

강체모드분리와 급수전개를 통한 고유치 문제에서의 준해석적 설계 민감도 개선에 관한 연구(II) - 동적 문제 -

김 현 기* · 조 명 효*

(2002년 9월 2일 접수, 2003년 2월 19일 심사완료)

A Refined Semi-Analytic Sensitivity Study Based on the Mode Decomposition and Neumann Series Expansion in Eigenvalue Problem(II) - Eigenvalue Problem -

Hyungi Kim and Maenghyo Cho

Key Words : Rigid Body Mode(강체모드), Semi Analytic Method(준해석적방법), Iterative Method(반복법), Perturbation Size(증분율), Eigenvalue Problem(고유치문제), Von Neumann Series(뉴만급수)

Abstract

Structural optimization often requires the evaluation of design sensitivities. The Semi Analytic Method(SAM) for computing sensitivity is popular in shape optimization because this method has several advantages. But when relatively large rigid body motions are identified for individual elements, the SAM shows severe inaccuracy. In this study, the improvement of design sensitivities corresponding to the rigid body mode is evaluated by exact differentiation of the rigid body modes. Moreover, the error of the SAM caused by numerical difference scheme is alleviated by using a series approximation for the sensitivity derivatives and considering the higher order terms. Finally the present study shows that the refined SAM including the iterative method improves the results of sensitivity analysis in dynamic problems.

1. 서 론

구조물의 최적화 설계를 위해서는 여러 가지 설계 변수에 대한 민감도 해석이 필수적이다. 민감도 해석 방법에는 지금까지 다양한 방법들이 제안되어 왔지만, 현재는 준해석적 방법이 유한 차분법이나 해석적 방법에 비해 계산비용과 시간 효율 측면에서 많은 잇점을 갖고 있기 때문에 형상 최적화를 위한 민감도 해석에 가장 간편한 방법이다. 그러나, 강체모드가 큰 구조물에서는 준해석적 방법은 심각한 오차를 보이고 있으며 특징 설계변수에 대해 불안정한 수렴값을 나타내는 것으로 보고되어 왔다.⁽¹⁾ 준해석적 방법의 문제점은 강성행

렬의 미분항이 차분법에 의해 계산되어 질 때, 증분율이 큰 범위에서는 truncation 오차가 발생하고, 증분율이 작아지는 범위에서는 round-off 오차가 발생하기 때문이다. 최근 정적문제에서 이 문제를 해결하기 위해 Van Keulen⁽²⁾은 요소내의 변위장을 순수변형부와 강체모드부로 분리하여 전체 민감도 중에서 강체모드부의 영향을 해석적 방법으로 도출하는 민감도 해석기법을 제안하였다. 그리고, Oral⁽³⁾은 차분의 증분율이 큰 경우에 발생하는 truncation 오차를 줄이기 위해 급수 전개를 사용하여 민감도 해석 결과를 개선시켰다.

본 논문에서는 두 방법을 조합한 준해석적 민감도 해석 기법을 제안하고, 고유치 문제에 적용시킨 결과를 제시한다. 고유벡터를 강체모드와 순수변형부로 나누어 강체모드부의 민감도는 해석적으로 계산하며 반복법을 적용하여 truncation 오차를 줄임으로써 설계변수의 증분율이 큰 경우에도

* 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : shotgun1@snu.ac.kr

TEL : (02)880-1695 FAX : (02)883-1513

* 회원, 서울대학교 기계항공공학부

수렴성이 보장되도록 하였다.⁽⁴⁾ 본 연구의 민감도 해석 기법은 수치예제를 통해 신뢰도와 효율성을 검증한다. 그리고, 구조물에서 선정된 특정 위치에서 고유벡터의 민감도 결과를 제시하고, 강체모드 분리법과 반복법에 의한 비교 결과를 제시한다.

