The Korean Communications
in Statistics Vol. 10 No. 1, 2003
pp. 101-113

Efficient Quasi-likelihood Estimation for Nonlinear Time Series Models and Its Application[1]

Sahmyeong Kim[2], Kyungyup Cha[3], Sungduck Lee[4]

Abstract

Quasi likelihood estimators defined by Wedderburn are derived for several nonlinear time series models. And also, the least squared estimator and Quasi-likelihood estimator are compared in sense of asymptotic relative efficiency at those models. Finally, we apply these estimations to a real data on exchanging rate and stock market prices.

Keywords : Quasi likelihood estimator, Random Coefficient Autoregressive model, ARCH model, Asymptotic relative efficiency.

1. 서론

시계열분석에 있어서 가장 중요한 점은 과거의 관찰값들로부터 미래를 예측하는 것이다. 미래를 예측하기 위해서는 관찰값에 적합한 모형을 수립하고 그 모형에 포함되어 있는 모수를 추정함으로써 미래값을 얻을 수 있다. 모수추정방법으로는 적률추정법, 최소제곱추정법, 그리고 최우추정법 등이 있다. 여기서 가장 많이 사용되고 있는 추정법으로는 최소제곱추정법과 최우추정법을 들 수 있는데 최소제곱추정법은 일반적으로 분포의 가정없이 모수를 추정할 수 있다는 면에서 우수한 추정법임을 알 수 있다. 또한 최우추정법은 최소분산 불편추정이론을 만족하여 주는 추정법으로 가장 많이 이용되고 있는 추정법이나 일반적으로 정규분포를 가정하여야 한다는 점에서 강한 제약조건을 갖고 있다. 따라서 분포의 가정없이 단지 평균과 분산만을 알고 있을 경우 최우추정법과 같은 성질을 얻을 수 있는 추정법이 Wedderburn(1974)이 제안한 Quasi-Score함수를 이용한 추정

---

1) This research was supported by the Chung-Ang University Grants in 2001.
2) Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul, 156-756.
E-mail: sahm@cau.ac.kr
3) Senior Researcher, Corporate risk management department, Korea Credit Guarantee Fund, Seoul, Korea, 121-744
E-mail:kycha@shinbo.co.kr
4) Professor, Department of Statistics, Chungbuk National University, Cheongju, 361-763.
E-mail: sdlee@cbucc.chungbuk.ac.kr

법이다. Wedderburn(1974)은 일반화선형모형에서 분산이 평균의 함수로 정의됨을 가정하고 Quasi 우도추정법을 제안하였다. 한편 전통적인 추정법들은 관찰값들의 함수로 이루어진 추정량들이 좋은 추정량의 성질이 만족되는지에 따라 좋은 추정법인지를 판단한다. 그러나 Godambe(1960)는 추정량을 얻기 위한 전단계인 추정방정식에 관심을 갖고 추정함수(estimating function)이론을 제안하였다. 즉, 추정함수이론은 추정량에 관심을 갖기 보다는 추정함수 그 자체에 관심을 갖는 것이 특징이다. Godambe(1960)는 추정함수 중 불편성과 효율성을 만족하는 추정함수를 최적추정함수(optimal estimating function)라 하고 최적추정함수로부터 얻은 추정량은 최소분산불편추정량임을 증명하였다. 또한 Godambe(1985)는 확률과정(stochastic process)에서 Wedderburn(1974)이 제안한 Quasi-Score함수가 최적추정함수의 특수한 경우임을 증명하였다.

따라서 본 연구에서는 첫째, 비선형 시계열모형에서 Wedderburn(1974)이 제안한 Quasi-Score추정함수를 정의하고 Quasi-Score추정함수로부터 얻은 추정량의 극한분포를 제시하고자 한다. 둘째, 비선형 시계열모형인 확률계수 자기회귀(random coefficient autoregressive ; RCA)모형과 조건부 이분산 자기회귀(autoregressive conditional heteroscedastic ; ARCH)모형에서 추정량의 극한분포를 이용하여 조건부 최소제곱추정량과 Quasi 추정량간의 점근상대효율을 구하여 효율성을 비교하고자 한다. 셋째, 실증연구로서 금융외환시장의 불확실성을 나타내는 환율, 금리, 주가지수 등의 연관성에 관한 시계열 모형을 수립하고 조건부 최소제곱추정법과 Quasi 우도추정법을 이용하여 모수추정을 실시하고자 한다.

