

Fragmentation 프랙탈을 이용한 입도분포 분석

Fragmentation Fractal Analysis on Particle-size Distribution

민 턱 기^{*1} Min, Tuk-Ki
이 완 진^{*2} Lee, Wan-Jin

Abstract

Particle-size distribution in soils is one of the most fundamental physical properties of soils. One of the latest developments in the study of particle-size distributions has focused on the use of fractal theories. In this study, the fragmentation fractals were used for determining the characteristics of the particle-size distribution curve. It was shown that the mass-size distribution method was more practical than the cumulative number-size distribution method. From the co-relation between fractal dimensions(D_{tot}) and the coefficient of uniformity(C_u), there was a sharp increase in fractal dimensions for $C_u < 4$, but fractal dimension converged the single value for $C_u \geq 6$. Fractal dimensions were affected by small sized particles for $C_c \geq 3$ and large sized particles for $C_c < 3$. As a result of the analysis of the influence of the effective size(D_{10}), it was observed that the changes of D_{tot} were nominal beyond the effective size.

요 지

흙을 나타내는 가장 기본적인 물리적 성질중의 하나가 흙을 구성하는 입자들의 입도분포이며, 입도분포특성을 분석하기 위해 최근에 대두되고 있는 방법중의 하나가 프랙탈 이론이다. 본 연구에서는 fragmentation 프랙탈을 이용하여 흙의 입도분포곡선의 특성을 파악하였다. Fragmentation 프랙탈을 표현하는 방법에는 ‘개수-입경’ 프랙탈과 ‘중량-입경’ 프랙탈이 있으며, 본 연구 결과, ‘중량-입경’ 방법이 더 실용적이었다. 균등계수(C_u)가 4이하에서는 균등계수가 증가함에 따라 프랙탈차원(D_{tot})이 급격히 증가하였으나, 균등계수가 6이상에서는 일정한 값에 수렴되는 결과를 나타냈다. 곡률계수(C_c)가 3이상에서는 프랙탈차원은 크기가 작은 입자들의 영향을 받고, 곡률계수가 3이하에서는 큰 입자의 영향을 받는 것으로 나타났다. 유효입경(D_{10})의 크기에 따른 프랙탈차원의 변화를 분석한 결과, 균등계수와 곡률계수가 같을 경우 프랙탈차원은 유효입경의 크기에 영향을 거의 받지 않는 것으로 나타났다. 전체 입자의 크기분포를 고려할 수 있는 프랙탈 개념을 입도분석에 적용하는 것이 바람직할 것으로 판단되며, 향후 프랙탈차원과 흙의 공학적 특성과의 관계정립에 대한 지속적인 연구가 필요하다.

Keywords : Cumulative number-size distribution, Fragmentation fractal, Mass-size distribution, Particle-size distribution

1. 서 론

흙은 3상(토립자, 공기, 물)으로 구성되어 있기 때문에 금속이나 콘크리트 등에 비해 현저하게 비균질 비동방 성질을 가지고 있다. 또한, 전체적으로 같은 지반이

라 하더라도 국부적 위치에 따라 공학적 특성이 다르게 나타난다. 따라서, 원자반에서의 공학적 특성 파악이 매우 중요하며, 이를 위해 현장시험이나 비교란시료를 이용한 실내시험을 수행하고 있다.

흙의 공학적 특성은 흙의 생성조건, 흙입자 자체의

*1 정회원, 울산대학교 공과대학 건설환경공학부 교수 (Member, Prof., Dept. of Civil and Environmental Engrg., Univ. of Ulsan, tkmin@mail.ulsan.ac.kr)

*2 정회원, 울산대학교 대학원 건설환경공학부 박사과정, 기술사 (Member, Ph. D. Candidate, Dept. of Civil and Environmental Engrg., Univ. of Ulsan, P.E.)

특성이나 거칠기 등과 관련되어 있다고 생각하고 있으며, 이들의 특성에 대해서 많은 연구결과가 있으나, 흙의 입도분포와 관련된 연구는 거의 수행되지 못하였다.

