

압축성 유체의 급속 가열에 기인한 압력파의 생성 및 전달특성에 관한 연구

황인주 · 김윤제*

한국건설기술연구원 건축설비 및 플랜트그룹, *성균관대학교 기계공학부

A Study on the Generation and Transmission of a Pressure Wave Induced by Rapid Heating of Compressible Fluid

In-Ju Hwang and Youn J. Kim*

Building Facility & Plant Group, Korea Institute of Construction Technology

*School of Mechanical Engineering, Sungkyunkwan University

요 약

압력파의 일종인 열음향파는 압축성유체를 급속히 가열 또는 냉각하는 경계면 근처에서 유체가 순간적으로 압축 및 팽창하는 경우에 발생하는 현상으로 자연대류가 일어나지 않는 우주공간에서는 매우 중요한 열전달 메커니즘이다. 본 연구에서는 공기로 채워진 공간에서 급속한 가열에 의하여 발생한 열음향파의 전달특성을 수치적인 방법에 의하여 평가하고자 유한체적법을 기반으로 비정상 지배방정식을 이산화하였으며, PISO 알고리즘과 2계 상향기법을 적용하여 해석을 수행하였다. 안정적인 수치해는 50×800 개의 셀과 1×10^{-9} 시간간격을 적용하여 얻을 수 있었으며, 생성된 열음향파는 유체 속을 통과하면서 점성과 열소산에 의하여 점점 감소하여 가는 경향을 보였다. 생성된 압력파는 날카로운 전단파 점점 감소하여 길게 늘어지는 후단부를 갖는 형상을 보였다.

Abstract — Thermo-acoustic waves can be generated in a compressible fluid by rapid heating and cooling near the boundary walls. These phenomena are very important mechanism of heat transfer in the space environment in which natural convection does not exist. In this study, the generation and transmission characteristics of thermo-acoustic waves in an air filled enclosure with rapid wall heating are studied numerically. The governing equations were discretized using control volume method, and were solved using PISO algorithm and second-order upwind scheme. For the stable solution time step were considered as $t=1 \times 10^{-9}$ order, and grids are 50×800 . The induced thermo-acoustic wave propagates through the fluid until it decays due to viscous and heat dissipation. The wave showed sharp front shape and decreased with long tail.

1. 서 론

경계면에 놓여진 압축성 유체(compressible fluid)를 급속히 가열 또는 냉각하거나 열을 수반하는 급격한 화학반응(chemical reaction)이 일어나는 혼합과정 중의 경계면 근처에서는 유체가 순간적으로 급격히 팽창하는 경우가 발생하게 되는데, 이렇게 열적인 요인에 의하여 유발되는 압축성 유체의 팽창은 주변유체의 진동을 수반하면서 압력파(pressure wave)를 생성시킨다. 이러한 압력파를 열음향파(thermo-acoustic wave)라고 하며, 압축성 유체의 경계에서 발생하는 열전달에 관계하는 현상

을 설명하는 용어로 열음향 대류(thermo-acoustic convection)라는 표현을 사용하기도 한다^{[1][6]}.

열음향 현상(thermo-acoustic phenomena)에 대한 연구는 비교적 오랜 역사를 가지고 있으나 초기에는 주로 현상에 대한 관찰과 이해를 목적으로 파동현상 측면에서 연구가 수행되었으며, 특히 Trilling^[7]과 Rayleigh 등^[8]이 선형적인 해석 연구를 수행하여 반무한(semi-infinite) 매질에서 Laplace 변환기법을 사용하여 열적으로 야기된 압력파에 대한 점근적인 표현을 얻은 바 있다. 보다 일반적인 해를 얻기 위하여 Huang과 Bau^[1]는 수치적으로 역변환된 Laplace 변환기법을 사용하여 반무한 및 제한

된 공간내 매체에서 1차원적인 열음향파의 생성 및 전달에 관한 해석연구 및 실험적인 관찰을 통하여 열전달 과정에 미치는 열음향파의 기여도를 평가하였다. 또한 Fusegi 등^[2]과 Farouk 등^[3]은 효과적인 열 제거메커니즘으로 열음향파를 이용하기 위한 연구로 질소가 채워진 2차원 미소공간을 대상으로 열음향파의 거동에 관한 연구를 수행하였으며, 압력파의 생성과 전달현상을 비교적 정확하게 모사하였다.