2. 추정법

2.1 조건부 최소제곱추정법

일반적으로 p차 자기회귀 비선형 시계열모형(Time Series Model)은 다음과 같이 정의된다.

$$X_t = H(\underline{X}_{t-1}, Z_t; \underline{\theta}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{2.1}$$

여기서 $\underline{X}_{t-1}$는 $\underline{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \cdots, X_{t-p})$이다. ε_t는 평균이 0이고 분산이 σ_ε^2인 iid(identically and independently distributed)한 확률변수이고 Z_t는 평균이 0이고 분산이 σ_z^2인 iid 확률벡터이다. 그리고 함수 H는 관찰값과 모수들로 이루어진 함수이다. 여기서 Z_t는 ε_t와 $\underline{X}_{t-1}$에 상호독립이라 가정한다. 조건부 최소제곱추정량은 일반적으로 다음을 만족하는 추정량을 의미한다.

$$\underset{\min}{\theta} \sum_{t=1}^{n} \{X_t - \mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta)\}^2 \tag{2.2}$$

여기서 조건부 기대치는 $\mu_t(\underline{X}_{t-1}; \theta) = E(X_t \mid F_{t-1})$, $F_{t-1} = \sigma(X_{t-1}, \cdots, X_{t-p})$이다. 조건부 최소제곱추정함수를 다음과 같이 정의한다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} g(X_t; \theta) = \sum_{t=1}^{n} \{X_t - \mu_t(\underline{X}_{t-1}; \underline{\theta})\} \frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1}; \underline{\theta})}{d\theta} \tag{2.3}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \begin{bmatrix} g_1(X_t; \theta) \\ \vdots \\ g_p(X_t; \theta) \end{bmatrix}$$

식(2.3)에서 $S_n(\theta)=0$을 만족하는 추정량은 조건부 최소제곱추정량이다. 조건부 최소제곱추정량에 대한 극한분포를 얻기 위해 다음과 같은 정규조건(Regularity condition)을 제시하고자 한다.

<정규조건 1>

(1) $\{X_t\}$는 정상성(Stationary)과 에르고딕(Ergodic)을 만족하는 확률과정(Stochastic process)이다.

(2) 행렬 $F(\theta)$가 다음과 같이 존재하고 이 행렬은 양정치(positive definite)행렬이다.

$$F(\theta)=E_\theta\left[\left(\frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta}\right)^T\right].$$

(3) $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$을 만족하는 θ^*는 다음을 만족한다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\frac{d}{d\theta}g(X_t;\theta^*)-\frac{d}{d\theta}g(X_t;\theta)\right] \xrightarrow{p} 0.$$

<정 리 2.1>

<정규조건 1>하에서 조건부 최소제곱추정량의 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta) \xrightarrow{d} N_p(0,\ F^{-1}(\theta)) \tag{2.4}$$

(증 명)

추정함수에 대해 Taylor 전개를 하면 다음과 같다.

$$\frac{-1}{\sqrt{n}}S_n(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(\hat{\theta}_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{dS_n(\theta)}{d\theta}\ \Big|_{\theta=\theta^*}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{t=1}^{n}\frac{dg(X_t;\theta^*)}{d\theta}\right\}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta) \tag{2.5}$$

,여기서 θ^*는 θ와 $\hat{\theta}_n$사이에 있는 추정량이다. <정규조건 1> (3)에 의해 다음과 같은 극한이론을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{dg(X_t;\theta^*)}{d\theta}-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{dg(X_t;\theta)}{d\theta} \xrightarrow{p} 0 \tag{2.6}$$

그리고

$$\frac{dg(X_t;\theta)}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left[\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})\}\frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta}\right]$$

$$=-\left(\frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta}\right)^T+\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})\}\frac{d^2\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta^2}, \tag{2.7}$$

여기서 $E_\theta\left[\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})\}\frac{d^2\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})}{d\theta^2}\ \Big|\ F_{t-1}\right]=0$이다. 왜냐하면 $\{X_t-\mu_t(\underline{X}_{t-1};\underline{\theta})\}$는 마팅게일 차분(Martingale difference)이며 조건부 기대치는 0이기 때문이다(Hall과 Heyde,1980). 에르고딕 이론을 이용하여 다음과 같은 근사이론을 얻을 수 있다.

$$-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{dg(X_t;\theta)}{\partial\theta} \xrightarrow{a.s.} F(\theta) \tag{2.8}$$

그리고 $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(\theta)$는 중심극한정리에 의해 근사적으로 평균이 0이고 분산이 $F(\theta)$인 정규분포를 따르므로 식 (2.5), (2.8)을 이용하여 조건부 최소제곱추정량의 극한분포를 구한다.

