한 형식이다. 세 문항은 1학년 교과서에서 다루어지는 학습 내용이며 현장 교사 2인이 학생들이 개념을 설명하기에 적합하다고 판정한 것이다. 학생들의 응답은 <표 1>의 기준에 의해 각 언어의 수준으로 분류될 것이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 설계

1. 연구 절차

서울 시내의 G중학교 1학년 201명과 3학년 93명, S중학교 1학년 80명 등 총 374명이 본 연구에 참여하였다. 본 연구는 위계와 관련된 것이므로 학년이 높아짐에 따라 그 위계의 수준 변화를 알아보기 위해 중학교 1, 3학년을 연구대상으로 설정하였다. 그러나 학년마다 위계가 많이 차이가 날 것으로는 예상되지 않아 중학교 2학년은 제외하고 1, 3학년만 연구대상으로 하였다.

2002년 12월 학기말 고사가 끝난 직후, 학생들에게 기하 개념과 관련된 내용의 언어 이해 검사 20문항과 언어 사용 검사 3문항, 설문 1개가 주어졌다. 1학년은 기본도형, 도형의 성질, 측정과 관련된 내용이 학기말 시험범위이고 3학년은 피타고라스의 정리와 원의 성질이 범위로 주어져 본 연구의 검사 문항의 내용인 기하 개념에 대해 이미 학습한 상태이다. 학생들은 45분간 언어 이해 검사와 언어 사용 검사 총 23문항과 설문 1개의 답을 하였다.

2. 수학적 언어 수준 검사 문항

본 연구를 위해 언어 이해 검사와 언어 사용 검사가 실시되었다.

언어 이해 검사 문항은 학생들이 기하 개념에 대해 <표 1>에서 규정한 네 수준의 언어로 기술된 내용을 읽고 그에 해당하는 용어를 5개의 보기 중에서 선택하는 것이다. 문항의 내용은 교과서에 제시된 정의를 따르거나 개념의 성질을 진술한 것이며, 한 개념에 대한 4가지 수준의 문항은 표현은 달리 하되 동일한 의미를 지닌 것이다. 즉, 1수준의 문항은 그림을 그려 변이나 각을 화살표로 가리키며 '이것, 저것'의 대명사를 사용하여 개념에 대한 설명을 기술한다. 2수준의 문항은 개념에 대한 설명에서 대상과 관계를 일상언어를 사용하여 기술한다. 3수준의 문항은 대상 지표를 사용하고 관계는 일상언어로 기술한다. 4수준은 대상과 관

계를 모두 상징을 사용하여 개념을 기술한다. 그러나 학생들에게 개념이 분명하지 않은 형식적 표기는 제한을 하여, 관계를 나타내는데 꼭 필요하지 않은 것은 상징을 사용하여 제시하지 않았다.

개념의 난이도에 따라 언어 수준에 차이가 있을 것을 고려하여, 중학교 1학년 학생들이 학습한 내용 중 학생들이 접근하기에 어렵지 않은 필수 개념을 현장 교사 2인이 5가지를 선정하였다. 5가지 개념은 '직교, 평행, 이등변삼각형, 선대칭도형, 한 점에서 직선까지의 거리'이며, 각각 4가지 수준의 진술문이 쓰여져 언어 이해 검사 문항은 총 20문항이고 <부록>에 제시되어 있다. 언어 이해 검사는 통계처리를 위해 정답은 1, 오답은 0으로 코딩하였다.

교과서나 교사의 설명으로 주어진 수학적 언어를 이해하는 것 외에, 학생들이 실제로 수학을 학습하면서 알고 있는 개념을 설명할 때 사용하는 수학적 언어의 수준은 어떠한지 알아보기 위해 언어 사용 검사가 실시되었다. 언어 사용 검사는 기하 내용 중 '현과 중심각의 관계', '한 점에서 그 점을 지나지 않는 평면까지의 거리', '두 삼각형의 합동'과 관련된 내용을 설명하도록 하는 것이었다. 결과 분석을 위해 학생들이 쓴 내용은 옳고 그름에 따라 1과 0으로 코딩되었으며, <표 1>의 4가지 언어 수준으로도 코딩되었다. 그러나 각각의 수준으로 설정할 수 없는 답을 한 학생들도 간혹 있었다. 예를 들어, "이 길이>저 길이"라는 식의 표현은 '이것, 저것'의 구체적인 언어를 사용한 1수준과 관계적 상징을 나타내는 >라는 상징의 4수준을 동시에 사용한 것으로 볼 수 있다. 본 연구는 언어 사용에서도 수학적 언어의 위계가 있는지 그리고 그에 따라 설명의 내용도 옳은지 알아보고자 하며, 따라서 수준이 다른 언어가 함께 사용된 경우는 상위수준에 포함시켜 학생들의 언어 사용 수준과 옳은 응답을 했는지 여부를 조사한다.

3. 통계 분석 방법

본 연구는 수학적 언어의 수준을 제시한 Freudenthal의 이론이 실제로 학생들이 학습한 결과에서도 나타나는지 알아보고자 한다. 먼저 본 연구에서 개발한 언어 이해 검사의 타당도와 신뢰도를 검증하기 위해, 검사신뢰도(test reliability)와 문항신뢰도(item reliability)를 측정한다. 검사 신뢰도는 KR-20 계수를 구하고, 문항신뢰도는 점이연상관계수로 측정한다.

