

혹조인트로 연결된 축계의 비선형 비틀림 진동의 분기해석 : 2-자유도계 모델

Nonlinear Torsional Oscillations of a System incorporating a Hooke's Joint : 2-DOF Model

장 서 일[†]
SEO IL CHANG

(2002년 2월 18일 접수 : 2003년 3월 12일 심사완료)

Key Words : Hooke's Joint(혹조인트), Nonlinear Oscillation(비선형진동), Combination Resonance(조합공진)

ABSTRACT

Torsional oscillations of a system incorporating a Hooke's joint are investigated by adopting a nonlinear 2-degree-of-freedom model. Linear and Van der Pol transformations are applied to obtain the equations of motion to which the method of averaging can be readily applied. Various subharmonic and combination resonances are identified with the conditions of their occurrences. Applying the method of averaging leads to the reduced amplitude- and phase-equations of motion, of which constant and periodic solutions are obtained numerically. The periodic solution which emerges from Hopf bifurcation point experiences period doubling bifurcation leading to infinite solution rather than chaotic solution.

1. 서 론

혹조인트는 구동계의 두 축 사이에서 비틀림 모멘트를 전달하는 요소들 중 하나이다. 잘 알려진 입력각과 출력각 사이의 기구학적 관계는 입력축의 속도가 일정하더라도 출력축의 속도는 주기적으로 변화하며 이러한 현상으로 인해 특정한 입력속도 구간에서 유연한 축의 심한 축진동이 발생할 수 있다는 사실은 널리 알려져 있다.^(1, 2)

이러한 축진동이 발생할 수 있는 입력속도 구간을 예측하기 위해 1-자유도계 모델이 Porter⁽¹⁾에 의해 고안되었다. 그 모델에 따른 비선형 운동방정식이 유도되었으며 Floquet 이론⁽³⁾에 의해 안정선도(stability chart)를 입력회전속도와 두 축의 경사각도의 평면상에서 구했다. Porter와 Gregory⁽⁴⁾는 Kryloff와

Bogoliuboff의 고전적인 방법을 위의 모델의 비선형 운동방정식에 적용해 응답곡선을 구했으며 복수의 응답이 공존하며 도약현상이 발생할 수 있다는 것을 보였다.

Chang⁽⁵⁾은 위의 비선형 운동방정식을 섭동법의 적용이 용이한 형태로 변환하였으며 매개변수가진력(parametric excitation)과 외부가진력(external excitation)이 동시에 존재하는 시스템의 성격을 더 명확히 검증하였다. Strained parameter 방법⁽³⁾을 적용하여 안정선도를 구했으며 고차의 평균법을 적용하여 응답곡선을 구했다. 평균법에 의해 구해진 진폭과 위상의 방정식의 해와 매니폴드(manifold)를 위상평면 상에서 구현하고 초기조건에 따라 무한대의 응답이 가능하다는 것을 보였다.

2-자유도계 모델은 Porter⁽⁶⁾에 의해 고안되어 두 개의 연성된 비선형운동방정식이 유도되었다. 1-자유도계 모델에 적용한 것과 유사한 과정을 통해 응답곡선을 구했으며 1-자유도계의 경우와 유사한 결과를 얻었다. 이 운동방정식은 해당하는 안정선도와 응답을 얻기위해 연구되어져왔으며^(7, 8) 조합(combination)공진의 경우 그 응답에 대한 연구가 행해졌다. 그러나

[†] 책임저자, 정회원, 서울시립대학교 환경공학부
E-mail : schang@uos.ac.kr
Tel : (02) 2210-2177, Fax : (02) 2244-2245

대부분이 수치해석적인 방법이 사용되어졌으며 다양한 공진현상에 대한 이론적이고 체계적인 검증이 결여되어 있었다.

본 논문의 목적은 위의 2-자유도계 모델의 운동방정식을 더 체계적으로 분석하고 가능한 아조화(subharmonic)공진과 조합공진을 검증하고 특정공진의 조건 하에서 어떠한 응답곡선과 특성을 가질 수 있는가를 연구하는 것이다.