Vasilyev와 Paolucci^[5]는 제한된 공간 내에서 차분방정식의 해를 구하기 위한 방법으로 국소해의 요구조건에 따라 계산 정도를 선택적으로 적용할 수 있는 알고리즘인 “dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method”를 개발하였다. 이는 주로 날카로운 구배를 가지고 천이기가 일어나는 영역에서만 많은 격자와 매우 높은 정확도를 갖도록 계산하는 방법으로 일반적인 경계조건을 다루는 기법이다. 그들은 이러한 방법을 점성이 낮고 위치가 변동하는 충격파, 그리고 비점성 열음향파와 같은 문제를 수반하는 1차원적인 Burgers 방정식에 적용하였으며, 비선형성과 일반적인 경계조건을 다루는데 있어 매우 정확한 결과를 효과적으로 얻을 수 있었다.

이와 같이 열적으로 기인한 열음향 현상에 대한 연구는 20세기 말에 이르러 다소 체계적인 연구가 제한적인 조건에 대하여 수행되어 왔으나 보다 광범위한 변수의 적용에 따른 수치해석 및 정교한 실험과 가시화 등에 관한 연구는 매우 취약한 것으로 평가되고 있다. 특히 열적으로 기인한 열음향파에 대한 실험적 연구는 일부 연구자에 의하여 수행되었다. 이러한 열음향파의 영향은 표준조건에서는 매우 미미하나 유체가 열역학적인 임계점(critical point)에 근접하거나 대류 열전달이 미약할 경우 등에는 중요한 열전달 인자로 작용한다.

최근에는 열전달 현상에 대한 열음향파의 역할과 열시스템의 안정성 향상 등을 위한 수단으로 관심을 끌고 있으며, 선진국에서는 열펌프 및 태양에너지를 열원으로 하는 열음향 스텔링 엔진(thermo-acoustic stirling engine) 등의 효율 향상을 위한 연구가 진행되고 있다.

본 연구에서는 제한된 공간 내 압축성 유체의 급속 가열에 기인한 열음향파의 생성 및 전달특성에 관한 수치해석적인 연구로서 선행연구 및 수치해석기법의 분석을 통하여 도입한 이론 및 해석기법 등에 대한 적용성과 확장성을 평가하였다. 이를 위하여 먼저 일반적으로 적용되는 SIMPLE(semi-implicit method for pressure linked equation)^[13] 및 PISO(pressure-implicit with splitting of operators)^[14]의 적용성을 비교하였으며, 그 타당성을 선행연구자의 결과와 비교하였다. 이러한 연구는 향후 수행될 계측 및 가시화 실험을 통하여 결과의 비교 및 분석을 위한 선행연구의 일부로 수행하였다.

2. 수치해석 이론 및 방법

2-1. 해석 이론 및 경계조건

본 연구에서 도입한 대상모델은 Fig. 1과 같이 형상비(L/H)가 1이고 내부에 압축성 유체가 채워진 정육면체의 형상을 가지며, 2차원 공간으로 가정하였다. 해석 대상의 좌측 수직벽면을 제외한 모든 외부 벽은 단열된 것으로 가정하였다. 이때 내부공간의 유체는 공기를 대상으로 하였다. 해석대상에 대한 수치해를 얻기 위하여 제한체적에 대한 보존법칙을 적용하여 비정상 Navier-Stokes 방정식을 근간으로 하는 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식, 이상기체상태방정식 등과 같은 지배방정식을 도입하였다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{3}{4\gamma\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (2-1)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{3}{4\gamma\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{(\gamma-1)p}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{3k}{4p\gamma\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$p = \rho RT \quad (4)$$

여기서 τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{yy} 는 다음과 같다.

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (5)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

또한 k는 열전도도(W/m·K), p는 압력(Pa), q는 열속(W/m²), R은 기체상수(J/kg·K), T는 온도(K), t는 시간(sec), u와 v는 속도(m/sec), μ 는 점성계수(kg/m·sec),

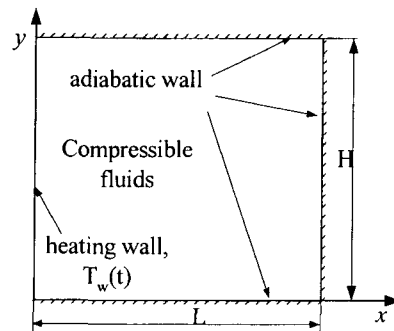


Fig. 1. Geometry of boundary conditions.