그리고 각각의 개념에 대해 4가지 수학적 언어의 수준으로 진술한 내용을 이해하여 옳은 용어를 선택해야 하는 언어 이해 검사는 각각의 수준으로 진술된 문항이 위계성을 갖는지 검증되어야 한다. 위계적 수준의 타당성을 검증하기 위해 Leake(1996)의 연구 방법을 참고하여 Guttman의 scalogram 분석을 실시한다. 언어 수준은 서열 척도에 대응하는 구조를 가지며 검사에 대한 반응 패턴에 의해 측정될 수 있다. 각 수준에 해당하는 문항의 반응 패턴은 위계를 형성하는지 결정하는데 분석된다.

개념에 대한 각각의 수준은 <표 2>와 같이 확인될 수 있다. 하나의 개념에서 언어 수준에 따라 4가지 문항이 주어져 응답 결과는 2^4가지의 경우가 나오며 옳은 응답을 1, 옳지 않은 응답을 0으로 코딩한다면, 0수준은 0000, 1수준은 1000, 2수준은 1100, 3수준은 1110, 4수준은 1111이 될 것이다. 수준의 위계에 맞지 않는 오류의 수는 코딩결과에서 1 이전에 0이 있는 개수로 계산될 수 있으며, 예를 들어 1수준과 3수준에서 정답을 하고 2수준과 4수준에 오답을 했다면 1010으로 코딩되며 <표 2>와 같이 오류의 수는 1이다.

<표 2> 언어 이해 수준의 Guttman 척도와 오류수

수준 1의 문항 반응	수준 2의 문항 반응	수준 3의 문항 반응	수준 4의 문항 반응	Guttman 척도	오류 수
0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	
1	1	0	0	2	
1	1	1	0	3	
1	1	1	1	4	
1	0	1	0		1
1	0	0	1		2

Guttman 척도의 적합도는 재생가능성 계수(reproducibility coefficient)로 평가되며, 이 계수는 "모든 관찰된 검사에서 반응의 패턴이 척도-점수만으로 얼마나 믿을 수 있게 재생될 수 있는지"를 가리킨다(Shye, 1985, Leake, 1996, 재인용). 이 계수는 각각의 개념에서 다음의 식으로 계산된다.

$$R = 1 - \frac{\text{오류의 총수}}{\text{전체 응답수}} = 1 - \frac{\text{오류의 총수}}{(\text{문항수}) \times (\text{학생수})} = 1 - \frac{\text{오류의 총수}}{4 \times 390}.$$

언어 이해 수준과 언어 사용 수준, 학생들이 이해하기에 쉬운 수준의 관련성, 그리고 언어 사용 수준과 정답과의 관련성은 범주형 자료간의 상관을 말해주는 χ^2 검정을 실시하여 검증한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 언어 이해 수준의 위계성

(1) 언어 이해 검사의 타당도와 신뢰도

언어 이해 검사는 1학년 학생들이 학습한 기하의 필수 개념을 중학교 교사 2인이 선택한 것으로 구성되며, 본 연구에서 정한 언어 수준에 따라 동일한 의미의 내용을 다른 표현으로 진술했는지 교과전문가 2인이 검토하여 검사의 타당도를 검증 받았다.

언어 이해 검사는 기존에 검증 받은 검사가 아니기 때문에 검사 신뢰도(test reliability)와 문항 신뢰도(item reliability)의 이슈가 제기될 수 있다. 이를 위해 20개 문항에 대한 검사 신뢰도로 도구의 안정성이나 내적 일관성을 측정하는 값으로 KR-20 계수를 조사했다. 본 연구에 참여한 1학년과 3학년 학생들의 모든 응답 반응으로 KR-20 계수를 계산한 결과 0.8572이며 정답율은 52%이었다.

검사의 전반적인 질은 그 문항의 질로 구성된다는 가정을 한다면, 문항 신뢰도는 점이연상관계수로 측정할 수 있다. 점이연상관계수는 연속적인 변수와 이분변수의 상관계수를 측정하는 것으로, 각각의 문항이 검사 전체 점수와 같은 것을 측정하고 있는 정도의 추정치를 제공한다. 언어 수준에 따라 5개의 개념에 대해 진술된 문항에 옳은 답변은 1, 그른 답변은 0으로 코딩하고 20개 문항의 총합을 구하였다. 점수 총합을 연속 변수로 하고 각 문항의 점수를 이분변수로 하여 점이연상관계수를 구한 값은 <표 3>에 제시되어 있다. Leake(1996)의 연

<표 3> 각 문항과 점수 총합의 점이연상관계수

	직교	평행	이등변삼각형	선대칭도형	한 점에서 직선까지의 거리
1수준 문항	0.352	0.454	0.492	0.481	0.243
2수준 문항	0.613	0.530	0.444	0.456	0.151
3수준 문항	0.569	0.415	0.605	0.247	0.113
4수준 문항	0.365	0.590	0.450	0.294	0.174

구에서 제안한 0.09보다 작은 값은 나타나지 않았으며, 이 통계는 도구가 언어 수준을 측정하는데 신뢰롭다는 것을 말해준다.

(2) 위계성 확인

언어 이해 검사에 응답한 학생들의 반응이 언어 수준에 따라 위계가 있는지 알아보기 위해 Guttman의 척도를 이용하여 각 개념에 대한 수준을 <표 2>와 같이 나타내었다. 이에 대응하지 않은 학생들의 응답에서 오류의 수를 계산하였고, 이 척도의 적합성은 재생가능성 계수에 의해 판정된다. 5가지 개념 각각에서 언어의 위계가 있는지 확인하기 위한 재생가능성 계수가 <표 4>에 있다.