<예제 2.1>(RCA(1) 모형)

RCA(1) 모형은 다음과 같다.

$$X_t = (\theta + Z_t)X_{t-1} + \varepsilon_t$$

여기서 ε_t는 평균이 0이고 분산이 σ_ε^2인 iid 확률변수이다. 그리고 Z_t는 평균이 0이고 분산이 σ_z^2인 iid 확률변수이다. 또한 Z_t는 ε_t와 독립이다. 정상성을 만족하기 위해서는 $\theta^2 + EZ_t^2 < 1$이어야 한다(Nicholls과 Quinn,1982). 조건부 최소제곱추정함수는 다음과 같이 정의된다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n}(X_t - \theta X_{t-1})X_{t-1}, \tag{2.9}$$

여기서 식(2.9)의 $S_n(\theta) = 0$을 만족하는 추정량은 조건부 최소제곱추정량이다. 또한 <정리 2.1>을 이용하여 조건부 최소제곱추정량에 대한 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta_n} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0,\ \frac{\sigma_z^2 E(X_{t-1}^4) + \sigma_\varepsilon^2 E(X_{t-1}^2)}{[E(X_{t-1}^2)]^2}\right). \tag{2.10}$$

<예제 2.2>(ARCH(1) 모형)

ARCH(1)모형은 다음과 같다.

$$X_t = \theta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

여기서 $\varepsilon_t \mid F_{t-1} \sim N(0, h_t)$, $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$이다. ε_t는 평균이 0이고 분산이 과거값 ε_{t-1}에 종속된 확률변수이다. 그리고 정상성을 만족하기 위해서는 $|\theta| < 1$이어야 한다.(Engle,1982) 또한 분산 h_t가 존재하기 위해서는 $\alpha_1 < 1$이어야 한다.(Bollerslv,1986) 분산 h_t가 존재할 때 ε_t의 분산은 다음과 같다.

$$\sigma_\varepsilon^2 = E[\varepsilon_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

조건부 최소제곱추정함수는 다음과 같이 정의된다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n}(X_t - \theta X_{t-1})X_{t-1}, \tag{2.11}$$

여기서 식(2.11)의 $S_n(\theta) = 0$을 만족하는 추정량은 조건부 최소제곱추정량이다. 또한 <정리 2.1>을 이용하여 조건부 최소제곱추정량에 대한 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta_n} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0,\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{E(X_{t-1}^2)}\right). \tag{2.12}$$

2.2 Quasi 우도추정법

비선형 시계열모형에서 Quasi-Score추정함수는 다음과 같이 정의되고 이 절에서는 Quasi우도추정함수로부터 얻은 추정량에 대한 극한분포를 제시하고자 한다.

<정의 2.1>
비선형 시계열모형에서 Quasi-Score추정함수는 다음과 같이 정의한다.

$$S_n(\theta)=\sum_{t=1}^{n} g(X_t;\theta)=\sum_{t=1}^{n}\left\{\frac{X_t-\mu_t(X_{t-1};\theta)}{v_t(\theta)}\right\}\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta} \tag{2.13}$$

$$=\sum_{t=1}^{n}\begin{bmatrix} g_1(X_t;\theta_1)\\ \vdots \\ g_p(X_t;\theta_p)\end{bmatrix},$$

여기서 $\mu_t(X_{t-1};\theta)=E(X_t\mid F_{t-1})$이고 $v_t(\theta)=Var(X_t\mid F_{t-1})$이다. 식(2.13)에서 $S_n(\theta)=0$을 만족하는 $\widehat{\theta}_n$는 Quasi우도추정량이다. Quasi우도추정량에 대한 극한분포를 구하기 위해 다음과 같은 정규조건을 제시하고자 한다.

<정규조건 2>

(1) 시계열 $\{X_t\}$는 정상성과 에르고딕을 만족한다.

(2) $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$를 만족하는 θ^*는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[v_t^{-1}(\theta)\left(\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\right)^T\right]\Big|_{\theta=\theta^*} \xrightarrow{p} F(\theta),$$

여기서 $F(\theta)=E\left[v_t^{-1}(\theta)\left(\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\right)^T\right]$이고 $F(\theta)$는

양정치(positive definite) 행렬이다.

(3) $\theta^* \xrightarrow{p} \theta$를 만족하는 θ^*는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[h_t(\theta^*)-h_t(\theta)] \xrightarrow{p} 0,$$

여기서 $h_t(\theta)=\left[(X_t-\mu_t(X_{t-1};\theta))\frac{d}{d\theta}\left(v_t^{-1}(\theta)\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\right)\right]$이다.

<정리 2.2>
<정규조건 2>하에서 Quasi우도추정량은 다음과 같은 극한분포를 갖는다.

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n-\theta) \xrightarrow{d} N(0,F^{-1}(\theta)), \tag{2.14}$$

여기서 $F(\theta)=E\left[v_t^{-1}(\theta)\left(\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\right)^T\right]$이다.