2. 정적문제에서 준해석적 방법의 개선

정적 문제에서 선형 시스템의 지배방정식은 $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ 의 형태로 표현된다. 설계변수에 대한 변위 민감도 값을 구하기 위해서는 지배방정식의 설계변수에 대한 미분이 필요하며, 식 (1)과 같다.

$$\mathbf{K}'\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u}' = \mathbf{f}' \quad (1)$$

식 (1)에서 준해석적 방법은 강체모드가 큰 경우에 증분값에 따라 신뢰할 수 없는 결과를 나타내게 된다. 따라서, 대부분의 오차를 발생시키는 \mathbf{K}' 에 대해서, 강체모드가 차지하는 오차부분을 제거해야 할 필요가 있다.

2.1 강체모드의 분리

기존의 준해석적 방법은 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{d\mathbf{f}}{dx} - \frac{d\mathbf{K}}{dx} \mathbf{u} \right), x \text{ (설계변수)} \quad (2)$$

대부분의 오차는 $\frac{d\mathbf{K}}{dx}$ 를 차분으로 계산할 때 발생하게 된다. 따라서 개선된 방법을 통해 여기서 발생하는 오차를 줄이는 것이 필요하다.

$$\delta W_s = \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}\mathbf{u} = \sum_{c=1}^N \delta \mathbf{u}_c \cdot \mathbf{K}_c \mathbf{u}_c, \begin{cases} \mathbf{K}_c \mathbf{r} = 0 & \forall r \in \mathfrak{R}_c \\ \mathbf{K}_c \mathbf{s} \neq 0 & \forall s \in \mathfrak{R}_c \end{cases} \quad (3)$$

여기서, \mathfrak{R}_c 는 강체모드와 관련된 부공간이다.

식 (3)에서, 강체모드 벡터와 요소 강성행렬의 관계는 $\mathbf{K}_c \mathbf{r}_k = 0$ 으로 표현된다. 이 등식이 설계변수에 의해 미분되어지면, 식 (4)와 같이 나타내어진다.

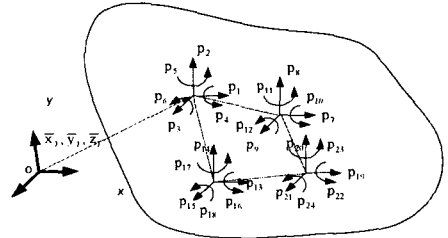
$$\mathbf{K}'_c \mathbf{r}_k + \mathbf{K}_c \mathbf{r}'_k = 0 \quad (4)$$

변위장은 다음의 과정을 통해서 순수변형부와 강체 모드부로 분리할 수 있다.

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_c^e + \sum_{k=1}^r \frac{\mathbf{u}_c \cdot \mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k} \mathbf{r}_k = \mathbf{u}_c^e + \sum_{k=1}^r \alpha^k \mathbf{r}_k \quad (5)$$

α^k 는 변위장 벡터를 강체모드벡터와의 내적을 통해서 강체모드 부분을 분리한 부분의 스케일을 의미한다. 이 식을 가상 하중벡터에 대입하면, 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{f}'_c - \mathbf{K}'_c \mathbf{u}_c = \mathbf{f}'_c - \mathbf{K}'_c \mathbf{u}_c^e - \mathbf{K}_c (\alpha^k \mathbf{r}_k) \quad (6)$$



식 (4)의 관계로부터 식 (6)의 마지막항은 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$\mathbf{K}'_c (\alpha^k \mathbf{r}_k) = \alpha^k (\mathbf{K}'_c \mathbf{r}_k) = -\alpha^k (\mathbf{K}_c \mathbf{r}'_k) \quad (7)$$

따라서, 가상하중벡터는 식 (8)로 정리할 수 있다.

