

변형을 고려한 기어 시스템의 전위 계수 선정

박수진* · 유완석†

(2002년 9월 16일 접수, 2003년 3월 19일 심사완료)

Profile Shift Coefficient of Gear System Considering Teeth Deflection

Su-Jin Park and Wan-Suk Yoo

Key Words: Teeth Deflection(기어치 변형), Deformation Overlap(변형 간섭), Profile Shift Coefficient(전위 계수)

Abstract

A profile shifted gear system was analyzed to select the optimum profile shift coefficient, which minimizes gear teeth deflection. Contact force and deformation overlap were calculated by means of FEM and contact theory. The deformation overlap is suggested for an effective indicator to represent the whole deformation of gear system. The optimum value of profile shift coefficients was presented with respect to the deformation of gear system.

1. 서론

기어는 널리 사용되고 있는 기계 요소로서 기어치를 물리게 하여 동력을 전달하는 간단하면서도 효율적인 전동 장치이다. 함께 사용되는 주변 장치와 기어 자체의 고성능화가 요구됨에 따라 나타나는 문제점으로서 기어치의 탄성 변형이 중요하다.^(1,2)

기어치는 하중을 받아 휨변형을 하게 되므로 특히 이높이와 이두께가 변형에 큰 영향을 미친다. 표준 기어에서 동일하게 설계되어 접촉하게 되는 두 기어치의 이두께는 기어를 전위시킴에 따라 변화하여 변형의 정도가 달라지게 된다. 본 연구에서는 전위 계수 선정의 중요한 고려 사항으로서 기어 시스템의 변형을 최소화하는 문제

를 해석하였다.

Umezawa와 Ishikawa⁽³⁾는 유한한 폭을 가지는 기어치에 대한 휨 변형을 연구하였고, Wallace와 Seireg⁽⁴⁾은 동하중을 받는 기어치의 변형과 파괴를 소개하였다. Sfakiotakis, Vaitis와 Anifantis⁽⁵⁾는 탄성 변형을 고려하여 평가어의 맞물림 거동에 관해 연구하였으며, Gagnon, Gosselin과 Cloutier⁽⁶⁾는 유한대판법(FSM)을 이용하여 기어치의 변형을 해석하였다. 또한 Fukunaga,⁽⁷⁾ Stegемiller,⁽⁸⁾ Yau⁽¹⁾ 등이 기어치의 변형에 대한 연구를 수행하였다.

전위 기어는 표준 기어의 성능 개선을 위해 사용하게 되는데, 본 연구에서의 해석 대상은 중심 거리를 표준 기어의 중심 거리와 같도록 유지하는 전위 기어 시스템이다. 전위 기어는 전위량에 따라 이두께가 변화하게 되고, 변형에 대한 조사는 맞물리게 되는 두 기어 모두를 고려해야 한다. 접촉 해석을 통하여 기어치에 가해지는 하중을 계산하고, 변형 해석을 수행하여 기어치

* 회원, 부산대학교 대학원 기계설계공학과

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계공학부

E-mail : wsyoo@pusan.ac.kr

TEL : (051)510-2328 FAX : (051)512-9835

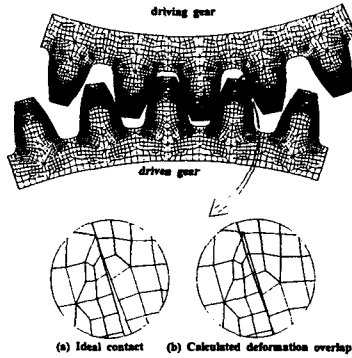


Fig. 1 Deformation overlap at initial contact

의 접촉쌍에서 변형 간섭(deformation overlap)을 산출하였다. 변형 간섭량으로 기어 시스템 전체의 변형을 파악하여 변형의 측면에서 전위 계수 선정의 근거로 활용하였다.