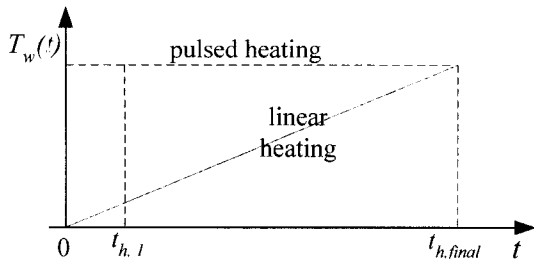


Fig. 2. Various boundary conditions of heating wall with time.

γ 는 비열비(C_p/C_v)를 각각 나타낸다.

제한 공간내 초기의 압축성 유체는 준정적($u=v=0$)이고 주위의 압력과 제한공간내 초기압력 $p_0=1 \text{ atm}$, 초기에는 균일온도 $T_0=300 \text{ K}$ 의 조건을 가지는 것으로 설정하였다. 본 논문에서는 좌측 수직벽의 가열조건으로 펄스(pulse) 모양과 같이 이상적으로 기준온도에 도달하여 전체 시간동안 계속 가열되는 조건을 식 (6)과 같이 적용하였다. Fig. 2에는 적용 가능한 수직벽면의 가열조건을 시간 함수로 도시하였다.

$$\begin{aligned} T_w(t) &= T_0, \quad t \leq t_{h,1} \\ T_w(t) &= 2T_0, \quad t > t_{h,1} \end{aligned} \quad (6)$$

2.2. 수치해석 방법

앞서 2.1절에서 기술한 바와 같은 제한된 공간 내 압축성 유체에 급격한 열공급에 기인한 열음향파의 생성과 전파현상을 해석하기 위하여 1차원적인 격자계와 50×800 개의 격자(mesh)를 갖는 2차원적인 격자계를 구성하였다. 1차원 격자계는 선행연구결과와 비교 및 평가를 위한 것이며, 2차원 격자계는 공간의 확장에 따른 영향을 평가하여 향후 실험 및 계측에 응용하고자 하는데 목적이 있다.

주요 지배방정식은 1차원 및 2차원 격자계에 대하여 보존법칙을 근간으로 하는 유한체적법(finite volume method)을 이용하여 이산화(discretization) 하였다. 수치해석을 위한 기법으로는 우선 타당성 검토를 위하여 일반적인 전산열유체공학에서 정확한 압력장을 구하기 위하여 적용하고 있는 SIMPLE 기법과 비정상상태 문제의 계산에 적합한 것으로 알려진 PISO 알고리즘을 적용하였다.

일반적으로 SIMPLE 및 PISO 기법은 수치해석에서 압력장을 구하기 위하여 도입되는 기법으로서 연속방정식과 운동량방정식을 조합하여 압력수정방정식을 유도하며, 이렇게 유도된 방정식을 반복적인 계산에 의하여 정확한 압력장을 구한다. 이러한 기법의 주요 차이점은

SIMPLE 기법이 밀도변화가 거의 없는 비압축성을 전제로 하고 있고 각 시간 단계별 반복적인 계산이 수행되는데, 비정상 문제에 있어 이러한 반복계산은 수렴시간의 대폭적인 증가를 가져온다. PISO 알고리즘은 이러한 문제점을 개선한 방식으로 본 연구에서는 선행연구 기법과 더불어 두가지 알고리즘을 격자수 및 시간간격의 변화에 대하여 검토하였다.

열음향파의 특성을 해석하기 위해서는 진행방향에 따라 조밀한 격자계를 구성하여야 하며, 이에 따라 적절한 시간 간격(time step)에 의한 영향을 고려하여야 한다. 이러한 이론적 배경¹¹⁾을 검토하여 확산유속의 값은 시간간격에 큰 영향을 받지 않는 내재적인 기법(implicit scheme)을 적용하였으며, 확산 및 대류항의 처리를 위하여 2계 상류도식(second order upwind scheme)을 사용하였다. 또한 벽면에서는 점착(no-slip) 조건을 모든 벽면에 적용하였으며, 순간가열 경계조건을 좌측 수직벽면에 설정하였다.

