

시간응답 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID제어기 설계

Design of PI, PD and PID Controllers with Time Response Specifications

김근식, 조태신, 김영철
(Keunsik Kim, Taeshin Cho, and Youngchol Kim)

Abstract : This paper considers the problem of determining a set of PI, PD and PID controller gains, for a given linear time invariant plant, that meets or exceeds the closed loop step response specifications. The proposed method utilizes two recent results: for a given system, (1) finding a set of stabilizing PI, PD and PID gains and (2) the relationship between time response (overshoot and speed) and the coefficients of the characteristic polynomial. The method allows us to extract a subset of PI, PD and PID gains that meets stability as well as time domain performance requirements. The intersections of two dimensional sets described by linear and quadratic inequalities in the controller design space are need to be identified through numerical computation. The procedure is illustrated by examples.

Keyword : PI, PD, PID, CRA, characteristic ratios

I. 서론

제어기 설계에서 가장 기본적으로 고려하는 설계규격 중의 하나는 오버슈트나 정착시간과 같은 시간영역 과도응답 특성임에도 불구하고, 2차 이상의 고차시스템에 대해서는 해석적인 표현방법이 아직 알려져 있지 않기 때문에 주로 2차 시스템으로 근사화하여 문제를 다루고 있다. 예를 들어, 고차 시스템의 감쇠율을 흔히 모든 극이 위치하는 가장 작은 섹터 영역으로 정의하여 사용하지만 과도응답 특성과 극점 위치와의 관계는 아직 분명하게 밝혀지지 않고 있다. 이러한 이유로 고전적 제어에서는 많은 경우, 이득여유와 위상여유 그리고 대역폭 등을 고려함으로써 간접적으로 과도응답 특성을 해석하고 있다.

한편, 특성근이 아닌 특성다항식의 계수로부터 직접 시스템의 시간응답 특성과의 관계를 찾으려는 시도가 있었는데, Naslin[1,2]은 특성다항식 계수에 의해 특성비(characteristic ratios)와 펄세탄스(pulsatance)를 정의하고 관측에 의한 결과이지만 특성비가 단위 스텝응답의 오버슈트와 밀접한 관계가 있음을 제시하였다. 영점을 갖지 않는 시스템(all-pole systems: APS)에 대해 특성다항식의 특성비가 일치한다면 이들 시스템의 스텝응답 특성은 거의 일치한다는 것을 보여주었다. 그러나 Naslin의 발견은 1960년대 초 상태공간이론의 등장으로 학계의 주목을 받지 못하였다. 1990년대에 이르러 Manabe[3]는 특성비에 근거한 계수도법(coefficient diagram method)을 창안하였다. 계수도는 대수-선형 척도(logarithm-linear scale) 상에 플랜트 전달함수의 계수, 특성다항식의 계수, 특성비와 등가 시정수를 나타낸 것으로

Lipatov 안정도 조건[4]에 근거한 페루프 안정도, 페루프 제동특성, 시간응답의 속응성 등을 동시에 알 수 있기 때문에 원하는 과도응답특성을 갖는 목표특성다항식을 구하기가 용이하다. 그는 여러 가지 실제 제어기 설계문제에 이 방식을 성공적으로 적용하였으나 특성비와 제동특성의 관계는 여전히 경험적인 사실에 근거하고 있다. 최근 Kim 등[5]은 주 펄세탄스(principal pulsatance)가 일반화 시정수(generalized time constant) τ 의 성질을 갖으며, 특성비와 독립적으로 선택하여 임의 차수의 APS를 구성할 수 있음을 보였다. 또한, Butterworth filter의 성질을 확장하여 안정하고 원하는 제동특성을 갖게 하는 목표 특성다항식의 구성 방법을 제시하였는데 단지 주 특성비(principal characteristic ratio) α_1 과 τ 에 의해 이루어진다. 이를 이용한 제어기 설계 방법을 특성비지정법(characteristic ratio assignment: CRA)이라 부른다.

본 논문에서는 CRA를 이용한 PI, PD, PID 제어기 설계 문제를 다루고자 한다. 그런데 이 경우에는 임의 차수의 선형플랜트에 대해 CRA로 목표 시스템(target model)을 선정하였더라도 제어기의 차수가 한정되어 있기 때문에 정합시키지 못할 수 있다. 다시 말해, 저차 제어기로는 정합시킬 수 있는 목표 특성다항식의 계수에 제약이 있다는 것이다. 본문에서 설명되는 바 스텝응답에 지배적으로 영향을 주는 특성비는 특성다항식의 저차 쪽 계수에 대응하는 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이다[6]. 그런데 이 3 가지의 특성비만을 가지고 CRA를 이용할 때 특성다항식의 안정도 조건을 보장하며 저차 제어기를 설계한다는 것은 매우 어려울 수 있다. 다행히 최근에 페루프 시스템을 안정화하는 전체 PI, PD 그리고 PID 파라미터 값을 완전하게 결정할 수 있는 기법이 발표되었다[7]. 본 논문에서는 이를 이용함으로써 저차제어기로 인한 안정도 문제를 해결하게 된다. 즉, 시스템을 안정화 하는 제어기 Set을 결정한 후에 Set 내에서 성능 요구조건과 일치하는 제어기를 선택하는 방식을 취한다. 이는 현

논문접수 : 2002. 12. 4., 채택확정 : 2003. 3. 12.

김근식 : 대전대학 컴퓨터전자전기계열(kskim@dcc.ac.kr)

조태신 : 충북대학교 전자공학과(tscho@cbcon.chungbuk.ac.kr)

김영철 : 충북대학교 전기전자컴퓨터공학부(yckim@cbucc.chungbuk.ac.kr)

* 이 연구는 한국과학재단 지역우수대학 우수과학자 지원연구사업(과제번호 : R05-2002-00-913-0)에서 지원하여 연구하였습니다.

대제어의 한 정형이라 할 수 있다[8, 9]. 따라서 Ho 알고리즘[7]을 이용하여 먼저 주어진 선형 시스템을 안정화 시키는 전체 PID(또는, PI, PD) 이득을 결정한다. 그리고 원하는 시간응답 특성에 대응하는 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 와 τ 를 선택한 뒤 안정화 PID Set 내에서 이 네 가지 조건을 만족하는 교집합을 구함으로써 설계목표를 달성하는 것이다. 이 문제는 제어기 파라미터의 2차원 공간에서 선형 또는 2차 함수 부등식 조건을 푸는 것과 등가로 나타난다. PID, PI, PD 제어기의 각 경우에 대해 적용 예를 통하여 제시된 방식의 유용성을 보인다.

II. 특성다항식의 특성비와 시간 응답

양의 실수 계수를 갖는 다음과 같은 특성다항식을 고려하자.

$$\delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0. \quad (a_i > 0) \quad (1)$$

특성다항식에 대한 계수의 특성비 α_i 와 일반화시정수 (generalized time constant) τ 는 (2)와 (3)과 같이 각각 정의한다. (이 τ 는 Naslin[2]이 정의한 주 펄세탄스의 역수이고 Manabe[3, 6]의 등가시정수와 동일한 정의이다.)

$$\alpha_1 := \frac{a_1^2}{a_0 a_2}, \quad \alpha_2 := \frac{a_2^2}{a_1 a_3}, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} := \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \quad (2)$$

$$\tau := \frac{a_1}{a_0} \quad (3)$$

특성다항식 $\delta(s)$ 의 모든 계수를 α_i 와 τ 로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_1 = a_0 \tau \quad (4)$$

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{\alpha_{i-1} \alpha_{i-2} \alpha_{i-3} \dots \alpha_2 \alpha_1^{i-1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (5)$$

따라서 (4)과 (5)를 이용하면 α_i, τ, a_0 에 의해 특성다항 $\delta(s)$ 를 역으로 표현할 수 있다. 여기서, $\alpha_1 = \alpha$ 를 주 특성비(principal characteristic ratio)로 부르기로 한다. 먼저, 일반화시정수 τ 에 대한 특성을 요약하기로 한다. 지금까지 1차 시스템이 아니면 시정수의 정의는 명확하지 않았다. 최근에 Kim 등[5]은 위에서 정의한 τ 가 정확하게 시스템의 응답속도에 관계함을 해석적으로 보였다. 이 결과에 따르면 동일한 특성비를 갖는 같은 차수의 APS는 시간응답의 모양을 변화시키지 않고 τ 에 의해 응답속도를 임의로 조절할 수 있다. 즉, 특성비가 동일한 임의의 두 APS에 대하여 일반화시정수가 각각 τ_1, τ_2 이면, 두 시스템의 스텝응답 $y_1(t), y_2(t)$ 는 다음 관계를 갖는다.

$$y_1(t) = y_2\left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \cdot t\right) \quad (6)$$

한편, APS의 제동특성에 대한 극과의 관계, 특성다항식 계수와와의 관계, 주파수크기응답과의 관계 등은 아직도 명확하게 해석적으로 밝혀진 것이 없다. 고전적 제어에서는 대

부분 관측된 사실에 의존하고 있는데, 1950년대 Chestnut[10]이 제시한 선형시스템의 주파수 크기응답과 과도응답과의 관계에 대한 실험적 결과는 오늘날도 여전히 유력하게 활용되고 있다. 이것에 의하면, 스텝응답의 오버슈트는 주파수 크기응답의 첨두치(resonant peak)와 고주파 대역에서의 크기응답의 감쇠율에 관계한다는 것이다. 다시 말해, 첨두치가 작을 뿐만 아니라 고주파 영역에서의 감쇠율이 낮으면 스텝응답의 오버슈트를 작게 하거나 없앨 수 있다고 주장하였다. Butterworth filter는 그 주파수 크기응답이 첨두치를 갖지 않는 대표적인 예이다. 이에 근거하여 Kim 등[5]은 첨두치를 갖지 않으며 또한 고주파 대역에서 감쇠 기울기를 조절할 수 있는 APS 구성방식을 제시하였다.