2. 전위와 변형 간섭

중심 거리를 표준 기어의 중심 거리와 같게 두는 전위 기어에서 양(+)의 전위를 준 구동 기어의 이두께는 두꺼워지고 음(-)의 전위를 준 피동 기어의 이두께는 얇아지게 되는데 각각의 이두께는 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽⁹⁾

$$T_1 = \pi m/2 + 2x m \tan \alpha \quad (1)$$

$$T_2 = \pi m/2 + 2(-x) m \tan \alpha \quad (2)$$

여기서 T_1 , T_2 는 각각 구동 기어와 피동 기어의 이두께, m 은 모듈, x 는 전위 계수, α 는 압력각을 나타낸다. 두꺼워진 기어치는 표준 치형보다 변형이 작으나, 두께가 얇아진 기어치는 더 많은 변형을 하게 된다. 따라서 전위 기어 시스템의 변형은 전위 계수에 따라 그 정도가 달라지게 되는데, 본 연구에서는 전위기어 시스템의 변형을 파악하고 전위계수를 선정하는 근거로 변형 간섭을 이용한다.

변형 간섭은 Fig. 1에 나타낸 바와 같이 기어치의 접촉쌍이 접촉을 시작하는 상황에서 정의한다. 기어치는 변형으로 인하여 이상적인 접촉시기 이전에 이미 접촉하게 되므로, 접촉 시작 시각에서 변형 해석을 수행하여 기어치들의 중첩부분을 변형 간섭으로 정의한다. 이상적인 접촉과 계산된 변형 간섭을 각각 Fig. 1(a), (b)에 나

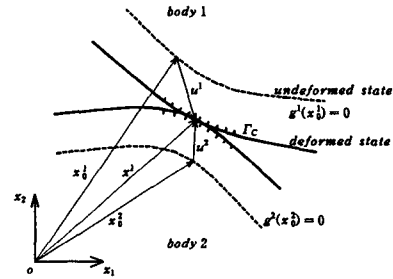


Fig. 2 Contact between two bodies

타내었다.

3. 접촉 문제

변형될 수 있는 두 물체가 경계의 일부에서 접촉되어 있을 때, 탄성 영역에서 접촉 영역의 크기와 접촉 압력의 분포, 물체내의 변위, 응력을 구하는 문제가 접촉 문제이다.⁽¹⁰⁾ 두 물체들을 Fig. 2와 같이 물체 1, 2로 구분하며, 기어 쌍의 접촉 문제에서는 구동 기어를 물체 1, 피동 기어를 물체 2로 한다. 변형 변위 u 와 변형률 ϵ_{ij} 을 미소 변위, 미소 변형률로 가정하고, 응력 σ_{ij} 는 Hooke's law를 적용하면 다음과 같다.

$$u = X - X_0 \quad (3)$$

$$\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (5)$$

여기서, X_0 와 X 는 각각 변형 전후의 위치이고, $u_{i,j}$ 는 u_i 를 공간 좌표계 x_j 로 편미분한 것을 의미하며, σ_{ij} , ϵ_{ij} , C_{ijkl} 은 각각 응력, 변형률, 탄성 계수를 의미한다. 접촉 문제의 평형 방정식은

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (6)$$

이고, 여기서 b_i 는 물체력으로서 평기어 시스템에서는 무시한다.

경계 조건은 변위 경계 조건, 하중 경계 조건과 접촉부의 접촉 경계 조건이 있다. 접촉 경계 조건은 접촉면에서 마찰을 무시하고, 비접촉 접촉인 경우에 접촉 경계 Γ_C 에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S \cdot g^{(k)} = 0, S \geq 0, g^{(k)} \leq 0 \text{ on } \Gamma_C \quad (7)$$

여기서, S 와 $g^{(k)}$ 는 각각 접촉력, 접촉 조건식이며, 상첨자 k 는 물체 번호를 나타낸다. 또한, 변위 경계 조건과 하중 경계 조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_U \quad (8)$$

$$\bar{F}_i = \sigma_{ij} n_j^{(k)} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (9)$$

여기서, Γ_U , Γ_F 는 각각 변위 경계 구간, 하중 경계 구간이고, n 은 외향 단위 법선 벡터이다. 기어 쌍의 접촉 문제를 해석하는 방법으로 유한 요소 해석을 채택하여, 유한 요소 수식으로 접촉 문제의 지배 방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \min J(u^1, u^2) \\ \text{subject to } g^{(2)} \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_C \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 변형에너지 J 와 $g^{(2)}$ 는 각각