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{f}'_c - \mathbf{K}'_c \mathbf{u}_c^e + \alpha^k \mathbf{K}_c \mathbf{r}_k \quad (8)$$

식 (8)에서, 하중 벡터의 변화가 없다고 한다면, 두 번째항은 유한 차분법으로 계산되어지고, 세 번째항은 엄밀하게 계산되어진다. 따라서, 차분에 의해 계산되어지는 \mathbf{K}'_c 에서 대부분의 오차가 발생하게 된다. 그러나, 수치적인 미분을 통해 더 정확하게 $\mathbf{K}'_c \mathbf{u}_c^e$ 을 전개하는 것이 가능하다. 이것은 내적을 통해서 이 성분에서 강체모드의 성분을 분리함으로써 가능하다. 따라서 가상하중벡터는 식 (9)와 같이 구성되어진다.

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{f}'_c - \mathbf{K}'_c \mathbf{u}_c^e + \left[\frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{K}'_c \mathbf{u}_c^e}{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k} \right] \mathbf{r}_k + \left[\frac{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{K}_c \mathbf{u}_c^e}{\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_k} \right] \mathbf{r}_k + \alpha^k \mathbf{K}_c \mathbf{r}_k \quad (9)$$

2.2 강체 모드 분리방법

본 연구에서는 Aminpour⁽⁵⁾가 제안한 4 절점 혼합 쉘 요소에 대해 민감도 기법을 정립하고자 한다. 강체모드를 구성하기 위해서는 각 요소의 제로 고유치가 자유도의 개수와 일치해야 한다. 본 논문에서 사용된 혼합 요소는 회전각 자유도를 가지고 있기 때문에 요소마다 7 개의 제로 고유치가 나타나게 된다. 그러므로, $\theta_c = \frac{1}{2}(u_v - v_v)$ 을 구속

조건으로 이용하여 허구 강체모드를 제어하였다.⁽⁶⁾

Fig. 1에서, 강체모드 조건을 만족시키는 힘 평형식과 모멘트 평형식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1 + p_7 + p_{13} + p_{19} &= 0 \\ p_2 + p_8 + p_{14} + p_{20} &= 0 \\ p_3 + p_9 + p_{15} + p_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -P_2 \bar{x}_1 + P_3 \bar{x}_1 + P_4 - P_5 \bar{x}_2 + P_6 \bar{x}_2 + P_7 - P_8 \bar{x}_3 + P_9 \bar{x}_3 + P_{10} - P_{11} \bar{x}_4 + P_{12} \bar{x}_4 + P_{13} &= 0 \\ P_2 \bar{x}_1 - P_3 \bar{x}_1 + P_4 - P_5 \bar{x}_2 + P_6 \bar{x}_2 + P_7 - P_8 \bar{x}_3 + P_9 \bar{x}_3 + P_{10} - P_{11} \bar{x}_4 + P_{12} \bar{x}_4 + P_{13} &= 0 \\ -P_2 \bar{y}_1 + P_3 \bar{y}_1 + P_4 - P_5 \bar{y}_2 + P_6 \bar{y}_2 + P_7 - P_8 \bar{y}_3 + P_9 \bar{y}_3 + P_{10} - P_{11} \bar{y}_4 + P_{12} \bar{y}_4 + P_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Fig. 1 Rigid body mode of rotation and translation part for 4 node element with 6 degrees of freedom

위의 식 (10)과 식 (11)의 평형식들을 자유도를 고려하여 행렬식 형태로 정리하면 식 (12), (13)과 같이 각 자유도의 병진과 회전 강체모드 벡터를 얻을 수 있다. 강체모드벡터는 *Gram-Schmidt* 적교화 과정을 통해 기준축에 대해 일반화 시킬 수 있다.

식 (10)과 식 (11)은 강성행렬의 정보와 관계없이 점점 자유도 정보를 갖고 있는 어떤 유한요소 형태에도 적용되어 질 수 있다.