선대칭도형을 제외한 나머지 개념의 재생가능성 계수의 값은 모두 0.85이상으로 Guttman의 척도가 타당하다는 것을 말해 준다(Torgerson, 1958). 선대칭도형의 개념은 '회전체를 포함한 단면은 회전축을 중심으로 대칭'이라는 사실을 학습할 때 소개되는 것으로, 중학교 교육과정에서 다른 개념보다 강조되지 않고 있으며 0.85보다 작은 계수가 산출되기는 하였으나 그 차이가 0.036(=0.85-0.814)로 작아 위계성을

<표 4> 5가지 개념에 대한 재생가능성 계수

직교	평행	이등변 삼각형	선대칭 도형	한 점에서 직선까지의 거리
0.850	0.877	0.893	0.814	0.855

갖는 것에 포함시키기로 한다.

각각의 개념에서 위계가 확인되었으므로, 개별 학생들의 언어 수준이 어떠한지 정하기로 한다. Leake(1996)와 CSMS 프로젝트(Leake, 1996)에서 설정한 비율인 2/3를 기준으로, 한 수준의 응답이 2/3 이상이면 그 수준에 도달한 것으로 보고 학생들의 언어 이해 수준 위계를 조사하였다. 예를 들어, 어떤 학생이 1수준의 문제를 5개, 2수준의 문제를 4개, 3수준의 문제를 2개, 4수준의 문제를 1개씩 정답으로 맞추었다면, 이 학생은 2수준에 머무른 것으로 본다. 2/3의 기준으로 분류되지 않는 학생들을 제외한 나머지 학생들의 이해 수준을 조사하면 <표 5>와 같다. χ^2 검정 결과 유의확률이 .266으로 학년과 언어 이해 수준에 상관이 없는 것으로 나타났고 Cramer의 V는 .143, Parson의 R은 .068이었다. 즉, 학년과 언어 이해 수준은 상관이 없었다. 그러나 1학년 학생들은 가장 높은 비율인 33.8%가 3수준에 있었고, 3학년 학생들은 41.2%가 4수준에 머무른 것으로 나타났다.

<표 5> 학생들의 언어 이해 수준

	1수준	2수준	3수준	4수준	전체
1학년	17 (10.6%)	44 (27.5%)	54 (33.8%)	45 (28.1%)	160 (100%)
3학년	5 (14.7%)	5 (14.7%)	10 (29.4%)	14 (41.2%)	34 (100%)
전체	22 (11.3%)	48 (25.3%)	64 (33.0%)	59 (30.4%)	194 (100%)

( ) 안은 행 내에서의 퍼센트. 이하 동일

학생들은 중학교 1학년부터 대수를 접하게 되면서 규약적인 대상 지표와 관계적 상징을 사용하고 있으므로 수학 학습에 성공하였다면 4수준의 이해 수준에 도달할 수 있다. 실제로 학기말 고사 성적과 언어 이해 수준의 상관관계를 조사한 결과, G 중학교 1학년 학생들은 Pearson의 R이 .497이고 3학년 학생들은 .478로 유의수준 .01내에서 유의한 관계가 있었다. S 중학교 1학년 학생들도 학기말 고사 성적과 언어 이해 검사 점수가 .692로 유의수준 .01내에서 상관이 있었다. 그러나 이해의 수준이 위계적임을 생각할 때, 3수준 이하에 머무르고 있는 학생들이 4수준의 학생들과 동일한 교실에서 동일한 교과서로 교사의 설명을 접하게 될 때, 수학을 이해하는데 있어 의사소통의 문제가 발생하리라 예상된다. 특히, 고등학교에서 상징 체계를 주로 사용하는 형식적인 수학을 접하게 될 3학년 학생들이 언어 이해 수준이 대체로 낮은 것은 앞으로 수학 학습에 장애가 될 수 있을 것이다.

2. 중학생들의 언어 사용 수준

학생들이 실제로 개념을 설명하는 글에서 나타난 언어의 수준은 어떠한지 알아보았다. 본 연구에서는 개념을 설명하는 과제를 3개 제시하였는데, 학생들이 설명한 글을 통하여 본 연구에서 정한 언어 수준을 확인할 수 있었다.

<표 5>의 언어 이해 검사에서 분류된 학생들의 언어 사용 수준을 조사하기로 한다. 언어 이해 수준의 판정과 마찬가지로 언어 사용 검사의 세 가지 과제에서 사용한 언어가 한 수준에 2/3 이상이면 그 수준에 도달한 것으로 보았다. 즉, 세 가지 과제 중 두 가지 이상의 과제에서 사용한 언어 수준이 바로 언어 사용 수준이 된다. 언어 사용 수준에서는 이해 수준처럼 위계가 검증될 수 있는 검사지가 사용될 수는 없다. 각 수준에서 2/3 이상의 학생 수가 전체 학생수에 비해 소수인 것을 볼 때 언어 사용 수준의 위계성은 성립하지 않는 것으로 예측된다. 언어 이해 수준과 언어 사용 수준이 2/3의 기준에 따라 분류되지 않는 학생들의 반응을 제외하면, 학생들의 언어 사용 수준은 <표 6>과 같다. χ^2검정을 실시한 결과 유의확률이 .431로 학년과 언어 사용 수준은 유의수준 .05내에서 상관이 없었고 Cramer의 V는 .164, Pearson의 R은 .102이었다. 언어 이해 수준과 마찬가지로 중학생들의 학년과 언어 사용 수준은 상관이 없다고 볼 수 있다. 조영미(2001)의 연구에 의하면 학교수학에서는 학년이 높아질수록 정의의 수준이 상승되고 있음을 보여주었지만, 중학교 1, 3학년 학생들은 이러한 언어 이해와 언어 사용에 있어 별 차이를 보이지 않았다. 초등 수준과 중등 수준의 학년을 포함하여 언어 수준의 차이가 있는지 알아보는 후속 연구가 필요할 것이다.