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i^1 u_i^1 d\Gamma - \int_{\Gamma_F} \bar{F}_i^2 u_i^2 d\Gamma \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} U^T K^1 U \\ &+ \frac{1}{2} U^T K^2 U - R^1 T U^1 - R^2 T U^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$g^{(2)} = M^1 U^1 + M^2 U^2 - G \leq 0 \quad \text{on } \Gamma_C \quad (13)$$

이다. M 은 접촉 간극의 감소량 계산 행렬, G 는 초기 간극, R 은 절점 하중 벡터이다. 유한 요소 수식으로 표현된 접촉 문제는 접촉 문제의 특성상 비선형 문제이므로 이 문제를 해석하는 방법으로 쌍대 문제(dual problem)를 이용하여 정리하면 다음과 같은 이차 계획법 문제가 된다.

$$\begin{aligned} \max \left[-\frac{1}{2} P^T Q P - R^T P \right] \\ \text{subject to } P \geq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$Q = M^1 (K^1)^{-1} M^1 T + M^2 (K^2)^{-1} M^2 T \quad (15)$$

$$R = G - M^1 (K^1)^{-1} R^1 - M^2 (K^2)^{-1} R^2 \quad (16)$$

본 연구에서는 이차 계획법 문제를 Lemke method⁽¹¹⁾를 이용하여 수치 해석을 수행하였다. 접촉 이론을 실제 문제에 적용하기 위해 FORTRAN을 사용하여 전산 프로그램을 구성하였으며, 흐름도를 Fig. 3에 나타내었다. 기어 치의 접촉 쌍에서 발생하는 접촉 문제를 위와 같은 탄성 접촉 문제로 정의할 수 있으므로, 전위 평가

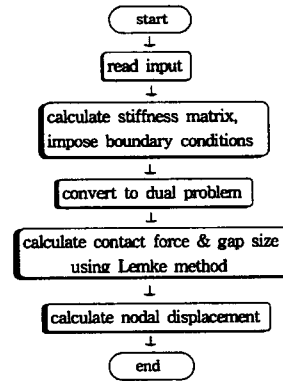


Fig. 3 The flow chart of contact program

어 쌍의 접촉 문제에 적용하고자 한다.

4. 수치 해석

4.1 유한 요소 모형

인벌류트 치형 곡선을 가지는 기어 치를 형상화하기 위해, 기본 제원인 압력각, 모듈, 잇수, 전위 계수가 주어진 경우, 기어의 제원과 인벌류트 함수를 이용하여 인벌류트 치형을 형상화하였으며, 필렛 곡선은 전위된 랙 커터의 치끝의 둥근 부위에 의해 생성되는 궤적을 사용하였다.⁽¹²⁾

첫 번째 예제는 속도비가 0.86인 경우로서 구동 기어의 잇수 42개, 피동 기어의 잇수 49개, 모듈 2.25, 압력각 17.5°이다. 두 번째 예제의 속도비는 0.39로서 잇수의 차이가 비교적 많이 나고 같은 이두께를 가지는 표준 기어의 경우에도 구동 기어의 강도가 피동 기어 보다 약하게 평가되는 경우로서⁽¹²⁾ 구동 기어와 피동 기어의 잇수는 각각 19개, 48개이며 모듈 2.0, 압력각 23.5°이다. 물성치는 영계수 206 GPa, 프와송비 0.3인 등방성 균질 재료이며 기어의 물림을 단위 치폭을 가지는 평면 응력 시스템으로 간주한다. 기어치 5개에 대해서 4절점 사각형 유한 요소를 이용하여 유한 요소 모형을 수행하고 Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6, Fig. 7에 나타내었다. 그림으로 나타낸 전위 기어의 경우 예제 1은 전위 계수 ±0.5, 예제 2는 전위 계수 ±0.56인 경우인데, 구동 기어와 피동 기어 각각에서 전위에 의한 이두께의 증가와 감소를 확인할 수 있다. 예제에 사용된 기어의 주요 제원을 Table 1에 정리하였다.