<증명>
추정함수에 대해 Taylor 전개를 사용하면 다음과 같다.

$$\frac{-1}{\sqrt{n}}S_n(\theta)=-\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(\widehat{\theta}_n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{dS_n(\theta)}{d\theta}\Big|_{\theta=\theta^*}\cdot\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n-\theta)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[(X_t-\mu_t(X_{t-1};\theta))\frac{d}{d\theta}[v_t^{-1}(\theta)\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}]\Big|_{\theta=\theta^*}\cdot\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n-\theta)$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[v_t^{-1}(\theta)\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)}{d\theta}\frac{d\mu_t(X_{t-1};\theta)^T}{d\theta}]\Big|_{\theta=\theta^*}\cdot\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n-\theta)$$

$$=(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}h_t(\theta^*)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[\ v_t^{-1}(\theta)\frac{\partial\mu_t(\ X_{t-1};\theta)}{\partial\theta}\ \frac{\partial\mu_t(\ X_{t-1};\theta)^T}{\partial\theta}]\ |\ _{\theta=\theta^*}) \cdot\sqrt{n}(\ \widehat{\theta n}-\theta) \tag{2.15}$$

그리고 <정규조건 2>의 조건 (3)에 의해 다음과 같은 확률적 수렴을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}h_t(\theta^*)-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}h_t(\theta)\ \xrightarrow{p}\ 0. \tag{2.16}$$

여기서 $(X_t-\mu_t(\ X_{t-1};\theta)$은 마팅게일 차분(martingale difference)이며 기대값이 0이기 때문에 $E_\theta[h_t(\theta)|F_{t-1}]=0$임을 알 수 있다. 그리고 <정규조건 2>의 조건 (2)에 의해 다음과 같은 확률적 수렴을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left[\ v_t^{-1}(\theta)\left(\frac{d\mu_t(\ X_{t-1}\ ;\ \theta)}{d\theta}\right)\left(\frac{d\mu_t(\ X_{t-1}\ ;\ \theta)}{d\theta}\right)^T\right]\ \xrightarrow{p}\ F(\theta). \tag{2.17}$$

그리고 추정함수 $\{S_n(\theta),F_n\}$는 평균이 0이고 공분산이 $F(\theta)$를 갖는 마팅게일이다. 따라서 마팅게일 중심극한정리를 이용하여 다음과 같은 추정함수의 극한분포를 얻을 수 있다. 즉,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}S_n(\theta)\ \xrightarrow{d}\ N(0\ ,\ F(\theta)). \tag{2.18}$$

식(2.15), (2.17)과 식(2.18)을 이용하여 Quasi우도추정량의 극한분포를 얻는다.

<예제 2.3>(RCA(1) 모형)

1차 확률계수 자기회귀(RCA(1))모형은 다음과 같다.

$$X_t=(\theta+Z_t)X_{t-1}+\varepsilon_t\ . \tag{2.19}$$

여기서 X_t에 대한 조건부 기대치와 조건부 분산은 다음과 같다.

$$\mu_t(\ X_{t-1};\theta)=E(X_t\,|\,X_{t-1})=\theta X_{t-1}$$
$$v_t(\theta)=Var(X_t\,|\,X_{t-1})=\sigma_z^2X_{t-1}^2+\sigma_\varepsilon^2.$$

RCA(1) 모형에서 Quasi-Score추정함수는 다음과 같다.

$$S_n(\theta)=\sum_{t=1}^{n}(X_t-\mu_t(X_{t-1};\theta))\ v_t^{-1}(\theta)\frac{\partial\mu_t(X_{t-1};\theta)}{\partial\theta} \tag{2.20}$$
$$=\sum_{t=1}^{n}\frac{Z_tX_{t-1}+\varepsilon_t}{\sigma_z^2X_{t-1}^2+\sigma^2}X_{t-1}.$$

여기서 식(2.20)에서 $S_n(\theta)=0$을 만족하는 Quasi우도추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\theta_n}=\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{X_tX_{t-1}}{\sigma_\varepsilon^2+\sigma_z^2X_{t-1}^2}\right)/\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{X_{t-1}^2}{\sigma_\varepsilon^2+\sigma_z^2X_{t-1}^2}\right) \tag{2.21}$$

그리고 Quasi우도추정량에 대한 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta_n}-\theta)\ \xrightarrow{d}\ N\left(0,\ \frac{1}{E\left[\frac{X_{t-1}^2}{\sigma_z^2X_{t-1}^2+\sigma_\varepsilon^2}\right]}\right). \tag{2.22}$$

<예제 2.4>(ARCH(1) 모형)

1차 조건부 이분산 자기회귀(ARCH(1))모형은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_t &= \theta X_{t-1} + \varepsilon_t \\ E(\varepsilon_t \mid F_{t-1}) &= 0 \\ Var(\varepsilon_t \mid F_{t-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

여기서 X_t에 대한 조건부 기대치와 조건부 분산은 다음과 같이 주어진다.

$$\mu_t(X_{t-1};\theta) = E(X_t \mid X_{t-1}) = \theta X_{t-1}$$

$$v_t(\theta) = Var(X_t \mid X_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2.$$

ARCH(1)모형에서 Quasi-Score추정함수는 다음과 같다.

$$S_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n} (X_t - \mu_t(X_{t-1};\theta)\ v_t^{-1}(\theta)) \frac{\partial \mu_t(X_{t-1};\theta)}{\partial \theta} \tag{2.24}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{\varepsilon_t X_{t-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$$