대부분의 시험에서는 흙의 입도분포특성에 대해서 고려하지 않고 있으나, 흙의 입도분포특성이 다짐정도(공극의 밀실여부)에 영향을 미치므로, 다짐시공시에는 입도분포가 양호한 흙을 사용하도록 규정하고 있으며, 입도분포의 양부는 C_u (균등계수)와 C_c (곡률계수)를 이용하여 판단한다. C_u 는 4(자갈질 흙) 또는 6(모래질 흙) 이상의 값을 가지면서 C_c 는 1과 3사이의 값을 가지면 양질의 흙으로 분류되고, 실제 이 조건을 만족할 경우에는 다짐시공이 잘되는 경험을 해왔었다.

그러나, C_u 와 C_c 를 산정할 때에는 D_{10} (유효입경), D_{30} 및 D_{60} 등 3가지의 입자 크기만을 가지고 판별하기 때문에 그 외의 입자크기나 입자들의 분포상태를 고려하지 못하고 있다.

따라서, 본 논문에서는 흙을 구성하는 입자들의 크기 분포를 표현할 수 있는 프랙탈차원(fractal dimension)을 이용하여 입도분포곡선에 대해 분석하였다.

2. 프랙탈이론

2.1 프랙탈 연구동향

프랙탈이론을 지반공학분야에 적용한 연구들의 대부분이 흙의 공학적 특성을 프랙탈차원과 연관시켜 나타내었는데, 흙의 미세구조 분석(Moore와 Dnaldson, 1995), 압밀특성 분석(Vallejo, 1995), 모래의 내부마찰각 특성 분석(Gori와 Mari, 2001), 투수특성 분석(Gimenez 등, 1997), 시료의 크기와 점착력과의 관계(Bonala와 Reddi, 1999), 지오텍스타일과 흙의 마찰특성(Vallejo와 Zhou, 1995) 등이 있다. 그러나, 이들 연구에서 적용한 프랙탈 차원은 입자의 모양(형태, 거칠기)이나 공극의 크기와 관련된 것으로써, 입자들의 크기분포는 고려하지 않았다.

흙 입자의 분포특성 분석에 대한 연구는 최근에 활발해지기 시작했는데, 흙을 fragmentation 프랙탈물체로 간주하여 흙 입자 크기의 분포특성과 프랙탈차원과의 관계에 대한 내용이 주류를 차지하고 있다. 연구자들은 Tyler, S. W.(1992), Crawford, J. W.(1993), Perfect, E.(1995, 1997, 2002), Gimenez, D.(1997, 2002), Hyslip, J. P.(1997), Bittelli, M.(1999), Vaz, Carlos M. P.(2002), Xiao, Y. X.(2002), Zhang, L. M.(2002) 등이 있다. 그러

나, 이들 대부분은 지질학, 농학, 미세분자학(powder technology) 등의 분야로써, 지반공학적인 접근에는 한계가 있었다.

2.2 프랙탈차원 산출 이론

유클리드 기하학에서는 해안선이나 구름과 같은 복잡한 형상에 대해서는 해석이 불가능하였는데, 복잡한 형상에 대한 해석이 가능한 새로운 ‘차원’의 개념이 도입되었으며, 이러한 차원을 해석할 수 있는 것이 프랙탈이론이고, 이 차원을 ‘프랙탈차원(fractal dimension)’이라 한다.

다음의 식 (1)은 프랙탈 물체의 성질을 표현하는 기본 개념으로써, 지수함수로 구성된다.

$$N(L) \propto L^{-D} \quad (1)$$

여기서, $N(L)$: 크기가 ‘ L ’인 요소의 개수,
 D : 프랙탈차원.

가장 간단한 프랙탈모델은 생성자(generator) 또는 초기자(initiator)에 의한 반복으로 생성되는 자기유사성프랙탈(self-similar fractals)이다. 생성자 패턴은 n 회 반복되고, 초기자를 증가시키거나 감소시키는 결과를 가져온다. 반복의 마지막 단계에서 프랙탈물체의 크기 L 은 ‘ $L=1/b^i$ ’이고, 여기서, b 는 비례계수(a scaling factor), $i=1,2,3,\dots,n$ 이며, 프랙탈차원은 다음과 같이 나타낸다 (Gimenez 등, 1997).

$$D = \frac{\log \left(\frac{N(1/b^{i+1})}{N(1/b^i)} \right)}{\log(b)} \quad (2)$$