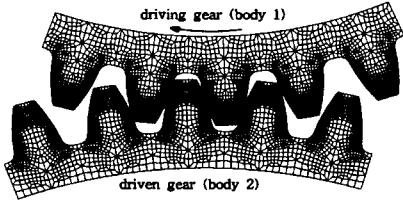


Fig. 4 Finite element model of standard spur gear system for example 1

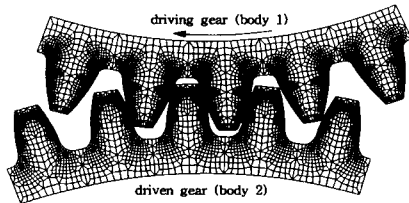


Fig. 5 Finite element model of profile shifted spur gear system for example 1

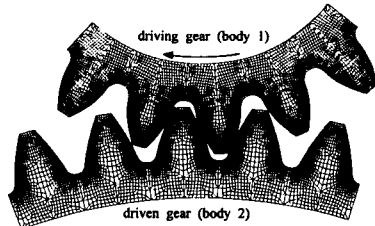


Fig. 6 Finite element model of standard spur gear system for example 2

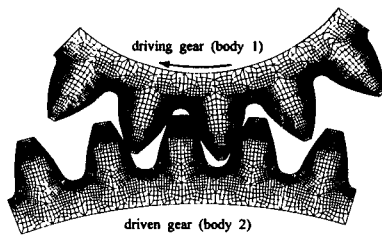


Fig. 7 Finite element model of profile shifted spur gear system for example 2

전달 토크는 $14048 \text{ N}\cdot\text{mm}$ 이고 접촉력을 구하기 위해 피동 기어와 구동 기어의 림에 각각 변위 구속 조건과 강체 변위를 부과하였다. 접촉 예상 구간은 접촉 예상 치면의 모든 절점에 부과하여, 총 120개의 절점에서 접촉 여부를 조사하였다. 유한 요소 모형에 대한 정보와 경계 조건을 Table 2와 Table 3에 정리하였다.

Table 1 Data of gear systems

Example	1		2	
	Driving gear	Driven gear	Driving gear	Driven gear
teeth	42	49	19	48
Pressure angle	17.5 °		23.5 °	
Module	2.25		2.0	
Torque ($\text{N}\cdot\text{mm}$)	14048		14048	
Young's modulus (GPa)	206		206	
Poisson's ratio	0.3		0.3	
Profile shift coefficient	± 0.5		± 0.56	

Table 2 Data of FE model for standard gear system

Example	Gear	Driving gear		Driven gear		
		Node	Element	Node	Element	
Example 1	Node	4666		4697		
	Element	4360		4400		
	B. C.	B. C. on the rim(mm)				
		Radial	0.0		Radial	0.0
Circum-ferential		0.0158		Circum-ferential	0.0	
Example 2	Node	6553		6383		
	Element	6230		6060		
	B. C.	B. C. on the rim(mm)				
		Radial	0.0		Radial	0.0
Circum-ferential		0.0115		Circum-ferential	0.0	

Table 3 Data of FE model for profile shifted gear system

Example	Gear	Driving gear		Driven gear		
		Node	Element	Node	Element	
Example 1	Node	4875		4155		
	Element	4590		3860		
	B. C.	B. C. on the rim(mm)				
		Radial	0.0		Radial	0.0
Circum-ferential		0.0170		Circum-ferential	0.0	
Example 2	Node	6523		5913		
	Element	6230		5600		
	B. C.	B. C. on the rim(mm)				
		Radial	0.0		Radial	0.0
Circum-ferential		0.0119		Circum-ferential	0.0	

4.2 접촉력 계산

접촉 문제와 유한요소법을 이용하여 기어치 접촉쌍의 접촉점에서 접촉력을 계산하였다. 기어치의 접촉쌍이 접촉을 시작하는 변형 간섭 측정

Table 4 Tooth load sharing of standard spur gear system

Example 1	Radial distance (mm)	47.53	47.43	47.34	47.25
	Contact force (N)	4.02	160.88	119.19	28.25
	Torque (N·mm)	14056.75			
Example 2	Radial distance (mm)	54.98	54.89	54.80	54.72
	Contact force (N)	42.58	101.53	121.35	16.38
	Torque (N·mm)	14046.94			