다음 전극시스템(APS) $G(s)$ 를 고려한다.

$$G(s) = \frac{a_0}{\delta(s)} \quad (7)$$

여기서 α_i 를 $\delta(s)$ 의 특성비라 하자. 그리고 $\delta(s)$ 가 다음 두 조건을 만족하는 α_i 에 의해 구성되었다고 가정한다.

(i) $\alpha_1 > 2$

$$(ii) \alpha_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \alpha_1, \quad k = 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

이 경우 (7)의 주파수 크기응답 $|G(j\omega)|$ 은 주파수에 대해 $|G(j0)| = 1$ 로부터 단조감소하며 $\delta(s)$ 는 항상 안정임을 보였다[5]. 이 경우 α_1 이 증가할수록 고주파 대역에서의 $|G(j\omega)|$ 의 감쇠 기울기는 둔화되는 특성을 갖는다. 이 결과는 임의의 계수 a_0 에 대해 단지 α_1 과 τ 두 파라미터의 선택만으로 안정하며 원하는 제동특성을 갖는 APS를 구성할 수 있음을 의미한다. 이와는 별도로 그들은 $\alpha_i, i \geq 2$ 가 α_1 에 종속되지 않는 조건을 제시하였는데, 모든 α_i 를 2보다 크게 선택하면 $|G(j\omega)|$ 의 단조 감소 특성이 보존됨을 보였다. 또한, α_1 이 증가할수록 고주파 대역에서의 $|G(j\omega)|$ 의 감쇠 기울기는 둔화되며, 모든 α_i 를 2보다 크게 선택하면 (8)과 같이 α_i 에 종속됨이 없이 $|G(j\omega)|$ 의 단조 감소 특성이 보존됨을 보였다. 따라서 이 결과는 임의의 계수 a_0 에 대해 단지 α_1 과 τ 두 파라미터만으로 안정하며 원하는 제동특성을 갖는 APS를 구성할 수 있음을 의미한다. 다음은 위에서 정리한 APS의 스텝응답 오버슈트는 차수에 관계없이 3개의 특성비 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 에 의해 지배적인 영향을 받는다는 것을 설명하고자 한다. 다음과 같이 (7)의 전달함수에 대한 제곱주파수 크기응답을 고려한다.

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{\delta(j\omega)\delta(-j\omega)} = \frac{1}{\bar{Q}^2(\omega)} \quad (9)$$

(9)를 간단히 하기 위하여 다음과 같은 기호를 정의한다.

$$\Delta_i^j = \begin{cases} \prod_{k=i, i < j}^j \alpha_k, & \text{if } i < j \\ \alpha_i & \text{if } i = j \end{cases} \quad (10)$$

(4), (5), (10)을 이용하면 $\bar{Q}^2(\omega)$ 는 다음과 같이 표현할

수 있다.

$$\bar{Q}^2(w) = 1 + \eta_1 \tau^2 w^2 + \frac{\eta_2 \tau^4}{(\Delta_1^1)^2} w^4 + \frac{\eta_3 \tau^6}{(\Delta_1^1 \Delta_1^2)^2} w^6 + \dots + \frac{\eta_n \tau^{2n}}{(\Delta_1^1 \Delta_1^2 \Delta_1^3 \dots \Delta_1^{n-1})^2} w^{2n} \quad (11)$$

여기서

$$\eta_k := 1 - \frac{2}{\alpha_k} + \frac{2}{\alpha_k \Delta_{k-1}^{k+1}} - \frac{2}{\alpha_k \Delta_{k-1}^{k+1} \Delta_{k-2}^{k+2}} + \dots + (-1)^k \frac{2}{\alpha_k \prod_{j=1}^{k-1} \Delta_{k-j}^{k+j}} \quad (12)$$

이제 (9), (11)의 각 항을 주파수에 대하여 유사-점근선도 (pseudo-asymptotic diagram)로 나타내면 그림 1과 같다.

그림 1에서 인접한 유사-점근선간에 교점 주파수를 다음과 같이 정의한다.

$$w_i := \sqrt{\frac{\eta_i}{\eta_{i+1}}} \cdot \frac{\Delta_1^i}{\tau}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (13)$$

여기서 $\eta_0 = 1$ 이고 $\Delta_1^0 = 1$ 이다. 교점 주파수간의 거리 $l := \log w_i - \log w_{i-1}$ 로 표현하면 (13)으로부터 각각의 교점 주파수간 간격을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

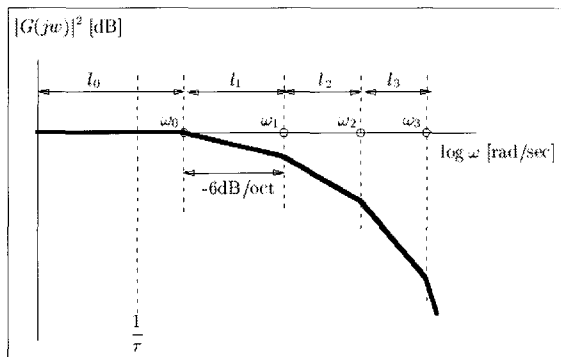


그림 1. $|G(jw)|^2$ 의 유사-점근선도.

Fig. 1. Pseudo-asymptotic diagram of $|G(jw)|^2$.

$$l_0 = -\left(\log \tau + \frac{1}{2} \log \eta_1\right) \quad (14)$$

$$l_i = \log \eta_i - \frac{1}{2} (\log \eta_{i-1} + \log \eta_{i+1}) + \log \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (15)$$

(12)로부터 α_i 를 2보다 충분히 크게 증가시키면 모든 $i = 1, 2, \dots, n-1$ 에 대하여 $\eta_i \approx \eta_{i+1}$ 가 됨을 알 수 있다. 이러한 조건아래 모든 i 에 대하여 $l_i \approx \log \alpha_i$ 가 되고 $w_i < w_{i+1}$ 가 된다. 예로서, $\alpha_1 = 2.8$, $n = 7$ 이면 (8)에 의해 특성비는 다음과 같고,

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_6] = [2.8 \ 2.18 \ 2.02 \ 2.02 \ 2.18 \ 2.8]$$

(12), (13)에 의해 w_i 를 계산하고 w_i/w_{i-1} 를 구하면

$$[w_1/w_0 \dots w_6/w_5] = [2.03 \ 1.83 \ 1.78 \ 1.78 \ 1.83 \ 2.03]$$

로 근사적으로 2배 정도이다. 그런데, 시스템의 응답 관점에서 보면 주파수응답의 크기가 대개 -20[dB]이하의 신호들은 그 영향을 무시할 수 있기 때문에 $0 \sim w_3$ 까지 주파수 대역이 주도적인 영향을 줄을 알 수 있다. 따라서 τ , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 값이 나머지 α_i 보다 시간영역에서 응답특성에 지배적인 영향을 주게 된다. τ 는 l_0 만의 함수이므로 대역폭 혹은 응답속도와 관련 있음을 알 수 있다. 다음 예제 1은 이를 설명한다.

예제 1. 표 1에 주어진 특성비를 갖는 7차의 3 가지 APS를 고려한다.

표 1. 7차 시스템에 대한 특성다항식 계수의 특성비.

Table 1. Characteristic ratios of 7th order systems.