병진 강체 모드

$$\begin{bmatrix} \bar{r}'_1 \\ \bar{r}'_2 \\ \bar{r}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100000100000100000100000 \\ 010000010000010000010000 \\ 001000001000001000001000 \end{bmatrix} \quad (12)$$

회전 강체 모드

$$\begin{bmatrix} \bar{r}'_4 \\ \bar{r}'_5 \\ \bar{r}'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-x_1 100 & 0-x_2 1000 & -x_3 100 & 0-x_4 100 \\ 0-x_5 010 & x_6 010 & 0-x_7 010 & x_8 0-x_9 010 \\ -x_{10} 0001 & -x_{11} x_5 0001 & -x_{12} x_5 0001 & -x_{13} x_5 0001 \end{bmatrix} \quad (13)$$

식 (12)와 식 (13)으로부터 설계변수에 대한 강체모드의 미분식은 식 (14)와 같이 전개된다.⁽²⁾

$$\bar{r}'_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x} + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial x} \quad (14)$$

3. 동적문제에서 준해석적 방법의 개선

기존의 준해석적 방법은 유한 차분법에 비해 메모리와 연산 시간을 절약할 수 있고, 간단한 계산으로도 비교적 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있었다. 그러나, 증분율의 선택에 따라서 심각한 부정확성을 나타내고 있다. 특히, $10^{-1} \sim 10^{-7}$ 에서는 *truncation* 오차가 주로 발생하게 되고, 10^{-8} 이하에서는 *round-off* 오차가 발생하게 된다⁽⁷⁾. 본 논문에서는 두 경우의 오차를 모두 제거하기 위해 고유벡터를 순수변형부와 순수 강체모드부로 분리하여 계산함으로써 *round-off* 오차감소의 효과를 얻을 수 있고, 미분수행시 증분량이 클 때 발생할 수 있는 *truncation* 오차는 반복법을 이용한 고차항의 추가로써 개선시킨다.

3.1 고유벡터에서의 강체모드 분리

비감쇠 진동일 때, 고유치 문제는 식 (15)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{K}(x)\mathbf{u}(x) - \lambda(x)\mathbf{M}(x)\mathbf{u}(x) = 0 \quad (15)$$

여기서, \mathbf{K} 는 강성행렬, \mathbf{M} 은 질량행렬, \mathbf{u} 은 고유벡터이다. 진동 문제에서, λ 는 주파수의 제곱이고, \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 은 대칭행렬이다.

이 문제는 설계변수에 대해서 미분을 수행한 후

정리하면, 식 (16)과 같은 고유치 민감도에 관한 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{K}' \mathbf{u} - \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{M}' \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^T \left(\frac{\mathbf{K}(b+hl) - \mathbf{K}(b)}{h} - \lambda \frac{\mathbf{M}(b+hl) - \mathbf{M}(b)}{h} \right) \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \quad (16)$$

식 (16)에서 첫번째 항은 강체모드를 고려하여 고유벡터를 순수변형부와 강체모드부로 분리시킬 수 있다. 그리고, 강체모드부에 대해서 정적분제와 동일하게 엄밀해로써 계산이 가능하다. $\mathbf{u}^T \mathbf{K}' \mathbf{u}$ 에서 고유벡터 \mathbf{u} 를 순수변형부와 강체모드부로 분리하면 식 (17)과 같다.⁽⁸⁾

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_c^T + \alpha^t \mathbf{r}_k^T) \mathbf{K}' (\mathbf{u}_c + \alpha^t \mathbf{r}_k) &= (\mathbf{u}_c^T + \alpha^t \mathbf{r}_k^T) (\mathbf{K}' \mathbf{u}_c - \alpha^t \mathbf{K}' \mathbf{r}_k) \\ &= \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}' \mathbf{u}_c + \alpha^t \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}' \mathbf{u}_c - \alpha^t \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}' \mathbf{r}_k - (\alpha^t)^2 \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}' \mathbf{r}_k \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)에서 네 번째 항은 강체모드 성질인 $\mathbf{K} \mathbf{r} = 0$ 에 의해 소거되고, 두 번째 항은 $\mathbf{K} \mathbf{r}_k + \mathbf{K}' \mathbf{r}_k = 0$ 에 의해서 $-\alpha^t \mathbf{r}_k^T \mathbf{K}' \mathbf{u}_c$ 로 바꾸면, 두 번째와 세 번째는 동일한 식이므로, 위의 식은 최종적으로 식 (18)과 같이 정리할 수 있다