즉, 식(2.24)에서 $S_n(\theta) = 0$을 만족하는 Quasi우도추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\theta_n} = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{X_t X_{t-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \right) \Big/ \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{X_{t-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2} \right). \tag{2.25}$$

그리고 Quasi우도추정량에 대한 극한분포는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta_n} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{E\left[\frac{X_{t-1}^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}\right]}\right). \tag{2.26}$$

2.3 효율성 비교

비선형 시계열모형인 확률계수 자기회귀(RCA)모형과 조건부 이분산 자기회귀(ARCH)모형에서 조건부 최소제곱추정량과 Quasi 우도추정량의 효율성을 비교하기 위하여 다음과 같은 점근상대효율(Asymptotic Relative Efficiency; ARE)을 이용한다.

$$ARE = \frac{asy\ Var(\sqrt{n}(\widehat{\theta_{QL}} - \theta))}{asy\ Var(\sqrt{n}(\widehat{\theta_{CLS}} - \theta))}. \tag{2.27}$$

여기서 $\widehat{\theta_{CLS}}$는 조건부 최소제곱추정량이고 $\widehat{\theta_{QL}}$는 Quasi우도추정량이다. 만약 점근상대효율이 1보다 작으면 Quasi우도추정량의 근사분산(asymptotic variance)이 조건부 최소제곱추정량의 근사분산보다 작으므로 Quasi우도추정량이 조건부 최소제곱추정량보다 효율성 면에서 우수함이 입증된다. 먼저 시계열 난수를 발생하기 위해 RCA(1)모형에서 모수 θ를 0.5로 하고 Z_t의 분산을 0.05로 하여 Nicholls과 Quinn(1982)이 제안한 RCA(1)모형에서의 정상조건 $\theta^2 + E(Z_t^2) < 1$이 만족되게 하였다. 또한 ARCH(1)모형에서는 모수 θ를 0.5로 하고 확률변수 ε_t의 분산 중 $\alpha_0 = 0.7$, $\alpha_1 = 0.2$로 하여 Engle(1982)이 제안한 정상조건 $|\theta| < 1$과 Bollerslv(1986)가 제안한 조건 $\alpha_1 < 1$이 만족되게 난수를 발생시켰다. 한편 확률변수 ε_t를 표준정규분포(standard normal distribution),

오염정규분포(contaminated normal distribution), 이중지수분포(double exponential distribution)로 변화시켜 이상치가 존재하지 않은 모형(표준정규분포인 경우)과 이상치가 존재하는 모형(이중지수분포와 오염정규분포)으로 나누어 조건부 최소제곱추정량과 Quasi우도추정량간의 효율성을 비교하였다. 오염정규분포에서 오염도가 커질수록 모형에 이상치가 많이 존재함을 알 수 있고 오염분산이 커질수록 이상치의 변화의 폭이 커짐을 알 수 있다. 그리고 이상치가 존재하는 모형으로 이중지수분포를 이용한 것은 일반적으로 확률변수 ε_t가 두터운 꼬리를 갖고 있는 경우를 나타내기 위하여 이용하였다. 한편 표본크기를 200으로 하였으며 이 시뮬레이션은 반복수 500번을 통해 시뮬레이션 결과를 얻어냈다. 추정량에 대한 시뮬레이션 결과는 다음과 같다.

<표 2.1> 조건부 최소제곱추정량과 Quasi우도추정량간의 점근상대효율

오염도	오염분산	ARE	
		RCA	ARCH
3%	5	0.8338	0.8546
	10	0.7427	0.7710
	20	0.6183	0.6715
5%	5	0.8127	0.7652
	10	0.7192	0.6461
	20	0.5979	0.5391
10%	5	0.7992	0.6249
	10	0.7238	0.4748
	20	0.6486	0.3597
표준정규분포		0.8817	1.0045
이중지수분포		0.7988	0.7413

주) 오염정규분포 : $CN(0,\sigma_c^2,\gamma)=(1-\gamma)N(0,1)+\gamma N(0,\sigma_c^2)$ 여기서 γ는 오염도, σ_c^2은 오염분산.

이중지수분포 : $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$

RCA(1)모형에서 확률변수 ε_t가 표준정규분포인 경우, Quasi우도추정량이 조건부 최소제곱추정량보다 효율적인 추정량이므로 이상치가 존재하지 않는 RCA모형에서 Quasi우도추정량이 효율성을 만족하는 추정량임을 알 수 있다. 또한 확률변수 ε_t가 이중지수분포와 오염정규분포인 경우에도 Quasi우도추정량이 효율추정량임을 알 수 있다. 한편 ARCH모형에서 확률변수 ε_t가 표준정규분포인 경우, 조건부 최소제곱추정량이 Quasi우도추정량에 비해 그 효율성이 거의 차이가 없으나 오염정규분포일 경우에서는 Quasi우도추정량이 효율추정량이었다.