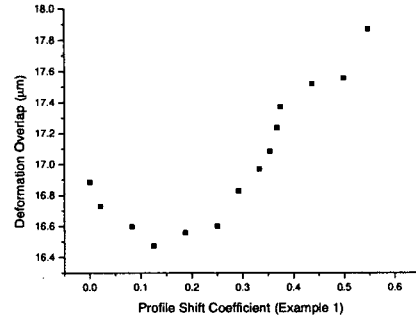
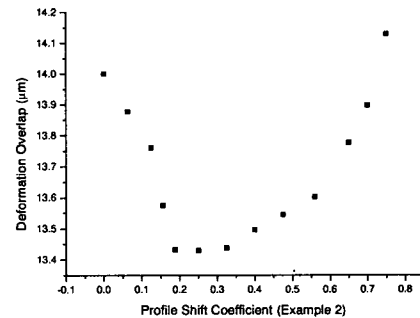
Table 5 Tooth load sharing of profile shifted gear system

Example 1	Radial distance (mm)	48.53	48.41	48.29	48.18
	Contact force (N)	21.78	152.74	114.87	21.97
	Torque (N·mm)	14048.41			
Example 2	Radial distance (mm)	56.07	55.99	55.92	55.85
	Contact force (N)	25.11	89.96	100.45	65.63
	Torque (N·mm)	14043.99			

상황을 만든 후, 전달 토크를 구현하기 위해 구동 기어에 원주 방향의 일정 변위 경계조건을 부과하고 피동 기어에는 고정된 변위 경계조건을 적용하여 전달 하중을 접촉 절점의 절점력으로 구하였다. 일정 변위 경계조건은 전달 토크가 0.1% 허용 오차 범위 내에서 구현되도록 반복 계산하였으며 예제 1은 표준 기어와 전위 기어 각각 0.0158 mm와 0.0170 mm, 예제 2는 0.0115 mm와 0.0119 mm로서 Table 2와 Table 3에 나타낸 바와 같다. 전달하중 계산의 결과로서 구동 기어의 중심에서부터 각 접촉 절점까지의 거리와 접촉력, 접촉력에 의한 전달 토크를 Table 4와 Table 5에 정리하였다.

4.3 변형 간섭 해석

접촉 절점에 대한 접촉력으로 계산된 전달 하중 분배량을 하중 경계 조건으로 하여 기어치의

**Fig. 8** Deformation overlap in example 1**Fig. 9** Deformation overlap in example 2

변형 해석을 수행하였다. 구동 기어와 피동 기어가 각각 변형한 후, 변형된 위치에서 접촉 시작 예정인 기어치들의 중첩량을 이용하여 변형 간섭을 산출하였다. 계산된 변형 간섭은 구동 기어와 피동 기어 모두의 변형이 고려된 양이므로 전체 기어 시스템의 변형의 정도를 파악할 수 있다. 전위 계수가 0.0인 표준 기어에서부터 점차로 전위량을 증가시켰을 때의 변형 간섭을 Fig. 8, Fig. 9에 나타내었다.

4.4 결과 및 고찰

전위량의 증가에 따라 기어치의 변형 간섭량은 변화하게 되는데, 예제 1에서는 Fig. 8과 같이 감소 후 증가하는 결과를 얻었다. 전위 계수 0.125까지의 구간에서는 두께가 두꺼워진 기어치의 감소된 변형이 전체 시스템의 변형에 더 큰 기여를 하여 변형 간섭이 감소하였다. 이후 전위 계수 0.25까지의 구간에서는 변형 간섭이 정체 현상을 보이고 있으므로 이 두께가 증가한 기어치와 감소한 기어치가 전체 변형에 대해 대등한 관계를 가진다고 볼 수 있다. 전위 계수 0.25 이상에서는

변형 간섭이 계속 증가하므로 이두께가 얇아진 기어치가 전체 변형에 더 큰 영향을 미치고 있다. 따라서 변형 간섭이 가장 작게 발생하는 영역은 전위 계수 0.125~0.25 사이의 구간으로 판단된다.