$$(\mathbf{u}_c^T + \alpha^t \mathbf{r}_k^T) \mathbf{K}' (\mathbf{u}_c + \alpha^t \mathbf{r}_k) = \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}' \mathbf{u}_c - 2\alpha^t \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}' \mathbf{r}_k \quad (18)$$

따라서, 설계변수 변화에 대한 고유치 민감도는 식 (19)로 표현된다.

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\mathbf{u}_c^T \mathbf{K}' \mathbf{u}_c - 2\alpha^t \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}' \mathbf{r}_k - \lambda \mathbf{u}^T \mathbf{M}' \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} \quad (19)$$

식 (19)에 의해 구해지는 고유치 민감도는 증분율이 10^{-4} 이하로 작아질 때는 안정적인 수렴성을 보이지만, 10^{-3} 이상으로 커지게 되면, *truncation* 오차에 의해 수렴성이 떨어지게 된다. 따라서, 증분율이 큰 경우에도 일정한 수렴성을 보장하기 위해서는 *truncation* 오차를 감소시키는 것이 필요하다. 본 논문에서는 문제 해결을 위해 고유치 민감도 계산을 위해 정적분제와 동일하게 고유치문제에서 반복법을 적용하는 기법을 제시한다.

3.2 고유치 문제에서의 반복법의 적용

반복법을 적용하기 위해서는 변화량을 이용하여 식을 표현할 필요가 있다. 설계변수 변화에 따른 구조물의 변화는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\mathbf{K}'] \{ \mathbf{u}' \} = \lambda [\mathbf{M}'] \{ \mathbf{u}' \} \quad (20)$$

설계변수의 변화에 따른 구조의 변화가 작은 경우 변화된 행렬과 변화된 고유치, 고유벡터는 변화량 Δ 로 나타낼 수 있다. 변화량 Δ 에 의한 관계는 식 (21)에 주어져 있다.

$$\begin{aligned} [K'] &= [K] + [\Delta K] \\ [M'] &= [M] + [\Delta M] \\ \lambda' &= \lambda + \Delta\lambda \\ [u'] &= [u] + [\Delta u] \end{aligned} \quad (21)$$

식 (21)에 의해서 식 (20)은 아래와 같이 표현된다.

$$(K + \Delta K)(u + \Delta u) = (\lambda + \Delta\lambda)(M + \Delta M)(u + \Delta u) \quad (22)$$

고유벡터 변화량 Δu 을 좌항에 나타내면, 식 (23)과 같다.

$$\begin{aligned} & \{ (K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M) \} \Delta u \\ &= \Delta\lambda(M + \Delta M)u - \{ (K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M) \} u \end{aligned} \quad (23)$$

고유벡터 민감도는 식 (23)으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \{ (K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M) \}^{-1} \\ & \{ \Delta\lambda(M + \Delta M)u - (K + \Delta K) - \lambda(M + \Delta M) \} u \end{aligned} \quad (24)$$

식 (24)에서 고유치 변화량 $\Delta\lambda$ 만을 좌항으로 이항한 후, 양변에 고유벡터 u^T 를 곱하고 정리하면, 증분율에 의한 고유치 민감도를 식 (25)와 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta\lambda = \frac{u^T (\Delta K - \lambda \Delta M) u + u^T (\Delta K - \lambda \Delta M) \Delta u}{u^T (M + \Delta M) (u + \Delta u)} \quad (25)$$