2. 운동방정식의 변환 및 가능한 공진의 검증

Fig. 1은 후조인트로 연결된 두 개의 축으로 이루어진 동역학 시스템을 보여주고 있다. 여기에서 θ 는 두 축의 엇각, Ω 는 입력축의 각속도, α_1, β 는 각각 후조인트의 입력, 출력각, α_2 는 시스템의 출력각, S_1, S_2 는 각각 입력축과 출력축의 비틀림탄성도(torsional stiffness), I_1, I_2 는 각각 입력축과 출력축의 관성모멘트를 나타낸다. 이 시스템의 댐핑은 선형 점성댐핑상수 C_1, C_2 에 의해 결정된다고 가정한다. 축의 질량은 무시할만하고 Fig. 1의 운동방정식은 Porter⁽⁶⁾에 의해 다음과 같이 유도되어졌으며 벡터형태로 표현하면 다음과 같다.

$$M\ddot{X} + KX = \epsilon F(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) + O(\epsilon^2), \quad (1)$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} \omega_{11}^2 & -\omega_{21}^2 \\ 0 & \omega_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

$$f_1 = \left[\frac{1}{2} \omega_{21}^2 y \cos(2x + 2\Omega t) - 2\mu_{11}\omega_{11}(\dot{x} + \Omega) \right], \quad (2)$$

$$f_2 = \left[(\dot{x} + \Omega)^2 \sin(2x + 2\Omega t) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \dot{x} \cos(2x + 2\Omega t) - 2\mu_{22}\omega_{22}(\dot{x} + \dot{y} + \Omega) \right]$$

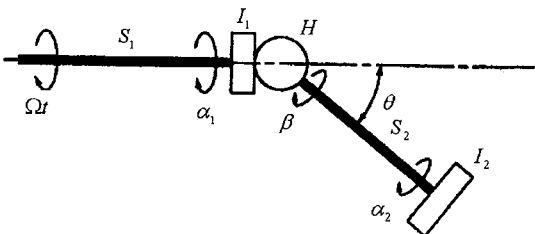


Fig. 1 Hooke's joint system

식 (1)의 도트(')는 시간 t 에 대한 미분을 나타내며, 식 (2)의 기호의 정의는 다음과 같다.

$$x = \alpha_1 - \Omega t, \quad y = \alpha_2 - \beta,$$

$$\omega_{11}^2 = S_1/I_1, \quad \omega_{21}^2 = S_2/I_1, \quad \omega_{22}^2 = S_2/I_2,$$

$$C_1/I_1 = 2\epsilon\mu_{11}\omega_{11}, \quad C_2/I_2 = 2\epsilon\mu_{22}\omega_{22},$$

$$\epsilon = \sin^2\theta$$

식 (1)은 2개의 2차 비선형 상미분방정식이며 비선형 항들뿐만 아니라 선형항들도 연성되어 있다. 섭동법의 적용에 적합한 형태로 변환하기 위해 적절한 선형변환을 적용하고 삼각함수들을 테일러 급수로 대치하면 $O(\epsilon^0)$ 에서 선형적으로 비연성된 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\dot{r} + \tilde{K}r = \epsilon G(r, \dot{r}, \ddot{r}, t) + O(\epsilon^2) \quad (3)$$

식 (3)에서

$$r = P^{-1}X = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K} = P^{-1}M^{-1}KP = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix},$$

$$G = P^{-1}M^{-1}F = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix},$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2 + \omega_{21}^2 \mp \sqrt{(\omega_{21}^2 + \omega_{11}^2 + \omega_{22}^2)^2 - 4\omega_{11}^2\omega_{22}^2}), \quad (4)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$p_1 = \frac{\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 - \omega_1^2}{\omega_{11}^2}, \quad p_2 = \frac{\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 - \omega_2^2}{\omega_{11}^2}$$