한편 일반적인 정확도로 계산을 수행할 경우 정확한 압력파형을 얻을 수 없었지만 배경도의 정확도 및 2계 상류도식으로 계산하는 경우 생성된 압력파의 주파수는 선행연구와 거의 근사한 결과를 보였다. 또한 확장된 2차원 모델에 대하여 격자수 및 시간간격(time step), 이완계수 등을 변화시키면서 해의 안정성을 평가하였다.

해석결과와 설명과 평가를 용이하게 하기 위하여 무차원 길이($\zeta=x/L$), 무차원 압력($p^*=p/p_0$), 무차원 시간($\xi=t/t_0$)를 각각 도입하였다.

3. 결과 및 고찰

2장에서 기술한 바와 같은 해석모델 및 관련 이론을 적용하여 열음향파의 생성 및 전달특성에 관한 수치해석을 수행하였으며, 주요결과 및 고찰은 다음과 같다.

먼저 적용 가능한 수치해석기법을 비교 및 검토하고자 SIMPLE 및 PISO 기법을 도입하였으며, 격자수와 시간간격을 변화시키면서 수치해석기법의 타당성을 검토하였다. 이와 같은 반복적인 해석 및 검토를 통하여 비교적 양호한 결과를 보인 격자수가 50×400 이고 시간간격이 1×10^{-6} 인 경우를 Fig. 3과 같이 도시하였다. Fig. 3은 적용 알고리즘에 따른 영향 및 침투값의 변화를 검토하기 위하여 선행연구와 같은 격자수 및 유체에 대하여 비교한 결과로서 PISO 알고리즘의 경우 SIMPLE 기법에 비해 침투값의 모사에 효과적임을 알 수 있다.

SIMPLE 알고리즘의 경우 Fig. 3에 도시한 바와 같이 압력파의 침투형상을 정확하게 나타내지 못하였으며, 수치확산에 의하여 압력파의 침투형상이 완화되는 결과를 보였다. 또한 격자수를 더욱 증가시켜 50×800 인 경우

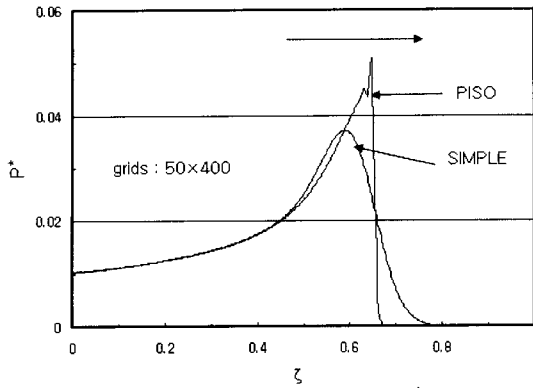


Fig. 3. Comparison of computational algorithms.

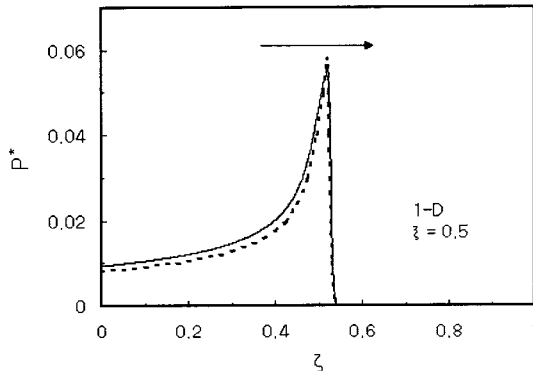


Fig. 4 Comparison of pressure wave (dashed line: Vasilyev & Paolucci^[3], solid line: present study).

에도 침투값은 다소 증가하나 전체적인 파형은 큰 변화가 없었으며, 시간간격별 수렴에 소요되는 시간의 대폭적인 증가를 보였다. 이는 일반적인 압축성 유동처럼 유체가 압력파에 따라 이동하는 것이 아니라 단지 진동만하고 압력파만 전달되는 현상에 기인하는 것으로 판단된다.