시스템	차수	τ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
#1	7	1	2.265	1.761	1.636	1.636	1.761	2.265
#2	7	1	2.265	1.761	1.350	1.636	1.761	2.265
#3	7	1	2.265	1.761	1.636	1.350	1.761	2.265

(8)에 의해 얻어진 #1 시스템을 기준으로 #2와 #3는 각각 α_3 와 α_4 의 값을 변화시킨 경우이다. 이 때 α_3 와 α_4 값은 시스템의 안정도를 벗어나지 않는 범위 내에서 가급적 작은 값을 택하였다. 그림 2에서와 같이, #1과 #3 시스템의 스텝응답은 매우 유사한 결과를 보이지만, #2 시스템, 즉 α_3 값을 작게 하였을 경우에는 아주 다른 응답 특성을 보여주고 있다.

그림 3은 각 경우의 주파수 크기응답이다. 앞에서 언급한 바와 같이, 고주파수 대역에서 주파수크기응답이 급격한 감쇠 기울기를 갖거나 혹은 굽어지는 모양(bending mode)을 포함하는 경우에는 스텝응답의 오버슈트나 진동을 일으키게 된다[5, 10]. 그런데, $i \geq 4$ 인 고차 α_i 에 대하여는 시스템이 안정하기만 하면 이 값들이 작은 값이라 하더라도 스

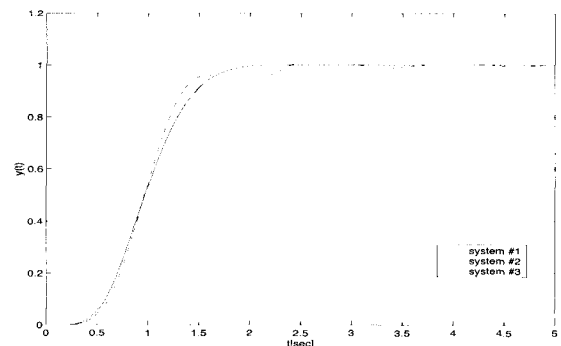


그림 2. 7차 시스템에 대한 스텝응답 특성.

Fig. 2. Step response of all pole systems of $n=7$.

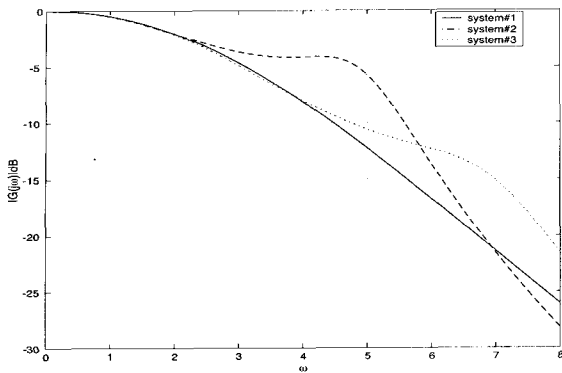


그림 3. 예제 1의 시스템에 대한 주파수 크기 응답
Fig. 3. Frequency magnitude responses of all pole systems in Example 1.

탐응답에 거의 영향을 주지 않음을 관찰할 수 있다. 아울러 임의의 고차 시스템에 대하여도 유사한 결과를 관찰 할 수 있다. ■

지금까지 시간영역에서 스텝응답특성에 지배적인 영향을 주는 특성계수는 $\tau, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 이고 나머지 α_i 의 영향은 무시할 수 있다는 것을 보였다. 이제 시간영역 성능 요구조건인 최대 오버슈트와 정착시간 규격을 만족하는 4개 파라미터($\tau, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$)의 셋을 구하는 문제를 다루기로 한다. (8)에 의해 얻어진 응답조건을 만족하는 하나의 기준우세특성비를 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 라고 표기하기로 하고, 또 일단 특성비가 주어지면 일반화시정수는 임의의 원하는 정착시간을 갖도록 독립적으로 선택할 수 있으므로[5] 대응하는 τ 의 하한, 상한치를 τ^-, τ^+ 라 놓는다. 수치적, 정성적으로 이 문제에 접근하고자 하며 먼저 다음예제를 이용하기로 한다.

예제 2. 예제 1에서와 같은 7차의 전극 시스템을 고려하기로 한다. 표 2에서 #1은 (8)을 이용하여 구한 오버슈트를 갖지 않는 시스템의 기준특성비(α_i^*)이다. 그리고 #2, #3, #4 시스템은 #1시스템을 기준으로 우세특성비 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 값을 차례로 각각 2.5배 증가시킨 경우이다.

표 2. 증가된 우세특성비 값.
Table 2. Dominant characteristic ratios increment.

시스템	차수	τ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
#1	7	1	2.265	1.761	1.636	1.636	1.761	2.265
#2	7	1	5.663	1.761	1.636	1.636	1.761	2.265
#3	7	1	2.265	4.402	1.636	1.636	1.761	2.265
#4	7	1	2.265	1.761	4.091	1.636	1.761	2.265

이 값 이상으로 α_i^* 를 증가시켜도 거의 같은 결과를 나타내기 때문에 여기서는 이 경우만 보이기로 한다. 더욱이 예제 1에서 나타난 바와 같이 $i \geq 4$ 인 고차 α_i^* 의 증가에 대해

서는 응답에 별 영향을 보이지 않아서 여기서는 생략하였다. 그림 4는 각 시스템에 대한 스텝응답으로, 우세특성비를 충분히 증가시켜도 오버슈트는 기껏해야 최대 4%를 초과하지 않는 것으로 나타났다. 그림 5는 각 경우의 주파수 크기응답으로써, 고주파수 대역에서 증가시킨 특성비에 따라 주파수크기응답의 감쇠기울기가 변하는 것을 보여준다. #4의 경우가 가장 급격한 감쇠율 변화를 보였으며 이에 대응하여 스텝응답의 오버슈트가 가장 크게 증가하였으나 절대크기는 미미하다고 할 수 있다. ■

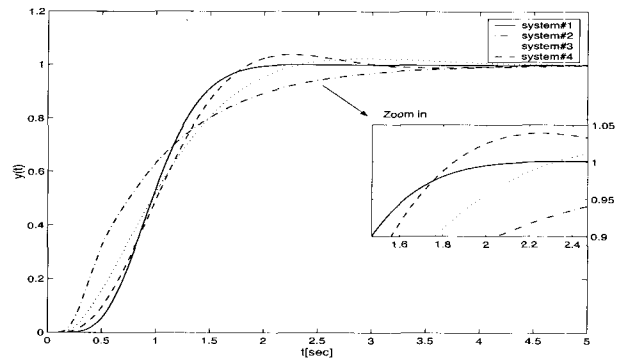


그림 4. 표 2 시스템의 스텝응답 특성.
Fig. 4. Step responses of systems in Table 2.

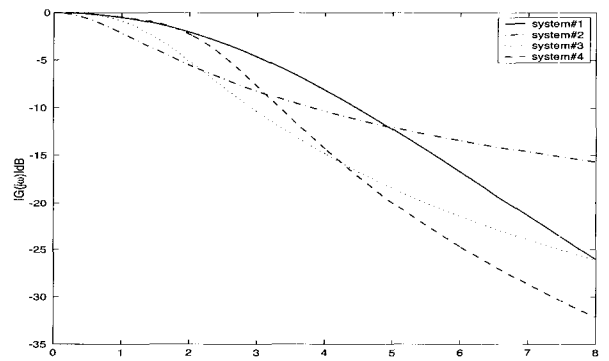


그림 5. 표 2의 시스템의 주파수 크기 응답.
Fig. 5. Frequency magnitude responses of systems in Table 2.

위의 7차 시스템에 대한 우세특성비의 제동특성은 임의의 고차시스템의 경우에도 유사한 결과를 관찰할 수 있다. 앞서 그림 1에서 보여준 바와 같이 유사점근선의 교점주파수는 보드선도의 꺾임주파수(Breakpoint)에 대응하며 이들 사이의 간격은 (15)와 같이 특성비에 비례한다. 이러한 정성적 특성과 예제2의 수치해적 관찰에 의해 비록 비 오버슈트조건을 보장하지는 않지만 어떤 APS가 $\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \alpha_3 \geq \alpha_3^*$ 부등식 조건을 만족하는 특성다항식을 갖는다면 그런 시스템은 기준특성비($\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$)를 갖는 시스템과 유사하거나 그 이상인 제동특성을 갖는 것으로 분류될 수 있다. 일단 특성비가 결정되면 APS의 정착시간은 (6)에 의해 특성비와 독립적으로 일반화시정수 τ 에 의해 결정할 수 있으므로 하한치 τ^- 에 의해 한정된다. 그런데,

폐루프 시스템이 영점을 가지면 응답속도는 오버슈트와 관계되므로 상한치 τ^+ 로 한정한다. 이것을 정리하면 시간영역 응답 설계조건을 만족하는 목표시스템의 셋은 다음 부등식 조건으로 나타낼 수 있다.

$$\alpha_1 \geq \alpha_1^*, \alpha_2 \geq \alpha_2^*, \alpha_3 \geq \alpha_3^*, \tau^- \leq \tau \leq \tau^+. \quad (16)$$

III. 시간영역 규격을 만족하는 PI, PD, PID 이득 셋 결정

본 장에서는 시간영역 규격을 만족하는 PI, PD, PID 이득 셋을 구하는 방법을 기술한다. 먼저 주어진 플랜트 모델에 대해 Ho가 제시한 방법[7]을 이용, 시스템을 안정화시키는 PI, PD, PID 제어기 이득의 전체 셋을 구한다. 제어기의 파라미터 공간에서 시간응답 규격을 만족시키는 특성비 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 와 τ 에 대한 부등식 조건을 도출하고, 이것을 안정화 셋에 적용하여 교집합을 구함으로써 최종 시간영역 설계 규격을 만족하는 PI, PD, PID 이득 셋을 얻는다. PID 부터 차례로 PI, PD 제어기 셋을 구하는 방식을 정리한다.