식 (3)의 함수 $G(r, \dot{r}, \ddot{r}, t)$ 는 2차(quadratic)의 비선형항만을 포함하고 있으며 $O(\epsilon)$ 에서 관성 항이 연성되어 있으므로 r_1, r_2 가 미소하다는 가정 하에 다음 식과 같은 표준형(standard)으로 변환할 수 있다.

$$\dot{r} + \tilde{K}r = \epsilon H(r, \dot{r}, t) + O(\epsilon^2) \quad (5)$$

식 (5)에서

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix},$$

$$h_1 = C_1\mu_{11} + C_2\mu_{22} + C_3\sin 2\Omega t$$

$$+ \sin 2\Omega t [C_4\dot{r}_1 + C_5\dot{r}_2]$$

$$\begin{aligned}
 &+ C_6 \dot{r}_1^2 + C_7 r_1 \dot{r}_2 + C_8 \dot{r}_2^2 \\
 &+ C_9 \dot{r}_1^2 + C_{10} \dot{r}_2^2 + C_{11} \dot{r}_1 \dot{r}_2 \\
 &+ \cos 2\Omega t [C_{12} r_1 + C_{13} r_2 + C_{14} r_1 \dot{r}_1 \\
 &+ C_{15} r_2 \dot{r}_2 + C_{16} r_1 \dot{r}_2 + C_{17} \dot{r}_1 r_2] \\
 &+ C_{18} \dot{r}_1 + C_{19} \dot{r}_2,
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 h_2 = & D_1 \mu_{11} + D_2 \mu_{22} + D_3 \sin 2\Omega t \\
 &+ \sin 2\Omega t [D_4 \dot{r}_1 + D_5 \dot{r}_2 + D_6 \dot{r}_1^2 + \\
 &D_7 r_1 r_2 + D_8 \dot{r}_2^2 + D_9 \dot{r}_1^2 + D_{10} \dot{r}_2^2 + D_{11} \dot{r}_1 \dot{r}_2] \\
 &+ \cos 2\Omega t [D_{12} r_1 + D_{13} r_2 \\
 &+ D_{14} r_1 \dot{r}_1 + D_{15} r_2 \dot{r}_2 \\
 &+ D_{16} r_1 \dot{r}_2 + D_{17} \dot{r}_1 r_2] + D_{18} \dot{r}_1 + D_{19} \dot{r}_2,
 \end{aligned} \tag{7}$$

식 (6)과 식 (7)의 C_i , D_i 는 시스템의 물리량으로부터 결정되는 계수이다. 식 (6)과 식 (7)을 관찰해보면 외부(external)가진력과 매개변수(parametric)가진력이 같이 존재하며 매개변수가진력은 선형뿐만 아니라 2차의 비선형매개변수가진력이 있다는 것을 알 수 있다. 테일러 급수로 대치할 때 3차(cubic) 이상의 항도 포함시키는 경우 그 이상의 비선형 매개변수가진력이 존재한다. 또한 매개변수가진력 외에는 비선형항이 존재하지 않기 때문에 내부공진(internal resonance)을 기대할 수 없다는 것도 알 수 있다. 아조화공진과 조합공진의 가능성을 검토해본 결과 다음과 같은 경우가 가능하다는 것을 결론 내릴 수 있다. 선형항들에 의해 가능한 공진은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Omega &\approx \omega_1, \quad \Omega \approx \omega_2, \\
 \Omega &\approx \frac{\omega_2 \pm \omega_1}{2}, \\
 \omega_1 &\approx \omega_2
 \end{aligned} \tag{8}$$

식 (8)의 첫 번째와 두 번째 조건은 아조화공진, 또는 primary parametric resonance의 조건이며 세 번째는 합, 차의 조합공진의 조건이다. 네 번째는 내부공진의 조건처럼 보일 수 있으나 연성된 선형담핑과 관련된 것으로 전술한 바와 같이 일반적인 내부공진 현상은 존재하지 않는다.