도입한 수치해석기법의 타당성과 수치해의 안정성을 검증하기 위하여 선행연구^[3]와 동일한 조건(H/L=1)의 대상모델과 경계조건에 따른 수치해석을 수행하였다. Fig. 4는 1차원 격자구성, PISO 알고리즘의 적용, 시간간격이 1×10^{-9} 인 경우에 압력파형의 일례를 Vasilyev와 Paolucci^[3]의 연구결과와 비교한 결과로서 파형과 주파수는 거의 동일하게 계산되었으며, 침투값(peak value)과 파형 후단부의 값은 정성적으로 상사한 결과를 보였다. 본 연구의 결과가 침투값은 다소 작게 나타나고 파형 후단부의 값은 다소 높게 관찰되었다. 이러한 결과를 확장된 공간과 경계조건에도 적용이 가능한 것으로 가정하였다.

한편 PISO 알고리즘의 적용에 있어 시간 간격에 따른 해의 안정성은 열음향파의 전달현상에 대한 유한차분법의 이론적인 안정성에 관한 연구자료^{[11][12]}와 일반적인 이론서 등을 검토하여 반복적으로 평가하였으며, 결과적으로 시간간격은 전파되는 음파가 적용된 격자계에서 해결될 수 있을 정도로 충분히 작아야함을 파악하였다. 본 연구에서는 1×10^{-9} 정도의 오더(order) 이상에서 안정적인 결과를 얻을 수 있었다. 또한 해석모델에서 정교한 압력파를 얻기 위해서 격자수를 변화시키면서 결과를 검토하였으며, 격자수를 증가시킴에 따라 결과적인 해로 계산되는 값은 점증하는 결과를 보여 열적인 요인에 의한 열음향파의 수치적인 결과는 격자수에 의존함을 파악하였다. 본 연구에서는 50×800 개의 격자에서 안정적인 압력파의 형상을 얻을 수 있었다.

이상과 같은 타당성 검토를 통하여 열음향파에 관한 파형의 생성과 계산에는 격자수 및 시간간격, 정확도가 매우 중요한 요소임을 파악하였으며, Fig. 5~Fig. 9에서 PISO 알고리즘, 배경도 계산, 2계 상류도식의 적용을 통하여 보다 일반화된 2차원 해석결과를 기술하였다.

Fig. 5는 시간에 따른 가열벽면 근처의 온도변화를 도시한 결과로서 가열 초기에 급격한 온도상승을 수반하며, 일정 시점 이후에는 증가율이 급격히 저하되어 벽면의 온도와 근사하게 됨을 볼 수 있다. 또한 주기적으로 온도가 미소하게 증가했다가 감소하는 현상이 발생하는데, 이는 압력파의 진행에 따른 유체의 압축 및 팽창에 기인한 것으로 판단된다. 그리고 Fig. 6은 무차원 길이에 따라 각 시간 단계별 열음향파의 파형을 도시한 결과로서 파형의 전단부위에서 압력값이 가파르게 증가하고 후단 부위에서는 다소 길게 늘어지는 꼬리 형상을 보이고 있다. 시간 단계에 따라서 침투값이 점점 감소하고 파형의 폭이 좌우로 넓어지는 현상을 관찰할 수 있다.

Fig. 7은 각 지점에서 시간에 따른 압력파의 진행을

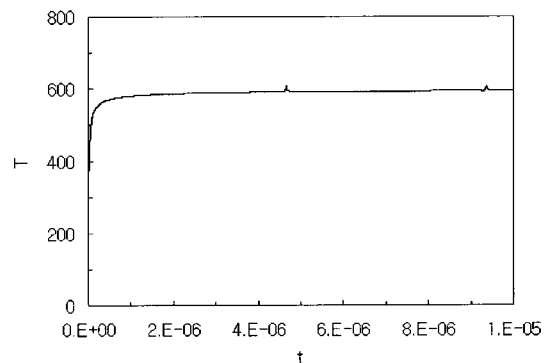
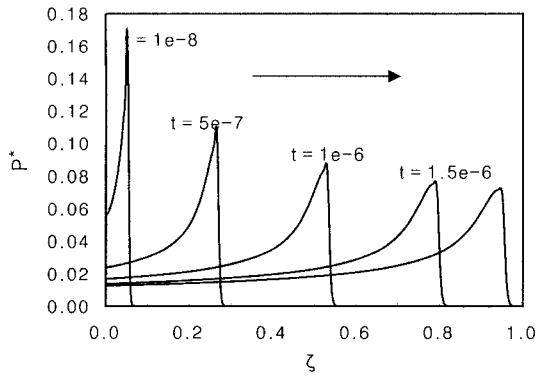
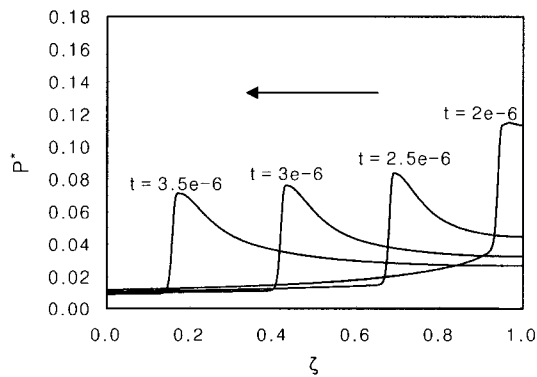