<표 6> 학생들의 언어 사용 수준

	1수준	2수준	3수준	4수준	전체
1학년	6 (6.5%)	64 (68.8%)	13 (14.0%)	10 (10.8%)	93 (100%)
3학년		5 (55.6%)	3 (33.3%)	1 (11.1%)	9 (100%)
전체	6 (5.9%)	69 (67.6%)	16 (15.7%)	11 (10.8%)	102 (100%)

언어 이해 수준과 언어 사용 수준간에 상관이 있는지 χ^2검정을 실시한 결과에서도 유의확률이 .545로 유의수준 .05내에서 상관이 없었고 Cramer의 V가 .161, Pearson의 R은 -.116이었다. 즉, 언어를 이해하는 수준이 높을수록 언어를 사용하는 수준 또한 높다고 볼 수 없는 것

이다. 언어 사용 수준과 언어 이해 수준의 차이를 알아보면 <표 7>과 같다.

언어 이해 수준과 언어 사용 수준의 차가 양수로 나타난 학생들은 전체의 54% (29.4% + 21.6%+2%)로, 학생들의 언어 이해 수준이 언어 사용 수준보다 전반적으로 높음을 보여준다. 이러한 차이가 나타난 것은 언어의 이해와 사용을 담당하는 지적 기능과 의사소통 기능이 구분될 수 있음을 알려주는 것이다. 일반적으로 학생들은 학습 과정에서 수학을 표현하고 설명하는 능동적 태도보다 듣고 이해하는 수동적 태도를 가지기 쉬운데, 언어 수준을 통해서도 이러한 점이 나타났다고 볼 수 있다.

<표 7> 언어 이해 수준과 언어 사용 수준간의 차이

	(언어 이해 수준)-(언어 사용 수준)						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
1학년	2 (2.2%)	5 (5.4%)	10 (10.8%)	26 (28.0%)	29 (30.1%)	20 (21.5%)	2 (2.2)%
3학년		1 (11.1%)	3 (33.3%)	1 (11.1%)	2 (22.2%)	2 (22.2%)	
전체	2 (2.0%)	6 (5.9%)	13 (12.7%)	27 (26.5%)	30 (29.4%)	22 (21.6%)	2 (2.0%)

본 연구에서 언어 사용 검사는 위계를 측정하기 위한 문항이 아니며 중학생들이 개념을 설명하는데 있어 어떤 수준의 언어를 사용하는지 알아보고자 한 것이다. 따라서 언어 사용 수준에 따라 정답 여부에 차이가 있는지 알아보기 위해서는 각 과제별로 분석이 진행되어야 한다.

언어 사용 검사는 그림이 주어지지 않은 경우, 그림이 주어지되 지표가 없는 경우, 그림과 지표가 주어진 경우의 3가지 과제로 구성되었으며, 이러한 조건은 학생들이 문제를 이해하고 상징을 사용하여 표현하는데 자극이 될 것으로 보았다. 세 가지 과제의 난이도 수준은 현장 교사 2인에 의해 조정된 것이다.

언어 이해와 언어 사용 수준에서 학년간의 차이가 없었으므로 학년을 통합하여 언어 사용 수준에 따른 정답 여부를 조사한다. 분석 대상은 언어 사용 검사에서 무응답을 제외한 학생들이다.

◆ 그림이 주어지지 않은 경우

이 과제의 질문은 다음과 같다:

(1) 한 원에서 중심각의 크기가 두 배가 되면 호의 길이는 두 배가 되어 정비례한다. 하지만 현의 길이는 두 배가 되지 않는다. 이유를 설명하라.

다른 과제와 달리 그림이 주어지지 않았던 이 과제에서 학생들의 설명 내용은 추상적인 내용의 답이 있었다. 예를 들어, '중심각과 현의 길이는 비례하지 않으니까'의 일반적인 내용을 답한 학생들이 있었으며, 이러한 답변은 질문의 의도와 맞지 않아 오답으로 처리하였다. 무응답을 제외한 214명의 학생들의 표현 수준과 정답 여부의 연관성을 알아보기 위해 χ^2 검정을 실시한 결과 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서 표현 수준과 정답 여부가 관계가 있는 것으로 나타났다. Cramer의 V가 .641, Pearson의 R이 .180이었으며 유의수준 .01 내에서 표현 수준과 정답여부에 연관성이 있다.

<표 8> 과제 (1)에 대한 언어 사용 수준과 정답 여부

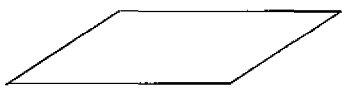
		언어 사용 수준				
		1수준	2수준	3수준	4수준	합계
정답 여부	오답	11 (7.1%)	138 (88.5%)	5 (3.2%)	2 (1.3%)	156 (100%)
	정답	21 (36.2%)	14 (24.1%)	9 (15.5%)	14 (24.1%)	58 (100%)
	전체	32 (15.0%)	152 (71.0%)	14 (6.5%)	16 (7.5%)	214 (100%)

그림이 주어지지 않은 경우 학생들은 71%가 2수준의 언어를 많이 사용했으나 정답을 한 학생들 중 36.2%가 1수준으로 가장 많았다. 그림이 주어지지 않아 문제를 이해하기가 더 어려웠을 거라 여겨진 과제 (1)에서 정답율은 15%이었으며, 정답을 가장 많이 한 1수준의 학생들은 과제 (1)에서 개념을 설명할 때 실제로 그림을 그려서 설명을 하였었다.