그림 1(a)는 Cantor dust로써 초기 실선의 길이는 $\frac{1}{3}$ 로 축소($b=3$)되고 실선은 3개에서 2개(생성자)로 감소한다. 그림 1(b)는 Koch curve로써, 초기 실선의 길이는 $\frac{1}{3}$ 로 축소($b=3$)되고 실선은 3개에서 4개로 증가한다. 그림 1(c)는 Sierpinski carpet으로써, 초기 사각형의 크기는 $1/9 (= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3})$ 로 축소($b=3$)되고 사각형은 9개에서 8개로 줄어든다. 그림 1(d)의 Menger sponge는 초기 정육면체의 크기는 $1/27 (= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3})$ 로 축소($b=3$)되고 정육면체는 27개에서 20개로 줄어든다. 이 프랙탈형상들의 프랙탈차원은 다음의 표 1과 같이 산출된다.

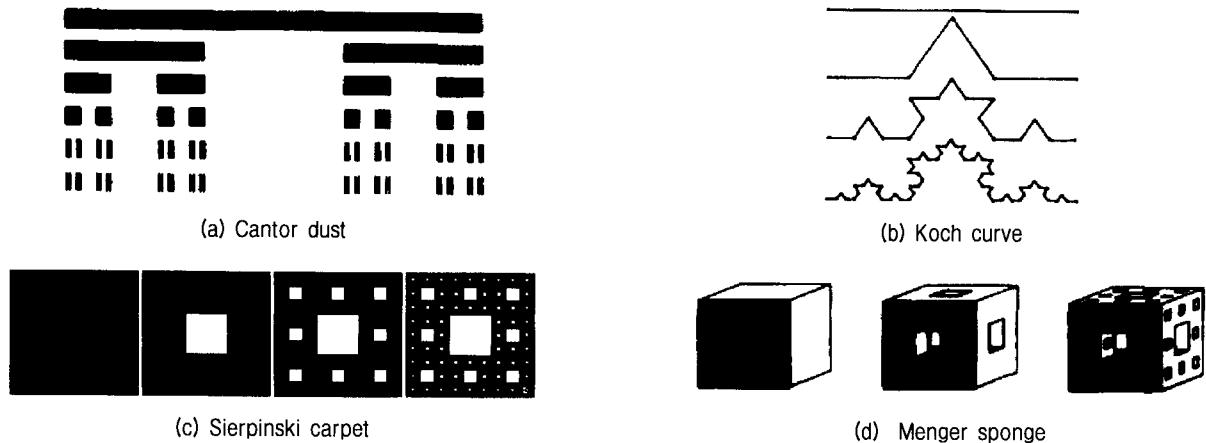


그림 1. 프랙탈 물체

표 1. 프랙탈차원 산정

구 분	$\frac{N(1/b^{i+1})}{N(1/b^i)}$ (생성자)	b (비례계수)	D (프랙탈차원)
Cantor dust	2	3	0.63
Koch curve	4	3	1.26
Sierpinski carpet	8	3	1.89
Menger sponge	20	3	2.73

2.3 Fragmentation 프랙탈

Fragmentation이란 여러 개의 조각들로 구성된 집합체를 의미하며, 섬들의 집합, 여러 광물입자들로 구성된 흙 등이 fragmentation 프랙탈물체(현상)이다. 1940년경 J. Korcak은 섬들을 면적별로 구분하는 것에 대해 연구하던 중 다음과 같은 관계를 도출하였다(Hyslip과 Vallejo, 1997).

$$N(A>a) \approx a^b \quad (3)$$

여기서, $N(A>a)$: 면적 a 보다 큰 면적(A)을 가진 섬들의 개수

$$b = \frac{1}{2} (\text{for all islands}).$$

상기 식 (3)을 흙 입자의 크기(입경)에 적용시키면 다음의 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다(Tyler와 Wheatcraft, 1992).

$$N(R \geq r) \propto r^{-D_F} \quad (4)$$

여기서, $N(R>r)$: 입경 ' r ' 보다 큰 입자들의 총 개수

$$D_F : \text{입도 분포에 대한 프랙탈차원}$$

식 (4)의 관계는 그림 2와 식 (5)처럼 표현되며, 입도 분포곡선에 대한 fragmentation 프랙탈차원(D_F)은 식 (6)으로 산출된다(Tyler와 Wheatcraft, 1992; Bittelli 등, 1999).

$$N(R>r) = k r^n \quad (5)$$

$$\therefore D_F = n \quad (6)$$

여기서, k : 비례상수
 n : 기울기.