비선형항들에 의해 가능한 공진은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Omega &\approx \frac{\omega_1}{2}, \quad \Omega \approx \frac{\omega_2}{2}, \\
 \Omega &\approx \frac{3}{2} \omega_1, \quad \Omega \approx \frac{3}{2} \omega_2, \\
 \Omega &\approx \frac{\omega_2 \pm 2\omega_1}{2}, \quad \Omega \approx \frac{2\omega_2 \pm \omega_1}{2}
 \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)의 첫 4개 조건은 비선형 매개변수가진에 의해 발생할 수 있는 아조화공진이며 마지막 2개 조건은 합, 차의 조합공진이다. 식 (8)과 식 (9)에서 볼 수 있는 것처럼 다양한 종류의 공진의 가능성이 있으며 2개 이상의 조건이 동시에 만족되어질 수도 있다. 2차의 비선형항들만을 포함시킨 경우에 발생할 수 있는 공진 현상들만을 검토하였으며 3차 이상의 비선형항들을 고려한다면 더 다양한 공진조건들을 얻을 수 있다.

전술한 공진 조건 중 식 (8)의 안정선도는 수치 해석적 방법과 이론적인 방법에 의해 연구되어 발표^(7, 8) 되었으며, 식 (9)의 비선형항들에 의한 공진 조건에 대한 안정선도에 관해서는 독립된 지속적인 연구가 필요하며 본 논문의 저자에 의해 진행 중이다. 식 (8)의 첫 2개 조건에 해당하는 응답곡선은 Porter⁽⁶⁾에 의해 구해졌으며 조합공진을 고려하지 않았으므로 1자유도 계의 경우와 같은 결과를 얻었다. 전술한 바와 같이 다양한 공진 조건의 조합이 가능하므로 해당하는 응답곡선도 다양하게 존재한다. 예를 들어 Porter가 고려한 식 (8)의 첫 2개 조건 중 하나와 세 번째 조건이 동시에 충족된다면 그에 해당하는 응답곡선은 Porter가 얻은 응답곡선과는 다른 응답곡선이 얻어질 것이다.

이 논문에서는 여러 공진 조건 중 식 (9)의 다음과 같은 예에 대해 그 응답곡선을 구하는 것을 목적으로 한다.

$$\Omega \approx \frac{3}{2} \omega_1, \quad \Omega \approx \frac{3}{2} \omega_2, \quad \Omega \approx \frac{\omega_2 + 2\omega_1}{2} \tag{10}$$

식 (10)이 성립하는 경우 $\omega_1 \approx \omega_2$ 의 조건도 동시에 성립한다.

3. 평균법의 적용 및 응답해석

식 (10)의 조건을 만족하는 경우 식 (5)의 해를 구하기 위해 다음과 같은 시간의 rescaling과 detuning

parameters, σ_1, σ_2 를 도입한다.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{3} \Omega t, \\ \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 (1 - \varepsilon \sigma_1), \\ \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} &= \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} - \varepsilon \sigma_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에 의해 식 (5)는 다음과 같이 변환된다.

$$r'' + \text{Ir} = \varepsilon \overline{\text{H}}(r, r', \tau) + O(\varepsilon^2) \quad (12)$$