◆ 그림이 주어진 경우

과제의 질문은 다음과 같다:

(2) 공간상의 한 점에서 그 점을 지나지 않는 평면까지의 거리를 구하는 방법을 설명하라.



이 과제는 그림이 주어지고 점이나 평면의 대상을 나타내는 지표가 주어지지 않은 형식의 과제이다. 무응답을 한 학생들을 제외한 215명의 학생들을 대상으로 언어 사용 수준과 정답 여부의 연관성을 조사한다. χ^2검정을 실시한 결과 유의확률이 .065로 유의수준 .10내에서 언어 사용 수준과 정답 여부에 연관성이 있다고 할 수 있다. Cramer의 V가 .183, Pearson의 R이 .094로 연관성이 그리 크지는 않았다.

<표 9> 과제 (2)에 대한 언어 사용 수준과 정답 여부

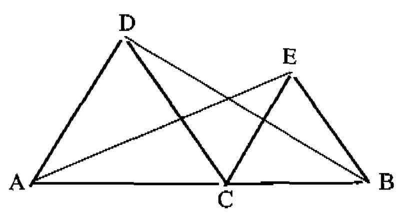
		언어 사용 수준				
		1수준	2수준	3수준	4수준	합계
정답 여부	오답	5 (3.9%)	111 (86.7%)	9 (7.0%)	3 (2.3%)	128 (100%)
	정답	5 (5.7%)	64 (73.6%)	16 (18.%)	2 (2.3%)	87 (100%)
	전체	10 (4.7%)	175 (81.4%)	25 (11.6%)	5 (2.3%)	215 (100%)

그림을 주어서 이해를 도모한 과제에서 학생들은 그림이 주어지지 않은 경우와 마찬가지로 81.4%가 2수준의 언어를 가장 많이 사용했으며, 정답을 한 학생들은 그림을 보면서 일상언어를 사용하여 관계를 진술하는 2수준이 가장 많은 것으로 나타났다. 정답율은 23%로 과제 (1)보다 높았다.

◆ 그림과 지표가 주어진 경우

이 과제의 질문은 다음과 같다:

(3) 다음 그림에서 $\triangle ACD$와 $\triangle CBE$는 정삼각형이다. $\triangle ACE \equiv \triangle DCB$인 이유를 설명하라.



그림이 주어지고 각 점에 대응하는 지표가 표시된 이 과제에서 언어 사용 수준과 정답 여부에 상관이 있는지 χ^2검정을 실시한 결과 유의확률이 .000으로 유의수준 .01내에서 연관성이 있었다. 연관성의 정도는 Cramer의 V는 .568, Pearson의 R은 .534이었다.

<표 10> 과제 (3)에 대한 언어 사용 수준과 정답 여부

		언어 사용 수준				
		1수준	2수준	3수준	4수준	합계
정답 여부	오답	6 (3.9%)	70 (45.2%)	47 (30.3%)	32 (20.6%)	155 (100%)
	정답	2 (2.1%)	2 (2.1%)	21 (22.1%)	70 (73.7%)	95 (100%)
	전체	8 (3.2%)	72 (28.8%)	68 (27.2%)	102 (40.8%)	250 (100%)

앞의 두 과제에서는 학생들이 1, 2수준의 언어를 많이 사용한 것으로 나타났으나 이 과제에서는 각 수준의 분포가 고른 편이다. 그러나 정답은 4수준의 학생들이 73.7%로 가장 많았다. 이것은 과제에서 그림에 각각의 점을 A, B, C, …의 지표로 나타내어 상징의 사용을 돕고 평소 학습하는 과정에서 합동을 설명할 때 대상 지표와 관계적 상징을 사용했던 경험이 작용한 것으로 보인다. 합동조건을 찾아 상징을 사용하여 그 조건에 해당하는 내용을 나타내는 교과서와 교사의 설명이 학생들의 언어 사용에 반영되었다고 볼 수 있다.

요약하면, 언어 사용 검사의 세 가지 과제에서 학생들은 언어 사용 수준에 따라 정답 여부가 달랐다. 그림이 주어지지 않은 과제에서는 1수준의 언어가, 그림이 주어진 과제에서는 2수준의 언어가, 그림과 지표가 주어진 과제에서는 4수준의 언어가 정답에 가장 기여하였다. 학생들이 대상이나 관계를 나타내는데 있어 문제에서 주어진 조건이 언어 사용 수준의 상승을 자극한다고 할 수 있다.

3. 학생들이 이해하기에 쉬운 수준

언어 이해 검사 후 언어 사용 검사를 실시하기 전에, 학생들에게 어떤 수준의 표현이 가장 이해하기가 쉬운지 묻는 설문을 하였다. 4가지 수준의 표현 중에서 가장 이해하기 쉬운 표현을 학생들은 <표 11>과 같이 대답했다. 무응답을 제외하고 340명의 반응이 분석되었다. 1학년과 3학년 학생들 모두 3수준의 표현이 이해하기에 가장 쉽다고 하였고, 1수준의 표현이 쉽다고 한 학생들도 많았다. 실제로 교사가 수업 시간에 사용하는 언어는 1수준의 것이었더라도 칠판 필기 등의 문어적 표현에서는 상징을 사용한 3수준의 언어를 사용하기 때문에, 학생들의 지필 검사의 문어 표현은 3수준이 쉽다고 생각한 것으로 보인다. 학년과 이해하기에 쉬운 언어 수준에 관련이 있는지 알아보기 위해 χ^2검정 결과 유의확률이 .881로 학년과 이해하기 쉬운 수준의 언어에 상관이 없었다. Cramer의 V는 .044이었다.