그림 2와 식 (4)~식 (6)의 관계에 의한 프랙탈차원 산정방법은 입자의 개수를 근거로 하기 때문에 'cumulative number-size distribution' (이하, '개수-입경') 방법이라 한다.

흙에 대한 입도분석은 'mass(통과중량)'가 기준이 된다. 따라서, 입도분포를 mass로 표현할 경우, 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$M(r) / M \propto r^n \quad (7)$$

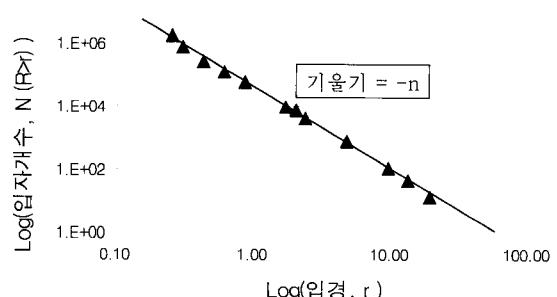


그림 2. $\log(N(R>r))$ - $\log(r)$ 의 관계

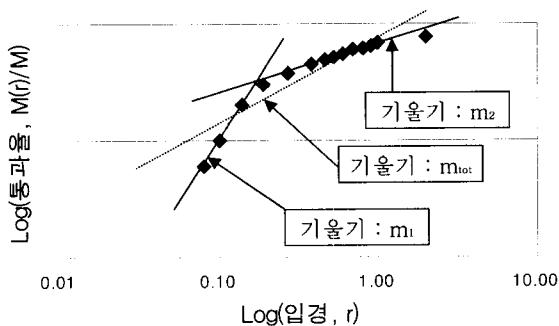


그림 3. 입도분석시험을 통한 프랙탈차원 산정
($D_1 = 3-m_1$, $D_2 = 3-m_2$, $D_{tot} = 3-m_{tot}$)

여기서, M : 입자들의 총 중량

$M(r)$: 입경이 r 보다 큰 입자의 중량

m : $\log(M(r)/M) - \log(r)$ 의 기울기

N (number)과 M (mass)은 식 (8)과 같은 관계가 있으므로, 식 (9)와 같은 관계가 성립되며, 식 (10)의 D_F 가 mass로 표현된 입도분포곡선의 프랙탈차원이다(Bittelli 등, 1999; Zhang, 2002).

$$dM \propto r^3 dN \quad (8)$$

$$r^m \propto r^{3-D_F} \quad (9)$$

$$\therefore D_F = 3 - m \quad (10)$$

그림 3과 식 (7) ~ 식 (10)의 관계에 의한 프랙탈차원 산정방법은 입자의 중량을 근거로 하기 때문에 ‘mass-size distribution’(이하, ‘중량-입경’)방법이라 한다.

프랙탈차원 산정시, 그림 3에서 보이는 바와 같이 bilinear 형태로 나타날 수 있다. 상기 그림에서 D_1 , D_2 및 D_{tot} 은 프랙탈차원을 나타내며, D_1 은 크기가 작은 입자들의 분포특성을, D_2 는 크기가 큰 입자의 분포특성을, 그리고 D_{tot} 은 전체입자들의 분포특성을 나타낸다. 기울기가 작을수록, 프랙탈차원은 큰 값을 산출하게 되며, 프랙탈차원이 크다는 것은 입도분포가 양호하다는 것을 의미한다(Erzan과 Gungor, 1995; Gori와 Mari, 2001; Xiao 등, 2002). 본 연구에서도 그림 3과 같은 경향을 보인 경우에는 프랙탈 차원을 D_1 , D_2 및 D_{tot} 로 구별하여 나타내었으며, 그렇지 않은 경우에는 D_{tot} 에 대해서만 나타내었다.

3. 흙의 분류와 프랙탈차원

Turcotte는 흙에 대한 fragmentation 프랙탈차원이 ‘ $D_F = 0 \sim 3$ ’의 값을 가진다고 하였으며, Crawford는 ‘ $D_F > 3$ ’ 일 경우 직선적 관계가 성립되지 않는다고 하였다(Gimenez 등, 1997). 흙은 알갱이(입자)들로 구성되어 있기 때문에 그 내부에는 공간이 있고 전체적으로는 3차원의 입방체를 형성한다. 따라서, 흙에 대한 프랙탈차원은 ‘ $0 < D_F < 3$ ’의 값을 가지게 된다(Crawford 등, 1993; Kozak 등, 1996; Tyler와 Wheatcraft, 1992).