1. PID 제어기

일반적인 Cascade 구조의 PID 제어시스템은 폐루프 전달함수에 제어기의 영점이 추가되기 때문에 오버슈트의 발생을 피하기가 어렵다. 이와 달리 그림 6에 나타낸 소위 I-PD 구조는 전체 전달함수에 영점이 추가되지 않는 장점을 가지기 때문에 오버슈트를 피해야 하는 경우에 흔히 사용되는 구조이다. 본 논문에서도 이 구조를 PID 제어기의 기본 구조로 고려한다.

플랜트 전달함수와 제어입력은 다음과 같다.

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{n_q s^q + n_{q-1} s^{q-1} + \dots + n_1 s + n_0}{d_p s^p + n_{p-1} s^{p-1} + \dots + d_1 s + d_0}, \quad (17)$$

$q \leq p$

$$U(s) = \frac{k_i}{s} E(s) - (k_p + k_d s) Y(s) \quad (18)$$

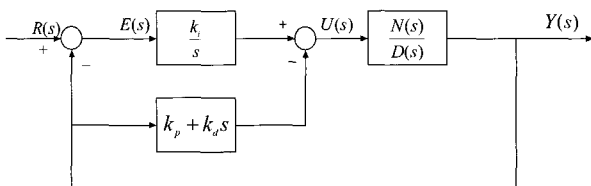


그림 6. I-PD 구조를 갖는 제어 시스템.
Fig. 6. Feedback control system with I-PD structure.

폐루프 특성다항식과 세 특성비, 일반화 시정수는 다음과 같다.

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_p s + k_d s^2)N(s) \quad (19)$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = \frac{(d_0 + k_i n_1 + k_p n_0)^2}{k_i n_0 (d_1 + k_i n_2 + k_p n_1 + k_d n_0)}, \quad (20)$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} = \frac{(d_1 + k_i n_2 + k_p n_1 + k_d n_0)^2}{(d_0 + k_i n_1 + k_p n_0)(d_2 + k_i n_3 + k_p n_2 + k_d n_1)}, \quad (21)$$

$$\alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2 a_4} = \frac{(d_2 + k_i n_3 + k_p n_2 + k_d n_1)^2}{(d_1 + k_i n_2 + k_p n_1 + k_d n_0)(d_3 + k_i n_4 + k_p n_3 + k_d n_2)}, \quad (22)$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} = \frac{d_0 + k_i n_1 + k_p n_0}{k_i n_0} = \left(k_p + \frac{d_0}{n_0}\right) \frac{1}{k_i} + \frac{n_1}{n_0}. \quad (23)$$

먼저, M.T. Ho[7]의 알고리즘을 사용하여 (19)를 안정하게 하는 PID의 모든 이득의 셋을 구해야 하는데, 이 셋은 k_p 의 영역과 (k_i, k_d) 평면으로 나누어 표현된다. Ho에 따르면 안정화 PID 셋은 안정 범위에 있는 고정된 k_p 값에 대하여 (k_i, k_d) 부분셋(subset)은 항상 볼록 다각형(convex polygon)형태로 나타난다. 이를 계산하는 방법의 구체적인 내용은 문헌 [7]을 참조하기로 한다. 이제 폐루프 시스템을 안정하게 하는 PID 전체 셋을 K 로 표시하기로 하자. 또한 시간영역 성능 요구조건인 최대 오버슈트 규격을 만족하도록 하기 위하여 최소 특성비를 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 로 놓고 (17)를 만족하는 PID 이득의 부분셋을 각각 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{(k_p, k_i, k_d), \alpha_1 \geq \alpha_1^*\} \\ K_2 &:= \{(k_p, k_i, k_d), \alpha_2 \geq \alpha_2^*\} \\ K_3 &:= \{(k_p, k_i, k_d), \alpha_3 \geq \alpha_3^*\} \\ K_\tau &:= \{(k_p, k_i, k_d), \tau^- \leq \tau \leq \tau^+\}. \end{aligned} \quad (24)$$

결과적으로, 주어진 시간 영역 성능과 안정도를 만족하는 모든 교집합 영역은 다음과 같다.

$$K^* := K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap K_\tau \cap K. \quad (25)$$

(24)의 부등식의 각 변수를 PID 파라미터로 표현하기로 한다. 먼저 (20)의 α_1 조건은 k_p 를 고정시켰을 때, (k_i, k_d) 평면에서 부등식(26)으로 표현할 수 있다.

$$k_d = \begin{cases} k_d \leq f_1(k_i), & k_i > 0 \\ k_d \geq f_1(k_i), & k_i < 0. \end{cases} \quad (26)$$

여기서 고정된 값 k_p 에 대하여 $f_1(k_i)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f_1(k_i) &:= \frac{(n_1^2 - \alpha_1^* n_0 n_2)}{\alpha_1^* n_0^2} \cdot k_i \\ &+ \frac{(n_0^2 k_p^2 + d_0^2 + 2n_0 d_0 k_p)}{\alpha_1^* n_0^2} \cdot \frac{1}{k_i} \\ &+ \frac{1}{\alpha_1^* n_0^2} (2n_0 n_1 k_p + 2n_1 d_0 - \alpha_1^* n_0 n_1 k_p - \alpha_1^* n_0 d_1) \end{aligned} \quad (27)$$

마찬가지 방법으로 α_2, α_3 에 대한 (24)의 부등식 조건을 PID 파라미터로 표현하면 (k_i, k_d) 에 대한 2차 함수형태로 나타난다. 고정된 k_p 값에 대하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$f_2(k_d, k_i) := x Q_p^T x + 2 q_p x + r_p \leq 0 \quad (28)$$

$$f_3(k_d, k_i) := x Q_\beta^T x + 2 q_\beta x + r_\beta \leq 0. \quad (29)$$

여기서 각 변수는 다음과 같다.

$$x = [k_i \ k_d], \quad Q_p^T = \begin{bmatrix} \alpha_2^* n_1 n_3 - n_2^2 & \frac{\alpha_2^*}{2} n_1^2 - n_0 n_2 \\ \frac{\alpha_2^*}{2} n_1^2 - n_0 n_2 & -n_0^2 \end{bmatrix},$$

$$q_p = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2^*}{2} ((n_0 n_3 + n_1 n_2) k_p + d_0 n_3 + d_2 n_1) \\ -n_2 (n_1 k_p + d_1) \\ \frac{\alpha_2^*}{2} (n_0 n_1 k_p + d_0 n_1) - n_0 (n_1 k_p + d_1) \end{bmatrix}^T,$$

$$r_p = \alpha_2^* (n_0 n_3 k_p^2 + (d_2 n_0 + d_0 n_2) k_p + d_0 d_2) - d_1^2 - n_1^2 k_p^2 - 2 d_1 n_1 k_p,$$

$$Q_\beta^T = \begin{bmatrix} \alpha_3^* n_2 n_4 - n_3^2 & \frac{\alpha_3^*}{2} (n_2^2 + n_0 n_4) - n_1 n_3 \\ \frac{\alpha_3^*}{2} (n_2^2 + n_0 n_4) - n_1 n_3 & \alpha_3^* n_0 n_2 - n_1^2 \end{bmatrix},$$

$$q_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_3^*}{2} ((n_1 n_4 + n_2 n_3) k_p + d_1 n_4 + d_3 n_2) - n_3 (n_2 k_p + d_2) \\ \frac{\alpha_3^*}{2} ((n_1 n_2 + n_0 n_3) k_p + d_3 n_0 + d_1 n_2) - n_1 (n_2 k_p + d_2) \end{bmatrix}^T,$$

$$r_\beta = \alpha_3^* (n_1 n_3 k_p^2 + (d_3 n_1 + d_1 n_3) k_p + d_1 d_3) - d_2^2 - n_2^2 k_p^2 - 2 d_2 n_2 k_p.$$

(24)의 일반화시정수에 대한 부등식은 다음과 같다.