<표 11> 중학생들이 이해하기 쉽다고 생각한 언어 수준

	이해하기에 쉬운 수준				
	1수준	2수준	3수준	4수준	전체
1학년	81 (30.2%)	51 (19.0%)	96 (35.8%)	40 (14.9%)	268
3학년	20 (27.8%)	15 (20.8%)	24 (33.3%)	13 (18.1%)	72
전체	101 (29.7%)	66 (19.4%)	120 (35.3%)	53 (15.6%)	340

그러나 이 응답이 언어 이해 수준을 반영한 것은 아니다. 학생들의 언어 이해 수준과 상관

이 있는지 χ^2검정 결과 유의확률이 .557로 상관이 없었다. Cramer의 V는 .012이고 Pearson의 R은 .004이었다. 또한, 학생들이 이해하기에 가장 쉬운 수준은 χ^2검정 결과 학생들이 언어 사용 수준과 유의수준 .05내에서 상관이 없었으며, Cramer의 V는 .124, Pearson의 R은 -.058이었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

언어를 포함한 표현의 지적, 의사소통의 기능을 강조한다면 수학 학습에서 수학적 언어에 관심이 주어져야 하는 것은 당연하다. 수학에서 사용되는 언어는 일상언어와 상징이 있으며 Freudenthal(1978)은 일상언어보다 상징이 더 높은 수준의 언어라고 보았다. 본 연구는 Freudenthal이 언급한 언어의 수준이 학생들이 수학적 언어를 이해하고 사용하는 데에서도 적용되는 것인지 알아보고자 하였다. 이를 위해 언어 이해 검사와 언어 사용 검사가 두 개 중학교의 학생들에게 실시되었으며, 통계적 방법을 이용하여 분석된 결과는 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서 개발한 기하 개념에 대한 언어 이해 검사는 신뢰도와 타당도를 가진 것이었으며, 이 검사를 통해 학생들이 수학적 언어를 이해하는 것에 수준의 위계가 있음이 밝혀졌다. 둘째, 학생들이 수학 개념을 설명하면서 사용하는 언어의 수준은 중학교 1학년과 3학년 학생들에게 차이가 없었다. 수학적 언어를 이해하는 수준과 언어를 사용하는 수준은 상관이 없었으며, 과제에 따라 정답에 기여하는 언어 사용 수준이 달랐다. 셋째, 중학생들이 이해하기에 쉬운 언어는 대상 지표를 사용하여 일상언어의 관계로 설명되는 3수준이었으며 이것은 언어 이해 수준, 언어 사용 수준과 상관이 없었다.

본 연구는 수학 학습에서 언어의 지적인 기능과 의사소통의 기능이 언어 이해와 언어 사용의 측면에서 작용한다고 보고 중학생들의 수학적 언어의 수준을 조사하였다. 수학적 언어의 수준에 위계가 있다는 결과는 교사들이 수학을 학습 지도하는 상황에서 수학 내용과 관련하여 수학적 언어에 관심을 가져야 할 것을 제안한다. 교과서와 교사가 설명하는 언어 수준이 높으면 언어 수준이 낮은 학생들이 이해하지 못할 것이므로, 학습 지도를 하기 전에 교사는 학생들이 알고 있는 수학적 내용 뿐 아니라 그들의 언어 수준도 파악해야 할 것이다.

학생들이 수학적 언어를 사용하는 것은 문제해결 과정을 쓰고 수학적 내용에 대한 생각과 의견을 피력할 기회가 주어질 때이다. 수학을 학습했다면 자신이 알고 있는 수학에 대해 자유롭게 의사소통할 수 있어야 하며 이는 수학 학습 지도 과정에서도 강조되어야 한다. 학습을 통한 수학적 의사소통 능력은 문어의 쓰기와 읽기 뿐 아니라 말하기와 듣기 등으로 신장될 수 있으며 학생들이 자유롭게 수학적 언어를 사용하고 표현하면서 학습이 이루어질 수 있는 방안이 모색되어야 할 것이다. 본 연구의 언어 사용 검사에서 무응답이 많은 것은 이러한 의사소통의 기회가 학습 과정에서 부족하고 학생들이 자신의 생각을 글로 써서 나타내는 것에 상당한 부담을 갖고 있기 때문으로 볼 수 있다.

또한, 과제 유형에 따라 정답을 한 학생들의 언어 사용 수준이 다른 것은 중학교 학생들에게 상징 언어의 사용이 개념을 설명하는데 필수적인 요건은 아니라는 것을 시사한다. 학생들은 논리적 추론을 설명하기에 알맞은 언어를 선택할 수 있다. 따라서 중학교 수학 학습 지도에서 의사소통은 상징의 사용만을 강조해서

는 안 되며 학생들이 편하게 자신의 생각을 제시할 수 있는 언어를 사용할 수 있도록 권해야 할 것이다.

본 연구에서 언어 이해와 언어 사용 수준은 상관이 없는 것으로 나타났다. 이는 언어의 지적 기능과 의사소통 기능이 독립적일 수 있음을 말해준다. 언어 이해 수준과 언어 사용 수준이 학생들이 이해하기에 쉽다고 여기는 수준과도 상관이 없다는 것은 심리적으로 느끼는 언어의 수준과 실제 언어를 이해하고 사용하는 수준에 괴리가 있음을 보여주는 것이며, 이는 학생들의 수학적 언어 수준을 판단할 때 언어와 관련된 심리적 요인이나 학습 경험 등이 함께 고려되어야 할 것을 시사한다.