본 연구에서는 fragmentation 프랙탈을 입도분포곡선의 분석에 적용하기 위해, 자갈질흙에 대해 입도분석을 수행하여 fragmentation 프랙탈을 표현하는 ‘중량-입경’ 방법과 ‘개수-입경’ 방법에 대해서 비교 분석하였다.

이 결과를 토대로, 임의의 C_u 와 C_c 값을 가지는 여러 개의 입도분포곡선을 작성하여, 프랙탈차원과 C_u 및 C_c 와의 관계를 분석하였다.

3.1 중량과 개수와의 비교

본 연구에서 사용한 자갈질흙에 대한 입도분석시험 결과를 표 2와 그림 4에 나타내었다.

그림 5는 ‘중량-입경’ 방법으로 수행한 시료 GW의 프랙탈분석 결과를 보여주고 있는데, 입자의 크기가 작은 입자와 큰입자의 구분이 뚜렷하여, 프랙탈차원은 D_1 , D_2 및 D_{tot} 로 구분하였다. 시료 GP의 경우에는 D_{tot} 에 대해서만 산정하였다. 그림에서 프랙탈차원은 ‘ $D_F=3-m$ ’이며, m 은 ‘ $\log(\text{중량통과율})-\log(\text{입경})$ ’의 기울기이다.

그림 6은 ‘개수-입경’ 방법으로 수행한 시료 GP의 프랙탈분석 결과를 보여주고 있는데, 그림에서 프랙탈차

표 2. 시험 대상 시료의 구분

구분	D_{10}	D_{30}	D_{60}	C_u	C_c
GW	0.75mm	2.4mm	7mm	9.4	1.1
GP	7mm	11mm	16mm	2.3	1.1

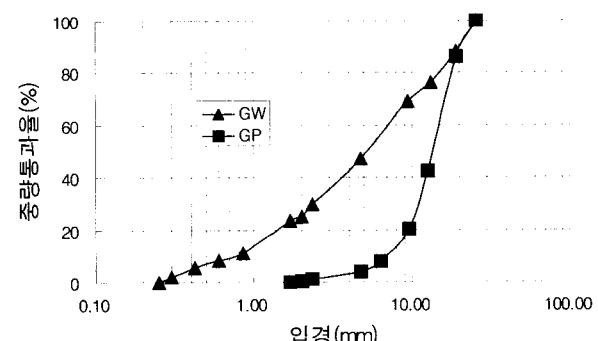


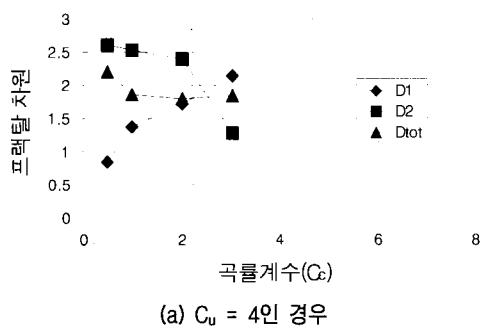
그림 4. 입도분석시험 결과

법보다는, 실제 입도분석시험에서 사용되고 있는 ‘중량-입경’ 방법이 더 간편하고 실용적이라고 판단된다.

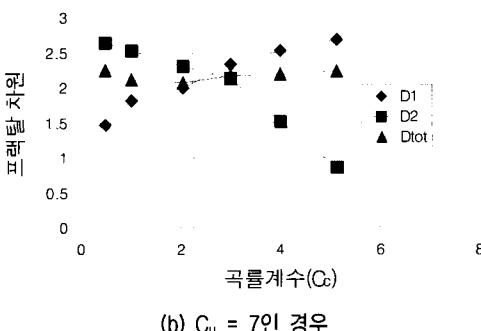
3.2 입도분포와 프랙탈차원

입도분포특성과 프랙탈차원과의 관계를 분석하기 위해, $C_u = 2 \sim 12$, $C_c = 0.5 \sim 6$ 에 해당하는 입도분포곡선을 작성한 후, ‘중량-입경’ 방법을 이용하여 프랙탈차원을 산정하였다.