$$\tau^- \leq \left(k_p + \frac{d_0}{n_0} \right) \frac{1}{k_i} + \frac{n_1}{n_0} \leq \tau^+. \quad (30)$$

(26)~(29)는 전형적인 2차원 2차형(quadratic forms)으로 Q, q, r 의 값에 따라 (a)한 점, (b)한 직선, (c)교차하는 두 직선, (d)타원, (e) 쌍곡선, 또는 (f)포물선 등으로 나타남은 잘 알려진 사실이다[11]. 한 예로, 고정된 k_p 값에서 부등식 그림 7과 같다. K^* 는 그림을 통해 도시적으로 구하거나 혹

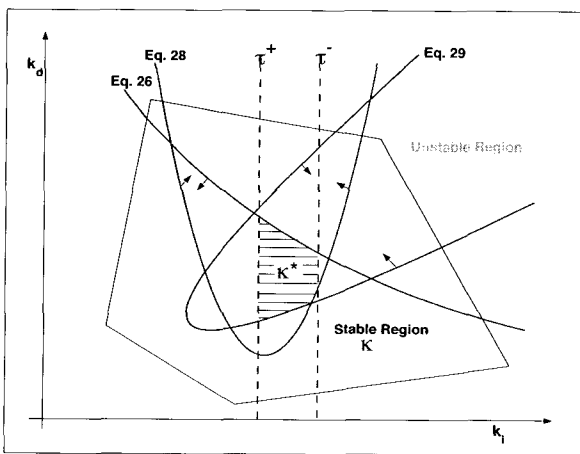


그림 7. 고정된 k_p 에서 (k_i, k_d) 교집합.
Fig. 7. An admissible set of (k_i, k_d) pairs at fixed k_p .

(26)~(30)에 포함된 영역을 (k_i, k_d) 평면에서 표시하면 은 비선형 프로그래밍에 의하여 구할 수 있다. 안정한 전 범위 내에서 k_p 값을 변경시키면서 반복적으로 (k_i, k_d) 부분집합을 계산하면 전체 PID 이득 K^* 를 구하게 된다.

2. PI 제어기

일반적인 Cascade 구조의 PI 제어기도 전체 시스템의 전달함수에 제어기 영점이 추가되어 스텝응답에서 오버슈트를 피하기가 어렵다. 이 문제는 1절에서 사용한 I-PD 구조와 마찬가지로 그림 8과 같은 소위 I-P 구조를 이용함으로써 해결할 수 있다.

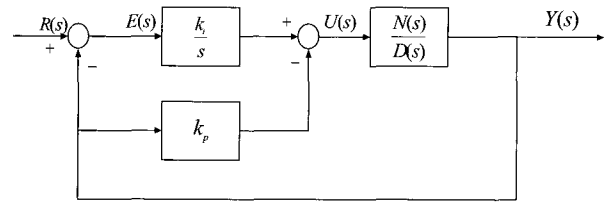


그림 8. I-P 구조를 갖는 제어 시스템.
Fig. 8. Feedback control system with I-P structure.

(17)의 플랜트를 고려하면 특성다항식과 제어입력은 다음과 같다.

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_p s)N(s) \quad (31)$$

$$U(s) = \frac{k_i}{s} E(s) - k_p Y(s) \quad (32)$$

Ho[7]의 결과에 따르면, 안정화 PI 셋은 (k_p, k_i) 평면에서 단순결합 셋(simply connected set)으로 나타나지는 않는다. I-P 제어기 구조를 갖는 시스템에 대한 특성비와 일반화 시정수, 그리고 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \tau^-, \tau^+$ 에 의한 시간응답 설계기준은 PID 제어기를 위해 표현된 (20)~(25)에서 $k_d = 0$ 인 경우와 동일하다. 따라서 (24)의 부등식을 PI 파라미터 항으로 표현하면 (33), (34), (35)과 같이 표현된다. 일반화 시정수 τ 에 관한 부등식 조건은 (30)과 동일하다.

$$g_1(k_p, k_i) := x Q_{g1}^T x + 2 q_{g1} x + r_{g1} \leq 0 \quad (33)$$

$$g_2(k_p, k_i) := x Q_{g2}^T x + 2 q_{g2} x + r_{g2} \leq 0 \quad (34)$$

$$g_3(k_p, k_i) := x Q_{g3}^T x + 2 q_{g3} x + r_{g3} \leq 0 \quad (35)$$

여기서 각 변수는 다음과 같다.

$$x = [k_p, k_i],$$

$$Q_{g1}^T = \begin{bmatrix} -n_0^2 & \frac{\alpha_1^*}{2} n_0 n_1 - n_0 n_1 \\ \frac{\alpha_1^*}{2} n_0 n_1 - n_0 n_1 & \alpha_1^* n_0 n_2 - n_1^2 \end{bmatrix},$$

$$q_{g1} = \begin{bmatrix} -d_0 n_0 \\ \frac{\alpha_1^*}{2} d_1 n_0 - d_0 n_1 \end{bmatrix}^T, \quad r_{g1} = -d_0^2,$$

$$Q_{g2}^T = \begin{bmatrix} \alpha_2^* n_0 n_2 - n_1^2 & \frac{\alpha_2^*}{2} (n_1 n_2 + n_0 n_3) - n_1 n_2 \\ \frac{\alpha_2^*}{2} (n_1 n_2 + n_0 n_3) - n_1 n_2 & \frac{\alpha_2^*}{2} n_1 n_3 - n_2^2 \end{bmatrix}$$

$$q_{g2} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2^*}{2} (d_2 n_0 + d_0 n_2) - d_1 n_1 \\ \frac{\alpha_2^*}{2} (d_2 n_1 + d_0 n_3) - d_1 n_2 \end{bmatrix}^T, r_{g2} = \alpha_2^* d_0 d_2 - d_1^2.$$

$$Q_{g3}^T = \begin{bmatrix} \alpha_3^* n_1 n_3 - n_2^2 & \frac{\alpha_3^*}{2} (n_2 n_3 + n_1 n_1) - n_2 n_3 \\ \frac{\alpha_3^*}{2} (n_2 n_3 + n_1 n_1) - n_2 n_3 & \alpha_3^* n_2 n_4 - n_3^2 \end{bmatrix}$$

$$q_{g3} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_3^*}{2} (d_3 n_1 + d_1 n_3) - d_2 n_2 \\ \frac{\alpha_3^*}{2} (d_3 n_2 + d_1 n_1) - d_2 n_3 \end{bmatrix}^T, r_{g3} = \alpha_3^* d_1 d_3 - d_2^2.$$

(30), (33), (34)와 (35)의 부등식 조건을 만족하는 PI 제어기 셋 K^* 를 (k_p, k_i) 평면에서 도시하면 전형적으로 그림 9와 같은 형태를 보인다. K^* 는 PID와 마찬가지로 구할 수 있다.

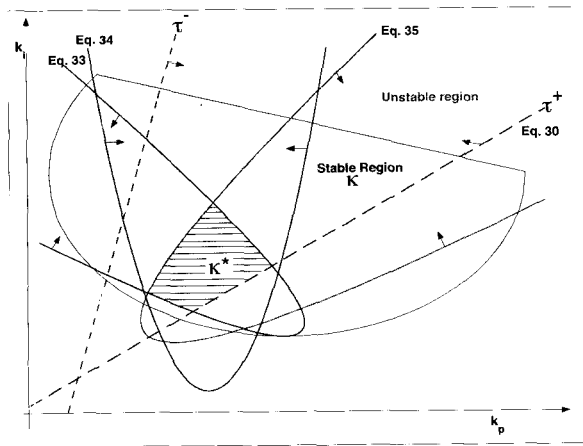


그림 9. PI 제어기의 (k_p, k_i) 집합.
Fig. 9. An admissible set of (k_p, k_i) pairs.

3. PD 제어기

앞 절에서와 같은 이유로 그림 10에 나타낸바와 같은 P-D 제어기 구조를 고려하기로 한다. 이 구조는 I-P, I-PD 구조와 마찬가지로 제어대상에 제어기가 포함되더라도 전체 전달함수에 영점이 추가되지 않는다.

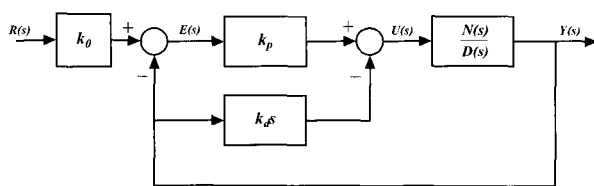


그림 10. P-D 구조를 갖는 제어 시스템.
Fig. 10. Feedback control system with P-D structure.