식 (12)에서 프라임(')은 시간 τ 에 의한 미분을 의미하며

$$\begin{aligned} \overline{\text{H}} &\equiv \begin{bmatrix} \overline{h}_1 \\ \overline{h}_2 \end{bmatrix}, \\ \overline{h}_1 &= \sigma_1 r_1 + \overline{C}_1 \mu_{11} + \overline{C}_2 \mu_{22} + \overline{C}_3 \sin 3\tau \\ &+ \sin 3\tau [\overline{C}_4 r_1' + \overline{C}_5 r_2' \\ &+ \overline{C}_6 r_1^2 + \overline{C}_7 r_1 r_2 + \overline{C}_8 r_2^2 + \overline{C}_9 r_1'^2 \\ &+ \overline{C}_{10} r_2'^2 + \overline{C}_{11} r_1' r_2'] \\ &+ \cos 3\tau [\overline{C}_{12} r_1 + \overline{C}_{13} r_2 \\ &+ \overline{C}_{14} r_1 r_1' + \overline{C}_{15} r_2 r_2' \\ &+ \overline{C}_{16} r_1 r_2' + \overline{C}_{17} r_1' r_2] + \overline{C}_{12} r_1' + \overline{C}_{13} r_2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \overline{h}_2 &= (\sigma_1 + \sigma_2) r_2 + \overline{D}_1 \mu_{11} + \overline{D}_2 \mu_{22} + \overline{D}_3 \sin 3\tau \\ &+ \sin 3\tau [\overline{D}_4 r_1' + \overline{D}_5 r_2' \\ &+ \overline{D}_6 r_1^2 + \overline{D}_7 r_1 r_2 + \overline{D}_8 r_2^2 + \overline{D}_9 r_1'^2 \\ &+ \overline{D}_{10} r_2'^2 + \overline{D}_{11} r_1' r_2'] \\ &+ \cos 3\tau [\overline{D}_{12} r_1 + \overline{D}_{13} r_2 + \overline{D}_{14} r_1 r_1' \\ &+ \overline{D}_{15} r_2 r_2' + \overline{D}_{16} r_1 r_2' + \overline{D}_{17} r_1' r_2] \\ &+ \overline{D}_{12} r_1' + \overline{D}_{13} r_2' \end{aligned} \quad (14)$$

다음과 같은 van der Pol 변환을 식 (12)에 적용하고,

$$\begin{aligned} r_i &= x_i \cos \tau + y_i \sin \tau + c_{i1} + c_{i2} \cos 3\tau + c_{i3} \sin 3\tau \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \quad (15)$$

평균법⁽³⁾을 이용하면 다음과 같은 1차원 줄어든 진폭의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x_1' &= (c_1 \mu_{11} + c_2 \mu_{22}) x_1 + (c_3 \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma_1) y_1 \\ &+ (c_4 \mu_{11} + c_5 \mu_{22}) x_2 + c_6 \varepsilon y_2 + c_7 x_1^2 + c_8 y_1^2 \\ &+ c_9 x_2^2 + c_{10} y_2^2 + c_{11} x_1 x_2 + c_{12} y_1 y_2, \\ y_1' &= (c_{13} \varepsilon + \frac{1}{2} \sigma_1) x_1 + (c_{14} \mu_{11} + c_{15} \mu_{22}) y_1 \\ &+ c_{16} \varepsilon x_2 + (c_{17} \mu_{11} + c_{18} \mu_{22}) y_2 + c_{19} x_1 y_1 \\ &+ c_{20} x_2 y_2 + c_{21} x_1 y_2 + c_{22} y_1 x_2, \\ x_2' &= (d_1 \mu_{11} + d_2 \mu_{22}) x_1 + d_3 \varepsilon y_1 \\ &+ (d_4 \mu_{11} + d_5 \mu_{22}) x_2 + (d_6 \varepsilon - \frac{1}{2} \sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2) y_2 \\ &+ d_7 x_1^2 + d_8 y_1^2 + d_9 x_2^2 + d_{10} y_2^2 + d_{11} x_1 x_2 + d_{12} y_1 y_2, \\ y_2' &= d_{13} \varepsilon x_1 + (d_{14} \mu_{11} + d_{15} \mu_{22}) y_1 \\ &+ (d_{16} \varepsilon + \frac{1}{2} \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2) x_2 + (d_{17} \mu_{11} + d_{18} \mu_{22}) y_2 \\ &+ d_{19} x_1 y_1 + d_{20} x_2 y_2 + d_{21} x_1 y_2 + d_{22} y_1 x_2 \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)의 프라임(')은 시간 $\varepsilon \tau$ 에 의한 미분을 의미한다. 식 (16)의 이론적인 해를 얻기는 매우 난해하므로 수치해석적인 방법을 사용하여 구하도록 한다. 해석에 사용된 물리적인 양들은 다른 논문⁽⁸⁾의 것들을 사용했음을 밝혀둔다. 식 (16)의 정상상수해(steady-state constant solution)는 $x_1' = y_1' = x_2' = y_2' = 0$ 의 해이며 수치해석도구인 AUTO⁽⁹⁾에 의해 구한 해를 이 논문에 제시한다. Fig. 2는 대표적인 응답곡선을 보여주고 있으며 실선은 안정상수해(stable constant solution)를, 점선은 불안정상수해(unstable constant solution)를, 검은 원은 안정주기해(stable periodic solution)를, 빈 원은 불안정주기해(unstable periodic solution)를 각각 나타낸다. 검은 사각형은 호프(Hopf)분기점을, 빈 사각형은 피치포크(pitchfork)분기점을 나타낸다. 수직축은 4개 진폭의 norm, 즉 $|X| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}$ 을 의미한다. 주기해의 경우는 최대값을 나타낸다. Fig. 2에서 사용된 주요인자들의 값은 $\sigma_2 = 0.0, \varepsilon = 0.15, \mu_{11} = \mu_{22} = 0.03$ 이다.