중학교 1학년의 기하 내용을 중심으로 실시된 본 연구의 언어 이해 검사와 언어 사용 검사는 주로 수학적 개념을 설명하는 것에 초점을 두었다. 따라서 수학적 문제해결이나 알고리즘에서 이해되고 사용되는 수학적 언어에 대해서 본 연구는 다루지 못하였다. 앞으로 수학적 언어의 수준과 관련한 연구가 더 진행된다면 형식적이고 추상적인 수학을 많이 접하게 된 고등학생들의 언어 수준도 조사하여 중학생과 비교해 볼 수 있을 것이다. 또한 문어뿐 아니라 구어에 대해서도 수학적 언어의 수준을 연구해 볼 수 있을 것이다. 그리고 본 연구는 수학적 언어의 수준을 Freudenthal의 연구에 의지하여 4개의 수준으로 나누었으나 더 세부적인 수준이 존재할 수 있을 것이다. 언어 사용 검사에서 1수준과 4수준의 언어를 함께 사용하는 학생들이 있다는 것은 새로운 언어 수준의 분류 가능성도 시사하는 것이다. 학생들이 문제 해결 과정에서 사용하는 언어를 토대로 새로운 시각으로 언어의 수준을 나누는 시도도 가능할 것이다.

참고문헌

김남희(1997). **변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이희승(1996). **민중 엣센스 국어사전(수정판)**. 민중서림.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구**. 서울대학교 대학원 수학교육과 박사학위논문.

조영미(2001). **학교수학에 제시된 정의에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Eco, U. (2000). **기호: 개념과 역사**. (김광현 역). 서울: 열린 책들. (불어 원본은 1987년 출판).

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: preface to a science of mathematics education*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Goldin, G. A. (1987). Levels of language in mathematical problem solving. In C. Janvier(Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.59-65). Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Leake, S. A. (1996). *Characterizing precalculus students' levels of understanding of functions and their graphs*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas at Austin.

Nellissen, J. M. C. & Tomic, W. (1998). Representations in mathematics education. ED 428950.

Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: language as (slippery) stepping-stones. In H. Steinbring , M. G. B. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp.7-29). Virginia: NCTM.

Sierpinska, A. (1996). *Understanding in mathematics.* London: The Falmer Press.

Torgerson, W. S. (1958). *Theory and methods of scaling.* NY: John Wiley and Sons Inc.

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향**. 안정오, 역). 서울: 인간사랑. (독어 원본은 1996년에 출판).

Vygotsky(1985). **사고와 언어**. (신현정, 역). (영어 원본은 1962년에 출판).

Wertsch, J. V. (1995). **비고츠키-마음의 사회적 형성**. (한양대 사회인지발달연구모임 역). 서울: 정민사. (영어 원본은 1985년에 출판).

Mathematical language levels of middle school students

Kim, Sun Hee (Gwangjang Middle School)
Lee, Chong Hee (Ewha womans university)

This study investigated the understanding level and the using level of mathematical language for middle school students in terms of Freudenthal' language levels. It was proved that the understanding level task developed by current study for geometric concept had reliability and validity, and that there was the hierarchy of levels on which students understanded mathematical language. The level that students used in explaining mathematical concepts was not interrelated to the understanding level, and was different from answering the right answer according to the sorts of tasks. And, the level of mathematical language that was understood easily as students' thought, was the third level of the understanding levels. Mathematics teachers should consider the students' understanding level and using level, and give students the tasks which students could use their mathematical language confidently.

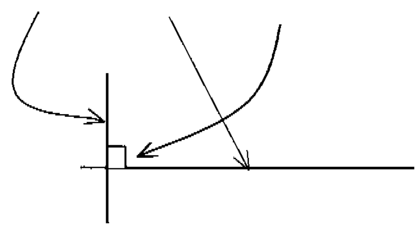
핵심어: mathematical language understanding level(수학적 언어 이해 수준),
mathematical language using level(수학적 언어 사용 수준),
natural language(일상언어), symbol(상징)

〈부 록〉

※ 이 검사는 여러 가지 표현으로 제시된 수학 개념을 여러분이 얼마나 이해하고 있는지 알아보는 것입니다. 문장이 이해되지 않더라도 선생님께 질문할 수 없으며, '이것, 저것'이 사용된 문장에서는 화살표를 잘 따라가서 그 내용이 무엇인지 확인하도록 하세요. 각 문제에 가장 알맞은 답을 고르세요.

1. 어떤 점에서 그 점을 지나지 않는 직선에 수선의 발을 내렸다. 그 점과 수선의 발을 연결한 선분의 길이를 ( )라고 한다.
① 한 점에서 직선까지의 거리
② 수직이등분선의 길이
③ 수선의 길이 ④ 평행선의 길이
⑤ 대칭선의 길이

2. 이 직선과 이 직선이 이렇게 만날 때 두 직선은 ( ).