플랜트는 (17)과 동일하며 제어입력은 다음과 같다.

$$U(s) = k_p E(s) - k_d s Y(s) \tag{36}$$

페루프 특성다항식과 특성비, 일반화 시정수는 다음과 같다.

$$\delta(s, k_p, k_d) = D(s) + (k_p + k_d s)N(s) \tag{37}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = \frac{(k_p n_1 + k_d n_0 + d_1)^2}{(k_p n_0 + d_0)(k_p n_2 + k_d n_1 + d_2)}, \tag{38}$$

$$\alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} = \frac{(k_p n_2 + k_d n_1 + d_2)^2}{(k_p n_1 + k_d n_0 + d_1)(k_p n_3 + k_d n_2 + d_3)}, \tag{39}$$

$$\alpha_3 = \frac{a_3^2}{a_2 a_4} = \frac{(k_p n_3 + k_d n_2 + d_3)^2}{(k_p n_2 + k_d n_1 + d_2)(k_p n_4 + k_d n_3 + d_4)}, \tag{40}$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} = \frac{k_p n_1 + k_d n_0 + d_1}{k_p n_0 + d_0}. \tag{41}$$

PID 제어기와 마찬가지로 Ho가 제시한 Generalized Hermite-Biehler 정리를 이용하면 전체 안정화 (k_p, k_d) 셋을 구할 수 있다. 이 집합에 CRA를 적용하여 시간응답 규격을 만족하는 집합을 구한다. (24)의 각 부등식에 대응하는 부분 셋 K_i 를 정의하고 PD 파라미터 향으로 표현하면 (42)~(45)과 같다.

$$h_1(k_p, k_d) := x Q_{h1}^T x + 2 q_{h1} x + r_{h1} \leq 0 \tag{42}$$

$$h_2(k_p, k_d) := x Q_{h2}^T x + 2 q_{h2} x + r_{h2} \leq 0 \tag{43}$$

$$h_3(k_p, k_d) := x Q_{h3}^T x + 2 q_{h3} x + r_{h3} \leq 0 \tag{44}$$

$$\tau^- \leq \frac{k_p n_1 + k_d n_0 + d_1}{k_p n_0 + d_0} \leq \tau^+ \tag{45}$$

여기서 각 변수는 다음과 같다.

$$x = [k_p \ k_d], Q_{h1}^T = \begin{bmatrix} \alpha_1^* n_0 n_2 - n_1^2 & \frac{\alpha_1^*}{2} n_0 n_1 - n_0 n_1 \\ \frac{\alpha_1^*}{2} n_0 n_1 - n_0 n_1 & -n_0^2 \end{bmatrix}$$

$$q_{h1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1^*}{2} (d_2 n_0 + d_0 n_2) - d_1 n_1 \\ \frac{\alpha_1^*}{2} d_0 n_1 - d_1 n_0 \end{bmatrix}^T, r_{h1} = \alpha_1^* d_0 d_2 - d_1^2,$$

$$Q_{h2}^T = \begin{bmatrix} \alpha_2^* n_1 n_3 - n_2^2 & \frac{\alpha_2^*}{2} (n_0 n_3 + n_1 n_2) - n_1 n_2 \\ \frac{\alpha_2^*}{2} (n_0 n_3 + n_1 n_2) - n_1 n_2 & \alpha_2^* n_0 n_2 - n_1^2 \end{bmatrix}$$

$$q_{h2} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2^*}{2} (d_3 n_1 + d_1 n_3) - d_2 n_2 \\ \frac{\alpha_2^*}{2} (d_3 n_0 + d_1 n_2) - d_2 n_1 \end{bmatrix}^T, r_{h2} = \alpha_2^* d_1 d_3 - d_2^2.$$

$$Q_{h3}^T = \begin{bmatrix} \alpha_3^* n_2 n_4 - n_3^2 & \frac{\alpha_3^*}{2} (n_1 n_4 + n_2 n_3) - n_2 n_3 \\ \frac{\alpha_3^*}{2} (n_1 n_4 + n_2 n_3) - n_2 n_3 & \alpha_3^* n_1 n_3 - n_2^2 \end{bmatrix}$$

$$q_{h3} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_3^*}{2} (d_4 n_2 + d_2 n_4) - d_3 n_3 \\ \frac{\alpha_3^*}{2} (d_4 n_1 + d_2 n_3) - d_3 n_2 \end{bmatrix}^T, r_{h3} = \alpha_3^* d_2 n_4 - d_3^2.$$

(42)~(45) 조건에 의한 (k_p, k_d) 평면의 K^* 도 그림 9와 유사한 형태를 갖는다.

부연 1: (25)를 만족하는 교집합이 존재하지 않으면 제시한 방법으로는 원하는 PID 셋을 구할 수 없거나 해가 존재하지 않는 경우이므로 시간응답사양을 변경하여야 한다.

부연 2: 이 장에서 다룬 PID제어기의 셋의 결정은 페루프 시스템의 특성다항식만을 고려하여 이루어진다. 플랜트가 영점을 포함하면 페루프 시스템에도 동일한 영점이 나타나게 되어 시간응답에 구조적인 제약조건을 갖게 한다. 페루프 특성근에 대한 영점의 상대적 위치에 따라 어떤 경우에는 오버슈트나 언더슈트를 피할 수 없는 경우도 있다 [13]. 최소위상계이면 응답속도와 오버슈트 사이에 설계사양의 적절한 조정(trade-off)이 필요하며, 본 논문의 방법을 적용 시 τ^+, τ^- 에 의해 해결할 수도 있다(IV장의 예제 3 참조). 즉, τ 를 크게 하면 같은 제동특성에서도 응답속도를 느리게 하여 영점에 의한 오버슈트의 증가를 줄이게 된다. 그러나 원점 가까이에 놓이는 플랜트 영점의 경우는 원하는 오버슈트 조건을 만족하는 PID 제어기의 해가 존재하지 않을 수도 있다. 따라서 이 경우에는 다른 구조의 제어기를 고려하거나 영점소거 피드워드 보상기를 추가하는 방법이 있겠다.

IV. 적용 예제

본 장에서는 III장에서 제시한 방법이 어떻게 적용되는지 예제를 통해 보이기로 한다. 주어진 고차 시스템에 대해 스텝응답의 오버슈트와 정착시간 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID 제어기 셋을 구하는 문제를 고려한다.

예제 3. (PID 제어기) 그림 6의 I-PD구조를 갖는 제어시스템에서 고려한 플랜트 $P(s)$ 는 0, -3.7321 -1.0, -0.2679에서 극점을 갖고 -0.5에서 영점을 갖는 시스템이다.

$$P(s) = \frac{s + 0.5}{s(s^3 + 5s^2 + 5s + 1)}$$

문제는 페루프 시스템의 스텝응답이 오버슈트 0.1% 이내, 1% 정착시간이 20초 이내가 되도록 PID 제어기 이득 셋을 설계하는 것이라 가정한다.

해 : [7]에서 제시한 알고리즘을 사용하여 우리는 시스템을 안정시키는 $k_p \in [0, 913]$ 를 얻을 수 있다. 이 범위 중 그림 11에서는 $k_p \in [10, 20]$ 일 때 k_p 의 선택간격을 1.0으로 하여 고정된 k_p 마다 안정영역에 대응하는 (k_i, k_d) 템플릿을 3차원 공간에 도시하였다. 다음 단계에서는 주어진 오버슈트규격을 만족하는 특성비 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 와 정착시간을 만족하는 τ^* 를 선택하여야 한다. 다음은 이를 위한 절차이다. (이 절차는 PID, PI, PD 제어기 설계에 공히 적용할 수 있다.)

(i) 먼저 임의의 $\alpha_1^* > 2$ 을 선택하고, [5]의 알고리즘인 (8)을 사용하여 나머지 α_i^* s의 셋을 계산한다. 또는 이들값보다 큰 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 을 선택할 수도 있다. 초기값으로 $\tau^* = 1$ 로 놓는다.

(ii) 위 (i)에서 얻은 α_i^* s와 τ^* 로 (4)와 (5)에 의해 구성한 기준모델의 스텝응답을 구한다.

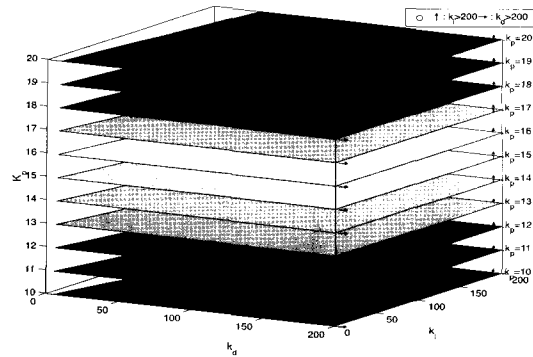


그림 11. 시스템을 안정시키는 전체 (k_p, k_i, k_d) 범위.

Fig. 11. All stabilizing set of (k_p, k_i, k_d) in Example 2.