Fig. 2에서 볼 수 있듯이 안정된 영(zero)의 상수해로부터 피치포크분기를 통해 비영(non-zero)의 응답이 발생하며 이 상수해로부터 호프분기를 통해 주기해가 발생하는 것을 볼 수 있다. 이러한 현상은 2-자유도계 이상의 비선형 시스템에서 흔히 볼 수 있는 현상이다. 호프분기로부터 발생한 주기해는 주기배가

(period doubling) 분기를 거치는 것을 AUTO와 직접적분법에 의해 확인할 수 있었다. 이러한 주기배가분기는 무한히 발생하여 혼돈해(chaotic solution)를 주는 경우가 흔히 발견되었으나 이 경우는 혼돈해 대신 무한해(infinite solution)를 주는 것을 직접적분법에 의해 추정할 수 있었다. 여기서 무한해가 의미하는 것은 과도응답(transient solution)이 어떠한 정상상태

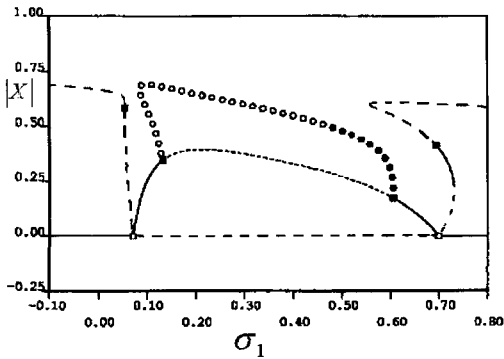


Fig. 2 Bifurcation diagram

로 수렴하지 않고 무한대로 발산하는 것을 의미한다. 직접적분법에 의해 확인한 결과이므로 초기조건을 부적절하게 선택함으로써 생긴 결과일 수도 있으나 다른 연구자⁽¹⁰⁾에 의해 비슷한 사실이 보고된 일이 있다. 무한해가 아닌 주기해로 수렴할 가능성이 없다고 할 수는 없으나 본 저자에 의해 행해진 수치실험으로는 그러한 해를 발견할 수 없었다. 그러나 basin boundary의 구조가 프랙탈(fractal) 구조를 가질 수 있는 가능성도 있으며 따라서 주기해와 혼돈해 등이 존재할 수 있는 가능성은 항상 존재하며 수치실험으로는 그 존재여부에 대해 어떠한 결론도 내릴 수 없음을 밝혀둔다. Fig. 3은 위상평면 상에서의 주기해와 주기배가된 해를 보여주고 있다. 주기해의 분기와 혼돈해의 발생가능성과 혼돈해의 이론적, 수치해석적 연구는 향후의 중요한 연구과제로 남아있다.