Fig. 5. History of temperature variation at heating wall.



(a) Forward propagation



(b) Backward propagation

Fig. 6. Propagation of pressure wave with dimensionless length.

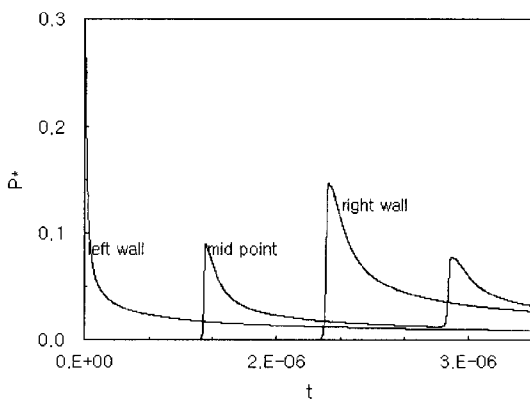
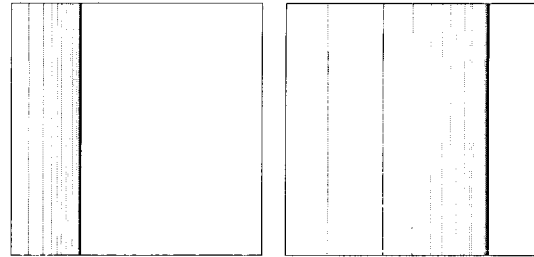


Fig. 7. History of pressure variation.

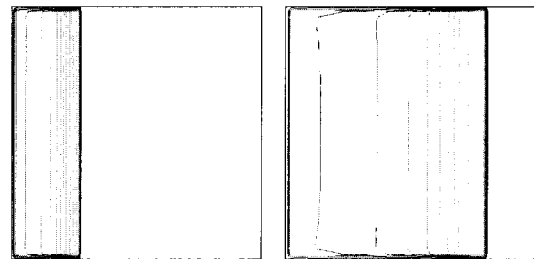
도시한 결과로서 좌측 가열벽면과 1/2인 중앙지점 그리고 우측 단열벽면에서 계산된 결과이다. 각각의 위치에서 열음향파의 진행에 따라 첨두(peak) 값의 변화가 나타나고 있다. 이러한 현상은 열음향파가 좌측 및 우측



(a) $t=5 \times 10^{-7}$ sec(→)

(b) $t=1.5 \times 10^{-6}$ sec(→)

Fig. 8. Contour plots of pressure distribution.



(a) $t=5 \times 10^{-7}$ sec(→)

(b) $t=1.5 \times 10^{-6}$ sec(→)

Fig. 9. Contour plots of velocity distribution.

벽에서 반사됨에 따라 반복적으로 일어나고 있으며, 중앙점의 경우 점점 그 첨두값이 감소되나 기저압력은 가열되는 열에 의하여 점증하는 현상이 관찰되었다.

Fig. 8은 특정 시점에서 공간내 압력분포를 도시한 결과로서 압력파가 점점 우측으로 진행하고 있으며, 압력파의 첨두부분이 통과하는 지점에서는 구배가 크게 나타나고 후단에서는 앞서 과형에서 알 수 있듯이 구배가 비교적 작고 넓게 분포되는 현상을 관찰할 수 있다. 또한 Fig. 9는 Fig. 8과 동일한 시점에서 속도분포를 도시한 결과로서 압력과 유사한 분포를 보이고 있다. 이러한 정성적인 결과는 1차원적인 결과와 유사하게 나타나는데, 가열조건에 따라 다르나 본 연구의 범위에서는 약 1×10^{-6} sec 오더에서 상하 벽면 근처에서 2차원적인 속도장의 변화를 정성적으로 관찰할 수 있다.