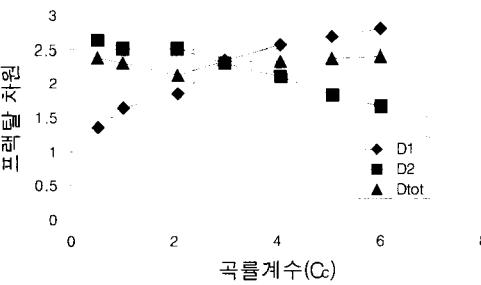
다음에 나타낸 그림 8은 C_u 가 일정할 경우 C_c 의 값에 따른 프랙탈차원의 변화를 나타낸 것으로써, C_c 가 증가할수록 D_1 은 증가하였고 D_2 는 감소하였다. C_u 값에 관계없이, ‘ $C_c=3$ ’ 부근에서 D_1 과 D_2 의 크기가 바뀌는 결과를 나타내고 있다. D_{tot} 은 C_c 의 영향을 크게 받지 않고 있으나, ‘ $C_c>3$ ’에서 D_1 의 영향을 받고, ‘ $C_c\leq 3$ ’에서 D_2 의 영향을 받는 경향을 보이고 있다. ‘ $C_c=0.5$ ’에서



(a) $C_u = 4$ 인 경우

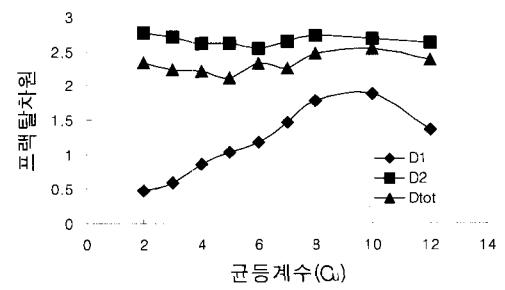


(b) $C_u = 7$ 인 경우

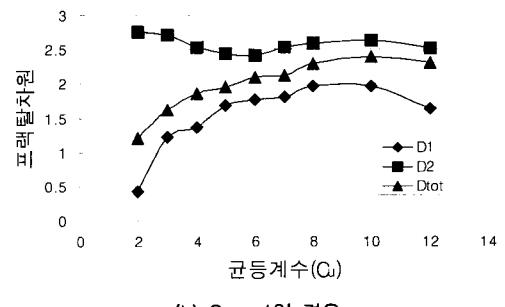


(c) $C_u = 12$ 인 경우

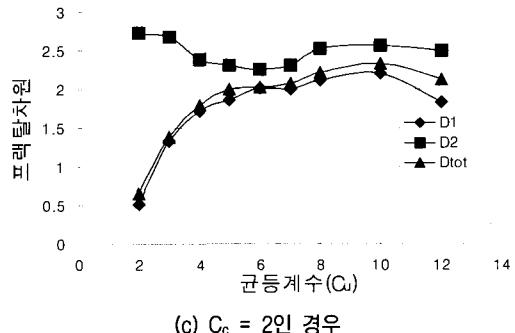
그림 8. C_c 에 따른 프랙탈차원 변화



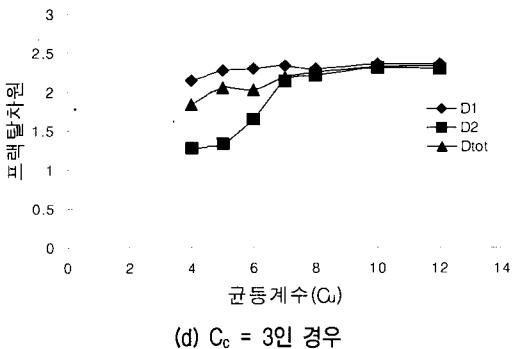
(a) $C_c = 0.5$ 인 경우



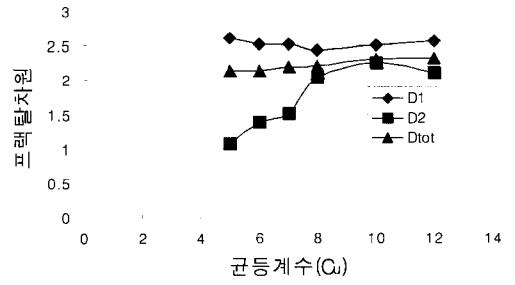
(b) $C_c = 1$ 인 경우



(c) $C_c = 2$ 인 경우



(d) $C_c = 3$ 인 경우



(e) $C_c = 4$ 인 경우

그림 9. C_u 에 따른 프랙탈차원 변화

참 고 문 헌

1. Bittelli, M., Campbell, G. S. and Flury, M.(1999), "Characterization of particle-size distribution in soils with a fragmentation model", *Soil Sci. Soc. AM. J.*, Vol.63, pp.782-788.
2. Bonala, Mohan V.S. and Reddi, Lakshmi N.(1999), "Fractal representation of soil cohesion", ASCE, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, October, pp.901-904.
3. Crawford J. W., Sleeman B. D. and Young I. M.(1993), "On the relation between number-size distributions and the fractal dimension of aggregates", *Journal of Soil Science UK.*, Vol.44, pp.555-565.
4. Erzan, A. and Gungor, N.(1995), "Fractal geometry and size distribution of clay particles", *Journal of Colloid and Interface Sci.*, Vol.176, pp.301-307.
5. Gimenez, D., Perfect, E., Rawls W. J. and Pachepsky Ya A.(1997), "Fractal models for predicting soil hydraulic properties : a review", *Elsevier, Eng. Geology*, Vol.48, pp.161-183.
6. Gimenez, D., Karmen J. L., Posadas A. and Shaw R. K.(2002), "Fractal dimensions of mass estimated from intact and eroded soil aggregates", *Elsevier, Soil & Tillage Res.*, Vol.64, pp.165-172.
7. Gori, U. and Mari M.(2001), "The correlation between the fractal dimension and internal friction angle of different granular materials", *Japanese Geotechnical Society, Soil and Foundations*, Vol.41, No.6, pp.17-23.