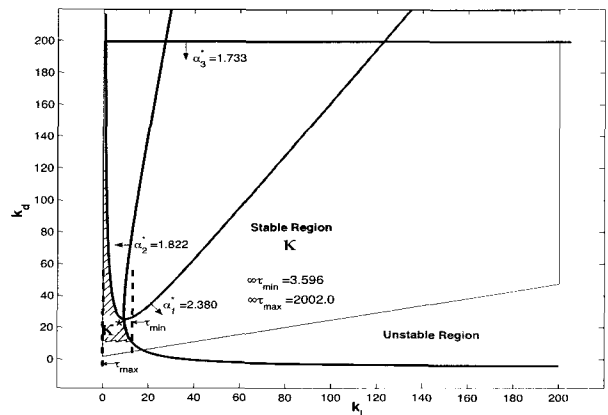


그림 12. $k_p = 20.0$ 에서 (k_i, k_d) 교집합.

Fig. 12. An admissible set of (k_i, k_d) pairs when $k_p = 20.0$.

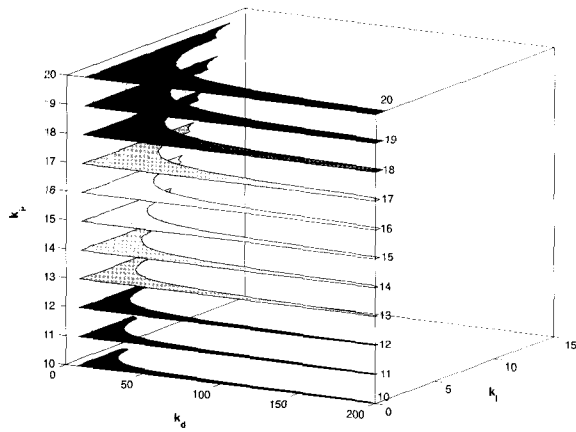
(iii) 만일 오버슈트가 주어진 규격보다 크면 α_1^* 값을 증가시키고 이를 기준으로 α_2^*, α_3^* 값을 계산하거나 선택한다.

(iv) 정착시간을 고려하여 일반화 시정수 τ^+, τ^- 를 선택한다. τ 가 작을수록 정착시간이 빨라지고 클수록 느려진다.

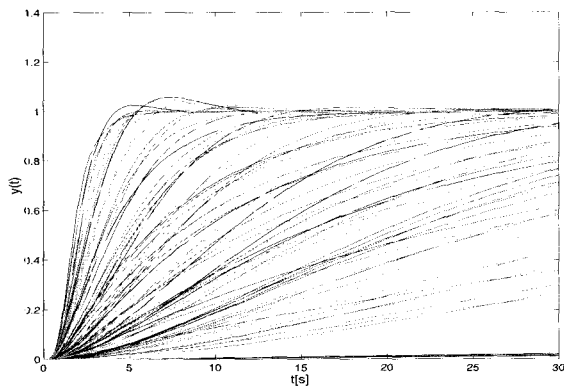
스텝 (ii)에서 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*$ 와 τ^* 가 선택되면 이 값들에 의한 기준모델은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$T(s) = \frac{k_i N(s)}{\delta(s)} = \frac{k_i(s + 0.5)}{a_5 s^5 + \dots + a_1 s + a_0}$$

상기에서 언급한 절차의 결과로써 오버슈트 규격을 만족하는 기준 특성비 값 $\alpha_1^* = 2.380, \alpha_2^* = 1.926, \alpha_3^* = 1.926$ 을 얻을 수 있다. 고정된 k_p 값에 대하여 부등식 (26)~(29)을 만족하는 (k_p, k_i, k_d) 의 부분셋은 그림 13(a)와 같이 얻을 수 있는데, 그림 12는 $k_p = 20.0$ 일 때 (k_i, k_d) 평면의 각 영역을 보여준다. 그림 13(b)는 이 때의 스텝응답으로 아직 일반화 시정수에 대한 부등식 조건을 적용하지 않은 경우이다. 그림에서 나타나듯이 주어진 정착요구시간 보다 지연된 응답이 포함되어 있다. 또한 영점의 영향으로 응답속도가 빨라지므로 과도응답 특성에서 오버슈트 규격을



(a) (k_p, k_i, k_d) Set



(b) Step responses

그림 13. 오버슈트 규격을 고려한 (k_p, k_i, k_d) 집합과 스텝 응답 특성.

Fig. 13. Adjustable PID parameter set and its step responses with specification of overshoot.

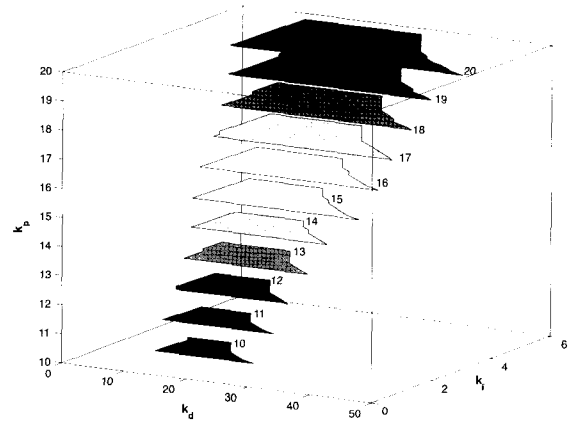
초과하는 현상이 나타나고 있다. 이제 오버슈트 규격을 만족시키기 위하여 최소 일반화시정수 값을 증가시키고 정착 요구시간 규격을 만족시키기 위하여 최대 일반화시정수 값을 감소시켜가면서 원하는 PID Set을 찾는다. 여기서 일반화시정수를 조정하여 얻은 $\tau^* \in [\tau^-, \tau^+] = [5.5, 8.3]$ 이다. 이때의 PID 셋 K^* 와 스텝응답 특성을 그림 14에 나타내었다. ■

예제 4. (PI 제어기) 그림 8에 보인 I-P 구조를 갖는 제어 시스템을 고려하기로 한다. 제어대상 $P(s)$ 는 다음과 같다.

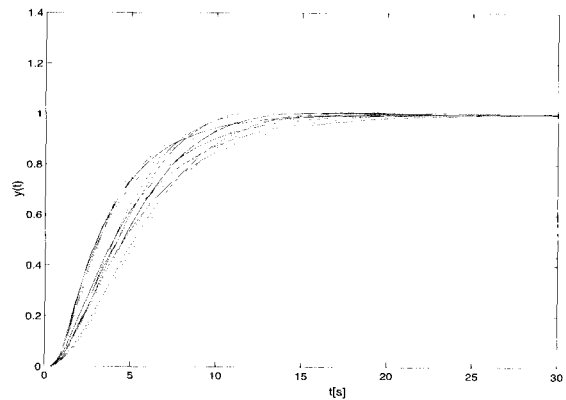
$$P(s) = \frac{1}{s(s^2 + 10s + 16)}$$

설계 목표 : 폐루프 스텝응답의 오버슈트 0.1% 이내, 1% 정착시간 20초 이내가 되도록 PI 제어기 이득 (k_p, k_i) 의 셋을 구하라.

해 : [7]을 이용하면 시스템을 안정화하는 전체 (k_p, k_i) 셋은 그림 15(a)와 같이 결정된다(K 영역). 스텝응답이 오버슈트를 갖지 않도록 예제 3에서 언급한 절차에 따라 선택한 특성비는 $\alpha_1^* = 2.485, \alpha_2^* = 2.121, \alpha_3^* = 2.485$ 이다.



(a) (k_p, k_i, k_d) Set



(b) Step responses

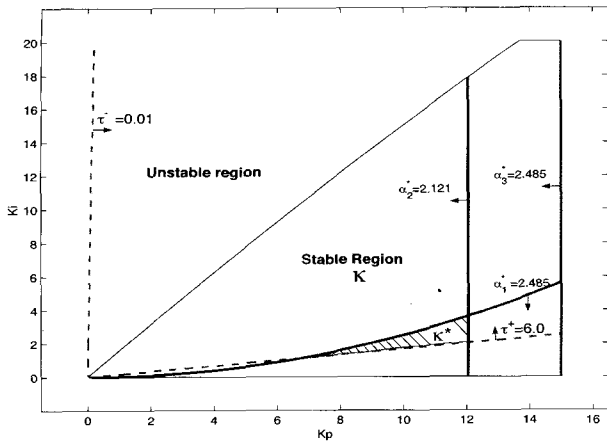
그림 14. 시간 영역 규격을 모두 만족하는 PID (k_p, k_i, k_d) 집합과 스텝응답 특성.

Fig. 14. Adjustable PID parameter set and its step responses with time domain specification.