3. 실증분석

3.1 분석자료의 모형수립

본 연구의 분석대상기간은 1998년 1월부터 1999년 6월까지의 자료를 이용하였다. 원/달러 환율은 시장평균환율의 기준환율을, 주가는 한국증권거래소의 종가기준 종합주가지수를 이용하였으며 금리는 회사채 수익률을 이용하였다. 각 시계열의 안정성 여부를 검정하기 위하여 단위근 검정을 실시한 결과 모두 비정상(non stationary) 시계열임을 알 수 있었다. 따라서 로그변환 후 1차 차분을 통해 정상 시계열을 얻었으며 차분 변수들에 대한 기술통계량은 다음과 같다.

<표 3.1> 일별 환율등락률($\triangle ex$), 금리등락률($\triangle i$), 주가수익률($\triangle sp$) 시계열 자료의 특성

변수	표본수	평균	표준편차	왜도	첨도	정규성검정
$\triangle i$	443	-0.0029	0.0189	-1.4019	12.0939	0.8190 (0.0001)
$\triangle sp$	443	0.0018	0.0267	0.1380	0.5476	0.9751 (0.0047)
$\triangle ex$	443	-0.0008	0.0111	-0.9913	9.9428	0.8458 (0.0001)

주) $\triangle i = \ln(i_t/i_{t-1}), \triangle sp = \ln(sp_t/sp_{t-1}), \triangle ex = \ln(ex_t/ex_{t-1})$

정규성 검정에서 괄호안은 p-value임.

차분변수들이 정규성을 만족하는지를 검정하기 위해 왜도와 첨도 그리고 샤피로 윌크(Shapiro-wilk)검정법을 이용하였다. 왜도의 경우 환율등락률과 금리등락률은 왼쪽으로 편향되어 있는 비대칭 분포를, 주가수익률은 정규분포의 왜도 0에 근접하고 있다. 그러나 첨도에 있어서는 모든 변수들이 정규성을 만족하지 않음을 알 수 있다. 한편 환율등락률, 금리등락률, 주가수익률의 연관성을 분석하기 위해 주가수익률을 종속변수로 금리 및 환율등락률을 설명변수로 설정하였다. 즉, 금리 및 환율등락률이 주가수익률에 어떠한 영향을 미치는가를 분석하기 위하여 다음과 같은 모형을 설정하였다. 또한 모형으로부터 얻어지는 잔차들이 이분산성을 갖고 있으므로 모형잔차를 조건부 이분산 자기회귀모형과 일반화된 조건부 이분산 자기회귀모형으로 설정하였다.

<모형 1>

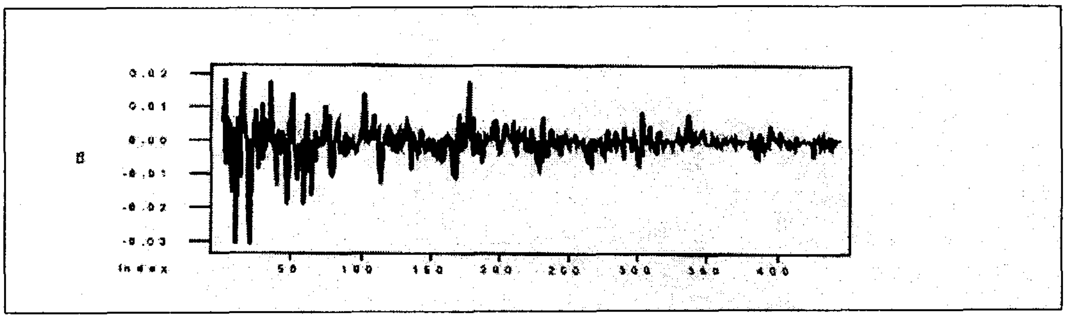
$$\triangle sp_t = \theta_0 + \theta_1 \triangle sp_{t-1} + \theta_2 i_t + \theta_3 \triangle ex_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, h_t), \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

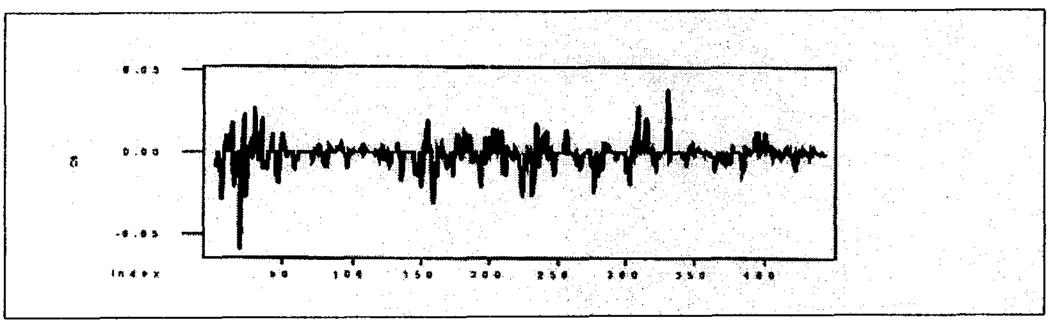
<모형 2>

$$\triangle sp_t = \theta_0 + \theta_1 \triangle sp_{t-1} + \theta_2 i_t + \theta_3 \triangle ex_t + \varepsilon_t$$