① 꼬인 위치이다 ② 평행하다
③ 만난다 ④ 수선이다 ⑤ 직교한다

3. 다각형 A와 B가 직선 l을 중심으로 서로 다른 편에 있다. 다각형 A 위의 점 P에서 직선 l에 수선을 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{PH}$의 길이만큼 그 수선을 연장하면 반드시 다각형 B의 점이 된다. 이때, 두 다각형 A와 B는 ( )이라 한다.
① 합동 ② 닮음
③ 같은 거리에 있는 도형
④ 선대칭도형
⑤ 점대칭도형

4. 한 평면에서 직선 l, m이 만나지 않을 때 l, m은 ( ).
① 수선이다 ② 직교한다
③ 평행하다 ④ 대칭이다
⑤ 일치한다

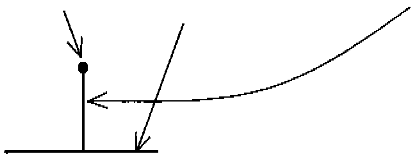
5. $\overline{OP} \perp \overline{RT}$일 때 $\overline{RT}$와 $\overline{OP}$는( ).
① 직각이다 ② 대칭이다
③ 직교한다 ④ 평행이다
⑤ 일치한다

6. 두 밑각의 크기가 같은 삼각형은 ( ) 이다.
① 정삼각형 ② 이등변삼각형
③ 직각삼각형 ④ 등변삼각형
⑤ 예각삼각형

7. $\overline{SJ} // \overline{GD}$일 때, $\overline{SJ}$과 $\overline{GD}$은 ( ).
① 일치한다 ② 수선이다
③ 직교한다 ④ 꼬인 위치이다
⑤ 평행이다

8. 두 도형이 어떤 직선을 기준으로 양쪽에 있다. 한 쪽의 도형 위의 점에서 직선까지 수직으로 간 후 계속 그 거리만큼 가면 다른 쪽 도형 위의 점에 항상 이르게 된다. 이런 관계에 있는 두 도형은 ( ) 이(/한)다.
① 선대칭도형 ② 점대칭도형
③ 일치 ④ 합동
⑤ 닮음

9. 이 점에서 이 직선까지 제일 짧은 이 선분의 길이가 (   )이다



① 수선의 발　② 수선의 길이
③ 한 점에서 직선까지의 거리
④ 수직이등분선의 길이　⑤ 최단거리

10. 한 평면에서 만나지 않는 두 직선은 (　　).
① 일치한다　② 대칭이다　③ 합동이다
④ 평행이다　⑤ 직교한다

11. 점 P에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 점 H 라 한다. $\overline{PH}$의 길이를 (   )라 한다.
① 수선의 길이　② 대칭선의 길이
③ 수직이등분선의 길이
④ 한 점에서 직선까지의 거리
⑤ 수선의 발

12. 이런 두 직선은 (   ).

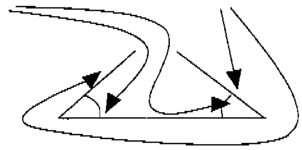
① 일치한다　② 평행이다　③ 안 만난다
④ 같은 거리에 있는 직선이다
⑤ 직교한다

13. $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$의 교각이 직각일 때 $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$은 (　　　).
① 평행한다　② 대칭이다　③ 일치한다
④ 직교한다　⑤ 수선의 발이다

14. △ABC에서 $\angle B$와 $\angle C$의 크기는 같다. △ABC는 (　　)이다.
① 이등변삼각형　② 정삼각형
③ 직각이등변삼각형
④ 예각삼각형　⑤ 둔각삼각형

15. 두 직선이 직각으로 만날 때 두 직선은 (　).
① 직교한다　② 수선이다
③ 평행이다　④ 일치한다
⑤ 대칭이다

16. 이것들이 같을 때, 이 두 선분이 만나도록 연장해서
생긴 삼각형은 (   )　이다.



① 둔각삼각형　② 이등변삼각형
③ 합동인 삼각형　④ 등각삼각형
⑤ 직각삼각형

17. $\overline{DJ}\perp\overline{SE}$이고 점 J는 $\overline{SE}$ 위의 점이다. 이때, $\overline{DJ}$의 길이를 (   )이라 한다.
① 수선의 발　② 수직선의 길이
③ 대칭선의 길이　④ 수선의 길이
⑤ 한 점에서 직선까지의 거리

18. △DFG에서 $\angle F = \angle D$이다. △DFG는 (   )이다.
① 이등변사각형　② 예각삼각형
③ 합동인 삼각형
④ 정삼각형
⑤ 등각삼각형

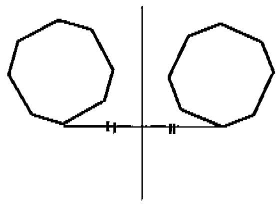
19. PH를 사이에 두고 도형 K와 도형 O가 있다. K 위의 임의의 점 Q와 $\overline{QP}=\overline{EP}$이고 $\overline{EH}=\overline{QH}$인 점 E가 O 위에 존재한다. 이때 K와 O는 (   )이라 한다.

① 점대칭도형 ② 합동인 도형

③ 같은 거리에 있는 도형

④ 선대칭도형 ⑤ 닮음인 도형

20. 아래에서 왼쪽 그림은 가운데 선에서 오른쪽 그림을 보고 마주보고 있다. 왼쪽의 한 점에서 오른쪽으로 선을 이으면 길이가 같다. 이때 두 도형은 (   )이라 한다.



① 합동 ② 닮음 ③ 선대칭도형

④ 길이가 같은 도형 ⑤ 팔각형

※ 다음 질문에 답해 주세요.

♠ 검사지의 문제들 중에서 어떻게 설명된 것이 가장 이해하기 쉬운지 고르세요.

① 화살표가 있고 이것, 저것이라고 되어 있는 것

② 수학 기호는 없고 말로만 된 것

③ 기호가 있기는 하지만 설명은 말로 된 것

④ 기호로만 설명된 것