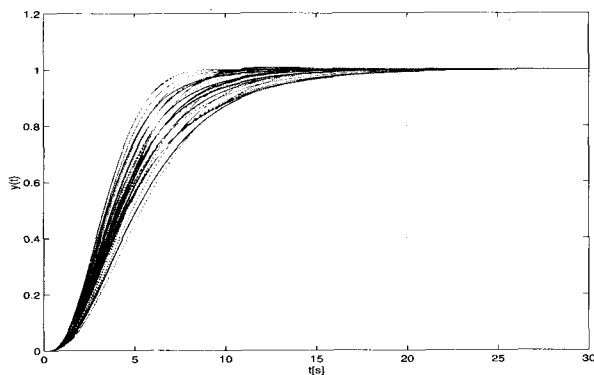
또한 정착시간에 대한 설계규격을 만족하게 하는 시정수 $\tau^* \in [\tau^-, \tau^+] = [0.01, 6.0]$ 을 얻을 수 있다. (30), (33)~(35)를 적용하여 α_i 와 τ 구간을 K 범위 내에서 도사하였다. 설계규격을 만족하는 PI 이득 셋은 그림 15(a)의 K^* 이며, 이 값들에 속하는 제어기 파라미터의 스텝응답 특성을 그림 15(b)에 나타내었다. 이 결과는 안정도와 원하는 시간응답 규격을 만족하는 PI 파라미터의 범위가 명료하게 제시되고 있음을 알 수 있다. ■

예제 5. (PD 제어기) III-3절에서 언급한 P-D 구조를 갖는 제어시스템에서 예제 4에서와 동일한 플랜트를 고려하여 역시 동일한 설계규격을 만족하는 PD Set을 구하기로 한다.

해 : PID, PI의 경우와 마찬가지로 [7]을 이용하여 시스템을 안정화시키는 전체 (k_p, k_d) 영역을 구하면 그림 16(a)의 K 로 표기된 영역과 같다. 그리고 스텝응답이 오버슈트를 갖지 않도록 하기 위하여 예제 3의 PID 제어기 설계의 예제에서 언급한 절차에 따라 선택한 특성비는 $\alpha_1^* = \alpha_2^* = 2.690$ 이고, 일반화 시정수의 범위는 $\tau^* \in [\tau^-, \tau^+] = [0.74,$



(a) (k_p, k_i) Set



(b) Step Responses

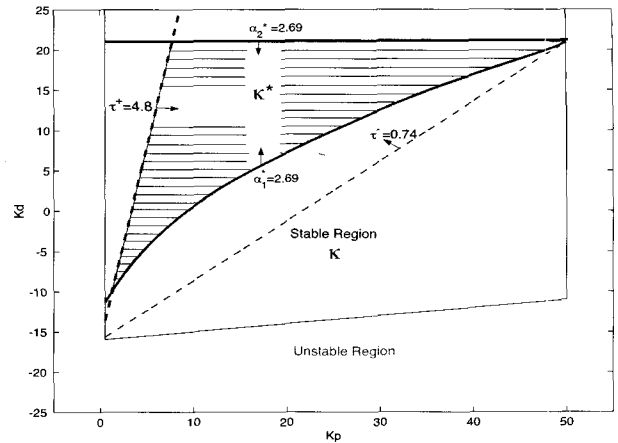
그림 15. 시간 영역 규격을 모두 만족하는 PI (k_p, k_i) 집합과 스텝응답 특성.

Fig. 15. Adjustable PI parameter set and its step responses with time domain specification.

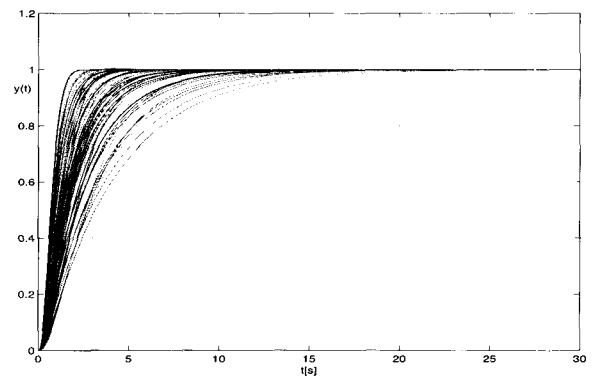
4.80]을 얻었다. (42)~(45)를 적용하여 α_i 와 τ 구간을 K 범위 내에서 도시하였다. 주어진 성능을 만족하는 PD 이득 범위는 그림 16.(a)의 K^* 로 표시한 영역이다. 이 영역에 속하는 시스템의 스텝응답 특성을 그림 16.(b)에 나타내었다. ■

V. 결론

제어기 설계 관점에서 고전적인 방식과 현대적 방식의 차이점 중 하나를 비교하면, 고전적인 방식에서는 먼저 제어성능 요구조건을 만족하는 한 저차 제어기를 설계한 후 폐루프 안정도를 검증한다[12]. 반면에 현대적 접근방식[8, 9]은 시스템을 안정화하는 제어기의 셋을 구한 뒤 이 셋 속에서 성능 요구조건을 만족하는 최적해를 구한다. 본 논문에서는 후자의 관점에서, 오버슈트나 정착시간 같은 시간 영역 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID 제어기의 셋을 구하는 방식을 제시하였다. 시스템을 안정화시키는 전체 PID 이득 셋은 Ho[7]의 최근 결과에 근거하였으며, 시간응답 조건은 CRA 기법[5]을 저차제어기 설계 문제로 확장하였다. 이 조건들은 충분조건으로서 2차원 평면에서 2차형(quadratic form) 부등식으로 나타나는데 제동특성과 관련된



(a) (k_p, k_d) Set



(b) Step responses

그림 16. 시간 영역 규격을 모두 만족하는 PD (k_p, k_d) 집합과 스텝응답 특성.

Fig. 16. Adjustable PD parameter set and its step responses with time domain specification.

3개의 부등식과 응답속도와 관계된 1개의 부등식으로 구성된다. 최종 해는 제어기 계수공간에서 안정 영역과 최대 4개 부등식의 교집합으로 구해진다. 이들 PID 셋은 2D, 3D 그래프로 명료하게 표현되기 때문에 실제 설계에 매우 유용하게 적용될 수 있다. PID, PI, PD 각 경우에 대한 설계 예를 통해 이를 보였다.

참고문헌

[1] P. Naslin, *The Dynamics of Linear and Non-Linear Systems*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, NY, 1965.
 [2] P. Naslin, *Essentials of Optimal Control*, Boston Technical Publishers, Inc., Cambridge, M.A, 1969.
 [3] S. Manabe, "Coefficient diagram method", *Proc. of the 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, pp. 199-210, Seoul, Korea, 1998.
 [4] A. V. Lipatov and N. I. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems," *Automation and Remote Control*, vol. 39, pp. 1285-1291, 1979.

- [5] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Transient Response Control via Characteristic Ratio Assignment," *Proc. of the 2002 American Control Conference*, Anchorage, Alaska, 2002.
- [6] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. Manabe, "Controller design for time domain specifications," *Proc. of IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, July, 2002.
- [7] A. Datta, M. T. Ho, and S.P. Bhattacharyya, *Structure and Synthesis of PID Controllers*, London, U.K. : Springer-Verlag, 2000.
- [8] D. S. Bernstein and W. M. Haddad, "LQG control with an H_∞ performance bound: a Riccati equation approach," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-34, pp. 293-305, March 1989.
- [9] P. Dorato, *Analytic Feedback System Design: An Interpolation Approach*, Brooks Cole Publishing, Pacific Grove, CA, 2000.
- [10] H. Chestnut and R. W. Mayer, *Servomechanisms and Regulating System Design, vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., NY, 1959.
- [11] J. L. Goldberg, *Matrix Theory with Applications*, McGraw-Hill, Inc., 1992
- [12] D. D. Šiljak, *Nonlinear Systems : The Parameter Analysis and Design*, John Wiley and Sons, Inc., NY., 1969.
- [13] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M.E. Salgado, *Control System Design*, Prentice Hall, New Jersey, 2001



김근식

1963년 5월 2일생. 1985년 한양대학교 전자공학과(공학사). 1987년 한양대학교 전자공학과(공학석사). 2000년 충북대학교 전자공학과 박사과정수료. 1987년~1994년 국방과학연구소. 1994년~1996년 자동차부품연구원. 1996년~현재 대전대학교 컴퓨터전자전기계열 부교수. 관심분야는 CRA를 이용한 제어기설계, 감도해석.



조태신

1971년 2월13일생. 1993년 충북대학교 전자공학과(공학사), 1995년 충북대학원 전자공학과(공학석사), 2000년 충북대학교 전자공학과 박사과정수료. 관심분야는 CRA 특성해석, Parametric Robust Control, 저차제어기설계.

김영철

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 5 권 제 11 호 참조.