한편 적용된 가열경계조건 하에서 발생한 열음향파의 초기진행속도는 음속의 약 1.4배로 평가되었으며, 이후 시간의 경과에 따라 감소하는 경향을 보였다. 이러한 결과는 Fusegi 등¹²⁾의 결과와 유사한 결과를 보였다. 전반적으로 급속 가열 직후 열음향파가 전달되는 현상을 보면 동일한 시점에서 가열 벽면으로부터 멀어질수록 최대 압력진폭은 감소하는 경향을 보여 열음향파의 전달 과정에서 점성이나 열적인 효과 등으로 인하여 에너지가 소산됨을 알 수 있다.

4. 결 론

제한된 2차원 공간내 압축성유체의 급속 가열에 기인한 열음향파의 생성 및 전달특성에 관한 연구를 수행하였으며, 주요 결론은 다음과 같다.

1) 선행연구결과에서 관찰된 열음향파의 파형과 전파현상을 근사적으로 모사할 수 있었으며, PISO 알고리즘을 이용하여 보다 효과적으로 파형의 첨두부분을 모사할 수 있음을 보였다.

2) 2차원적인 공간에서 열적인 요인에 의한 압력파의 생성과 전달현상을 수치적으로 관찰할 수 있음을 보였으며, 열음향파의 전파과정에서 유체의 점성이나 열적인 소산, 압력파의 간섭 등 비가역적인 요인으로 인하여 에너지가 소산됨을 파악하였다.

향후에는 다양한 형상비를 갖는 제한된 공간내 압축성 유체의 순간 가열에 기인한 압력파의 생성과 전파현상을 정교하게 해석하고 실험적으로 평가할 수 있는 예측 및 가시화 연구를 체계적으로 수행할 계획이다.

참고문헌

- Huang, Y. and Bau, H.H.: "Thermo-acoustic waves in a semi-infinite medium", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38(8), 1329-1345 (1995).
- Fusegi, T., Farouk, B. and Oran, E.S.: "Numerical study of thermo-acoustic convection in a cavity, HTD-Vol. 305", *National Heat Transfer Conference* (1995).
- Vasilyev, O.V. and Paolucci, S.: "A dynamically adaptive multilevel wavelet collocation method for solving partial differential equations in a finite domain", *J. of Computational Physics*, 125, 498-512 (1996).
- Ozoe, H., Sato, N. and Churchill, S.W.: "Numerical analyses of two- and three-dimensional thermo-acoustic convection generated by a transient step in the temperature of one wall", *Numerical Heat Transfer, Part A*, 18, 1-15 (1990).
- Ozoe, H., Sato, N. and Churchill, S.W.: "The effect of various parameters on thermo-acoustic convection", *Chemical Engineering Communications*, 5, 203-221 (1980).
- Hwang, I.J. and Kim, Y.J.: "A Numerical Study on the Thermo-Acoustic Wave Transmission in the Confined 2-D Space with Rapid Wall Heating", *Proceedings of the KSME 2002 Spring Annual Meeting, 1919-1924* (2002).
- Trilling, L.: "On thermally induced sound fields", *J. Acoustical Society of America*, 27, 425-431 (1955).
- Rayleigh, L.: "On the conduction of heat in a spherical mass of air confined by walls at a constant temperature", *Phil. Mag.*, 47, 314-325 (1899).
- Radhwan, A.M. and Kassoy, D.R.: "The response of a confined gas to a thermal disturbance: Rapid boundary heating", *J. Eng. Math.*, 18, 133-156 (1984).
- Parang, M. and Salah-Eddine, A.: "Thermo-acoustic convection heat transfer phenomena", *AIAA J.*, 22, 1020-1022 (1984).
- Spradley, L.W. and Churchill, S.W.: "Pressure and buoyancy driven thermal convection in a rectangular enclosure", *J. of Fluid Mechanics*, 70, 705-720 (1975).
- Lee, C.H. et al.: "Oscillatory enclosed buoyant convection of a fluid with the density maximum", *Proceedings of the KSME 2002 Spring Annual Meeting, B*, 311-315 (2000).
- Patankar, S.V.: "Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere publishing corporation", New York (1980).
- Versteeg, H.K. and Malalsekera, W.: "An introduction to computational fluid dynamics; The finite volume method", Longman Group Ltd. (1995).