8. Hyslip, James P. and Vallejo, L.E.(1997), "Fractal analysis of the roughness and size ditribution of granular materials", *Elsevier, Eng. Geology*, Vol.48, pp.231-244.
9. Kozak, E., Pachepsky, Ya A., Sokolowski, S., Sokolowska, Z. and Stepniewski, W.(1996), "A modified number-based method for estimating fragmentation fractal dimensions of soils", *Soil Sci. Soc. AM. J.*, Vol.60, pp.1291-1297.
10. Moore, C. A. and Donaldson, C.F.(1995), "Quantifying soil micro-structure using fractals", *Geotechnique*, Vol.45, No.1, pp.105-116.
11. Perfect, E. and Kay, B. D.(1995), "Applications of fractals in soil and tillage research : a review", Elsevier, *Soil & Tillage Res.*, Vol.36, pp.1-20.
12. Perfect, E.(1997), "Fractal models for the fragmentation of rocks and soils : a review", *Elsevier, Eng. Geology*, Vol.48, pp.185-198.
13. Perfect, E., Diaz-Zorita, M. and Grove, J. H.(2002), "A prefractal model for predicting soil fragment mass-size distributions", *Elsevier, Soil & Tillage Res.*, Vol.64, pp.79-90.
14. Tyler S. W. and Wheatcraft S. W.(1992), "Fractal scaling of soil particle-size distributions : Analysis and Limitations", *Soil Sci. Soc. AM. J.*, Vol.56, pp.362-369.
15. Vallejo, L. E. and Zhou, Yun(1995), "Fractal approach to measuring roughness of geomembranes", ASCE, *Journal of Geotechnical Engineering*, May, pp.442-446.
16. Vallejo, L.E.(1996), "Fractal analysis of the fabric changes in a consolidating clay", *Elsevier, Eng. Geology*, Vol.43, pp.281-290.
17. Vaz, Carlos M. P., Herman, Paulo S.P. and Crestana, S.(2002), "Thickness and size distribution of clay-sized soil particles measured through atomic force microscopy", *Elsevier, Powder Technology*, Vol.126, pp.51-58.
18. Xiao, Y. X., Lee, C.F. and Wang, S.J.(2002), "Particle-size distribution of interlayer shear zone material and its implications in geological processes - a case study in China", *Elsevier, Eng. Geology*, Vol.66, pp.221-232.
19. Zhang, Li-Ming(2002), "Fractal characteristic of granularity distributions of aqueous bentonite and bentonite-polymer muds", *Elsevier, Colloids and Surfaces A*, Vol.202, pp.1-7.

(접수일자 2003. 1. 29, 심사완료일 2003. 3. 26)