예제 2에서는 Fig. 9와 같이 변형 간섭이 전위 계수 0.156 까지 감소하고, 0.325 까지의 구간에서 정체를 보이다가 그 이상에서 다시 증가하였다. 따라서 기어 시스템의 변형이 최소화되는 전위 계수의 범위는 0.156~0.325 정도이다.

5. 결론

중심 거리가 변화하지 않는 전위 기어 시스템에 대하여 변형을 최소화 할 수 있는 전위 계수를 조사하였다. 맞물려 동력을 전달하는 기어 시스템의 변형은 양쪽 기어치의 변형에 의하여 계산되는 접촉 시작 시점에서의 변형 간섭을 이용하여 판단 할 수 있다. 이를 위해 기어 시스템을 접촉 문제로 해석하여 전달 하중을 구하고, 변형 해석을 수행하여 변형 간섭을 계산하였다.

전위 계수를 점차로 증가시킴에 따라 기어 시스템의 변형에 대한 거동을 확인하고 변형이 최소화되는 전위 계수를 알아 낼 수 있었다. 기어치의 변형 간섭은 기어 전동 장치의 성능 개선을 위한 다른 기법들과 함께 기어 시스템 설계시 고려해야 할 사항으로 판단된다.

후 기

본 연구는 국가지정연구실(부산대학교 기계공학부 CAE연구실, M1-0203-00-0017-02J0000-00910)의 지원으로 이루어졌으므로 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Yau, E., Busby, H. R. and Houser, D. R., 1994, "A Rayleigh-Ritz Approach to Modeling Bending and Shear Deformation of Gear Teeth," *Computer & Structures*, Vol. 50, No. 5, pp. 705~713.
- (2) Kim, H. R. and Ahn, S. J., 1993, "A Study on the Design and Experiment for the Profile of Lower-Noise Gear Tooth," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 17, No. 1, pp. 1~10.
- (3) Umezawa, K. and Ishikawa, J., 1973, "Deflection Due to Contact between Gear Teeth with Finite Width," *Bulletin of the JSME*, Vol. 16, No. 97, pp. 1085~1093.
- (4) Wallace, D. B. and Seireg, A., 1973, "Computer Simulation of Dynamic Stress, Deformation, and Fracture of Gear Teeth," *Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry*, Vol. 95, No. 4, pp. 1108~1114.
- (5) Sfakiotakis, V. G., Vaitsis, J. P. and Anifantis, N. K., 2001, "Numerical Simulation of Conjugate Spur Gear Action," *Computers & Structures*, Vol. 79, No. 12, pp. 1153~1160.
- (6) Gagnon, P., Gosselin, C. and Cloutier, L., 1997, "Analysis of Spur and Straight Bevel Gear Teeth Deflection by the Finite Strip Method," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 119, pp. 421~426.
- (7) Fukunaga, K., 1987, "A Strength Analysis of Spur Gears including Ratio of Contact," *JSME, Transactions Series C*, Vol. 53, No. 489, pp. 1071~1076.
- (8) Stegemiller, M. E., 1993, "A Three-dimensional Analysis of the Base Flexibility of Gear Teeth," *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, pp. 186~192.
- (9) South, D. W. and Mancuso, J. R., 1994, *Mechanical Power Transmission Components*, Marcel Dekker, Inc., pp. 511~531.
- (10) Huh, G. J., 1991, "Constrained Variational Approach for Dynamic Analysis of Elastic Contact Problems," *Finite Element in Analysis and Design*, Vol. 10, pp. 125~136.
- (11) Van de Panne and Whinstone, A., 1964, "The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming," *Operational Research Quarterly*, Vol. 15, No. 4, pp. 355~388.
- (12) Colbourne, J. R., 1987, *The Geometry of Involute Gears*, Springer-Verlag, New-York, pp. 212~218, 162~163.
- (13) Park, C. I. and Lee, J. M., 2002, "Experimental Investigation of the Effect of Load Errors on Helical Gear and Bearing Vibration Transmission Characteristics," *KSME Int'l journal*, Vol. 16, No. 11, pp. 1395~1403.