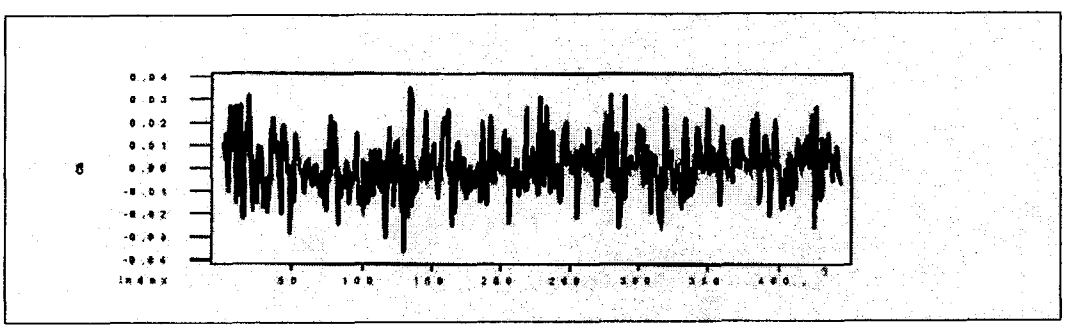
$$\varepsilon_t \sim N(0, h_t), \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$



<그림 3.1> 환율등락률(△ex)의 추이



<그림 3.2> 금리등락률(△i)의 추이



<그림 3.3> 주가등락률(△sp)의 추이

3.2 모수추정 및 모형검진

환율등락률, 금리등락률, 주가수익률에 대한 정규성 검정을 실시한 결과 유의하지 않음을 알 수 있었다. 따라서 모수추정 방법으로 최우추정법을 사용하는 것은 이론적인 오차보다도 더 많은 오류 가능성을 내포할 수 있으므로 분포의 가정없이 사용할 수 있는 조건부 최소제곱추정법과 Quasi우도추정법을 사용하여 모수를 추정하고자 한다. 조건부 최소제곱추정량은 다음과 같이 구한

다.

$$\min_{\theta} \sum_{t=1}^{n}\{\triangle sp_t - \theta_0 - \theta_1 \triangle sp_{t-1} - \theta_2 \triangle i_t - \theta_3 \triangle ex_t\}^2 \quad (3.1)$$

$$s.t. \sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t = \sum_{t=1}^{n} \triangle i_t = \sum_{t=1}^{n} \triangle ex_t = 0$$

$$\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle i_t = \sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle ex_t = \sum_{t=1}^{n} \triangle i_t \triangle ex_t$$

식(3.1)을 이용한 조건부 최소제곱추정량은 다음과 같다. 즉,

$$\widehat{\theta}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t}{n}, \ \widehat{\theta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle sp_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t^2}, \ \widehat{\theta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle i_t}{\sum_{t=1}^{n} \triangle i_t^2}, \ \widehat{\theta}_3 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle ex_t}{\sum_{t=1}^{n} \triangle ex_t^2}$$

또한 Quasi 우도추정량은 <정의 2.1>을 이용하여 구할 수 있는데 Quasi우도추정량을 얻기 위하여 디지의 모수 $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$은 조건부 최소제곱추정량을 이용하고 ε_{t-1}^2은 조건부 최소제곱추정량의 잔차를 이용함으로서 구할 수 있다. Quasi우도추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\theta}_0 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t}{n}, \ \widehat{\theta}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle sp_{t-1}/h_t}{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t^2/h_t}, \ \widehat{\theta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle i_t/h_t}{\sum_{t=1}^{n} \triangle i_t^2/h_t}, \ \widehat{\theta}_3 = \frac{\sum_{t=1}^{n} \triangle sp_t \triangle ex_t/h_t}{\sum_{t=1}^{n} \triangle ex_t^2/h_t}$$

모수추정 결과는 다음과 같다.

<표 3.2> 모형의 변화에 따른 모수추정 결과

모수	ARCH		GARCH
	조건부 최소제곱추정량	Quasi우도추정량	Quasi우도추정량
α_0	0.0000845	0.0000845	0.00000029
α_1	0.31636	0.31636	0.000695
β_1	-	-	0.94585
θ_0	0.000811	0.000811	0.000811
θ_1	0.10632	0.12441	0.11834
θ_2	-0.41183	-0.41667	-0.31820
θ_3	-0.30267	-0.30718	-0.23807