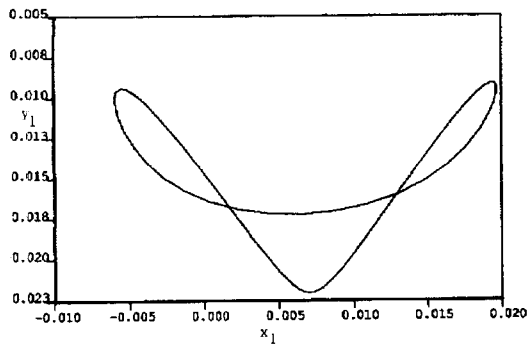
4. 결 론

혹조인트로 연결된 유연한 두 축의 비선형 진동응답을 구하기 위해 섭동법을 운동방정식에 적용하여 가능한 공진현상을 검증하였다. 그 중 특정한 아조화 공진과 조합공진의 조건을 선택하여 평균법에 의해 그 해를 구하고 다양한 분기가 발생하는 것을 확인하였다. 주기해는 호프분기를 통해 발생하며 주기배가분기가 일어나는 것을 확인할 수 있었다.

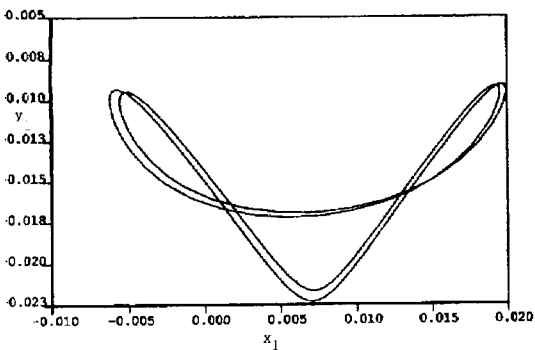
운동방정식의 변환을 통해 얻은 표준형 운동방정식을 검토한 결과 매우 다양한 조합의 아조화 공진과 조합공진의 조합이 가능하다는 것을 알 수 있었다. 과거의 연구⁽⁶⁾는 2-자유도계의 경우에도 조합공진을 제외한 경우였으므로 결과적으로 1-자유도계의 문제로 줄어들었으며, 따라서 1-자유도계의 해와 같은 결과를 얻었다. 또는^(7, 8) 원래의 운동방정식을 수치해석적 방법으로 접근했으므로 체계적인 방법에 의한 공진의 가능성을 검증하지 않았으며 선형항에 의해 가능한 공진만을 고려했다. 다양한 공진의 조합의 가능성과 각 경우의 진동응답에 대한 체계적인 연구는 향후의 중요한 연구대상으로 남아있으며 본 논문에서 사용된 해석과정이 적용되어질 수 있다.

후 기

이 논문은 2001년도 서울시립대학교 학술연구조정



(a)



(b)

Fig. 3 Periodic responses and period doubling

비에 의하여 연구되었음. 본 논문의 심사과정에서 발전적인 의견을 내 주신 심사위원에게 감사드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Porter, B., 1961, "A Theoretical Analysis of the Torsional Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 3, pp. 324~329.
- (2) 이창노, 김효준, 2002, "센터 베어링으로 지지된 추진축을 갖는 구동계의 차량 출발시 진동해석," *한국소음진동공학회논문집*, 제 12 권, 제 12 호, pp. 929~934.
- (3) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience.
- (4) Porter, B. and Gregory, W., 1963, "Non-linear Torsional Oscillation of a System Incorporating a Hook's Joint," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 5, pp. 191~200.
- (5) Chang, S. I., 2000, "Torsional Instabilities and Non-linear Oscillation of a System Incorporating a Hooke's Joint," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 229, No. 4, pp. 993~1002.
- (6) Porter, B., 1964, "Non-linear Torsional Oscillation of a Two-degree-of-freedom System Incorporating a Hooke's Joint," *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, Vol. 277, pp. 92~106.
- (7) Asokanthan, S. F. and Wang, X.-H., 1996, "Characterization of Torsional Instabilities in a Hooke's Joint Driven System via Maximal Lyapunov Exponents," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 1, pp. 83~91.
- (8) Asokanthan, S. F. and Meehan, P. A., 2000, "Non-linear Vibration of a Torsional System Driven by a Hooke's Joint," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 2, pp. 297~310.
- (9) Doedel, E., 1986, *AUTO : Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations*, Department of Applied Mathematics, California Institute of Technology.
- (10) Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B., 2002, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Ltd.