주가수익률의 경우 θ_1이 양의 값을 나타내므로 어제의 주가변동이 오늘에도 이어진다는 소위 long-swing현상을 보이고 있다. 또한 금리 및 환율등락률이 증가할수록 주가수익률은 감소함을 알 수 있다. 즉, 금리가 1% 증가할수록 주가수익률은 0.3~0.4% 감소하고, 환율이 1% 증가하였을 경우에 주가수익률은 0.2~0.3%감소되는 것으로 분석되었다. 모형이 수립되고 모수추정이 이루어진 이후 모형이 관찰된 자료에 잘 적합하는지를 검증하는 방법이 적합성 검정방법이다. 즉, 모형 수립 후 나타나는 잔차가 백색잡음(white noise)의 성질을 만족할 경우 이 모형은 자료를 잘 설명

하고 있다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 잔차의 자기상관이 존재하는지를 알아보는 검정방법으로 Ljung-Box(1978)가 제안한 변형된 포트맨토우 검정법(modified portmanteau test)을 이용하여 모형검진을 실시하였다.

<표 3.3> 모형검진 결과

모형	추정량	$\sqrt{MSE}$	변형된 포트맨토우 통계량				
			6	12	18	24	30
ARCH	조건부 최소제곱추정량	0.01109	5.15 (0.524)	9.46	15.63	22.96	34.44
	Quasi우도추정량	0.01112	6.52 (0.62)	10.87	16.64	23.88	35.53
GARCH	Quasi우도추정량	0.01108	5.20 (0.53)	9.14	15.64	23.63	34.95

주) 변형된 포트맨토우 통계량에서 괄호안은 p-value임.

변형된 포트맨토우 검정을 통해 모형검진을 실시한 결과 ARCH모형(<모형1>)과 GARCH모형(<모형2>)으로 적합시킨 경우 모두 유의함을 알 수 있다. 또한 조건부 최소제곱추정량과 Quasi우도추정량을 이용한 추정결과 모형이 모두 적절함을 알 수 있다. 특히, 환율, 금리, 주가지수에 대한 모형으로 GARCH모형을 선택하고, 추정법으로 Quasi우도추정법을 선택하는 것이 가장 바람직함을 알 수 있다.

4. 결 론

Wedderburn(1974)이 제안한 Quasi-Score추정함수를 비선형 시계열모형에 정의하여 Quasi우도추정량을 구하였으며 Quasi우도추정량이 근사적으로 정규분포를 따름을 증명하였다. 그리고 시뮬레이션 연구로서 비선형 시계열모형인 확률계수 자기회귀모형에서는 Quasi우도추정량이 조건부 최소제곱추정량보다 효율적인 추정량임을 알 수 있었고, ARCH모형에서는 이상치가 존재하지 않는 경우에는 두 추정량의 효율성은 거의 차이가 없었으나, 이상치가 존재하는 경우에서는 Quasi우도추정량이 더 효율적인 추정량임을 알 수 있었다. 즉, 일반적인 시계열 자료들은 정규성을 만족하지 못하는 경우가 대부분이어서 모수 추정방법으로 최우추정법 대신 조건부 최소제곱추정법을 많이 이용하였다. 그러나 조건부 최소제곱추정법은 이상치가 존재하거나 이분산성인 자료에서는 적합하지 못하였다. 따라서 본 연구에서 제시한 Quasi우도추정법은 기존의 조건부 최소제곱추정법보다 효율적인 추정량을 얻을 수 있으므로 우수한 추정법임을 알 수 있었다. 한편 실증연구에서 환율, 금리, 주가지수에 대한 연관성 분석을 실시한 결과, 금리 및 환율 변동이 주가지수에 유의한 영향을 미치고 있음을 알 수 있었고 모수추정법으로 Quasi우도추정법이 조건부 최소제곱추정법보다 우수함을 알 수 있었다.

5. 참고문헌

[1] Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscadastic, *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.

[2] Bustos, O. H. and Yohai, V. J. (1986). Robust Estimates for ARMA Models, *Journal of American Statistical Association*, vol. 81, 155-168.

[3] Denby, L. and Martin, R. D. (1979). Robust Estimation of the First-Order Autoregressive Parameter, *Journal of American Statistical Association*, vol. 74, 140-146.

[4] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscadastic with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, 50, 987-1008.

[5] Godambe, V. P. (1960). An optimum property of regular maximum likelihood estimation equation. *The Annals of Mathematical Statistics* 31, 1208-1211.

[6] Godambe, V. P. (1985). The foundation of finite sample estimation in stochastic processes. *Biometrica* 72, 419-428.

[7] Hall, P. and Heyde, C. C. (1980). Matringale Limit Theory and Applocation, *Academic Press*

[8] Huber, P. J. (1964). Robust Estimation of a Location Parameter, *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 35, 73-101.

[9] Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982). Random Coefficient Autoregressive Models; An Introduction, *Lecture Note in Statistics No 11, Springer*, New York.

[10] Wedderburn, R. P. M. (1974). Quasi-likelihood functions, generalized linear models and the Gauss-Newton method. *Biometrika* 61, 439-447.

[2003년 1월 접수, 2003년 2월 채택]