식 (19)에서 계산된 고유치 민감도 λ'_i 는 첫번째 단계의 값이며, 고유벡터 변화량 Δu 를 얻기 위해 식 (23)의 $\Delta\lambda$ 로 대입된다. 여기서 얻어진 고유벡터는 다시 식 (25)로 입력되어 두 번째 단계의 고유치 민감도 λ'_2 를 얻게 된다. 이런 과정은 고유치 민감도가 수렴할 때까지 계속되며, 대략 2~3 회의 반복과정에 의해 수렴값을 얻을 수가 있다. 이 과정을 통해 고유치 민감도 수렴값과 고유벡터 민감도값을 동시에 얻을 수 있다.

4. 수치 예제

수치예제를 통하여 본 연구에서 제안한 민감도 해석 기법의 효율성과 신뢰성을 확인하고자 한다. 해석은 단순지지된 평판과 내부에 원공을 갖는 평판, 실린더 쉘, 사각튜브에 대해 수행하였다. 첫번째 예제에서는 기존의 준해석적 방법, 강체모드분리에 의한 방법, 그리고 반복법에 의한 결과를 비교하여 1 차부터 4 차 모드에서 그 신뢰성을 검증한다. 2,3,4 번째 예제에서는 각 방법의 수렴안정성을 각 모드별로 비교하여 본 논문에서 제시하는 방법의 효율성을 입증하도록 한다. 고유벡터에 대한 결과를 사각평판에 대해서 수행하였고, 반복법과 강체모드분리에 의한 방법의 결과를 제공한다.

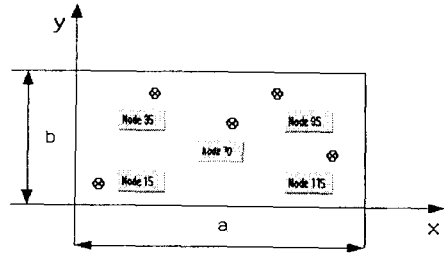


Fig. 2 Free vibration of a simply supported plate

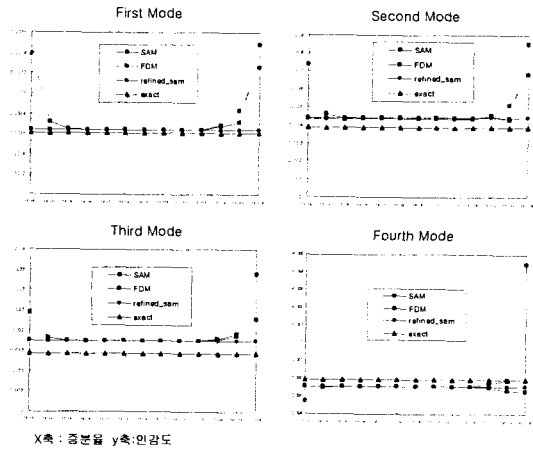


Fig. 3 The sensitivity analysis results of rectangular plate between refined SAM, the traditional SAM and the FDM

고유벡터를 산출한 절점은 Fig.2 에 표시되어 있다.

4.1 단순지지된 평판의 자유진동 문제

Fig. 2 는 해석모델을 나타내고 있다. 해석을 위해 입력된 물성치는 $E=100, t=1, \nu=0.3$ 이다. 설계변수는 길이방향 a 이고, 민감도 엄밀해는 식 (26)과 같다.

$$\frac{\delta\phi}{\delta a} = -\frac{4n^2\pi^4}{a^3} \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right] \quad (26)$$

수치예를 통한 검증은 위해서 길이비 $a/b=2$ 인 경우 준해석적 방법, 유한차분법, 강체모드를 고려한 방법에 대해 각각 1 차 모드부터 4 차 모드까지 각 모드에서 격자수를 고정시키고 증분율의 변화에 따른 수렴 경향을 나타내었다. 각 결과는 Fig.3 에 제시하였다. 기존의 준해석적 방법이나 유한차분법은 증분율 $10^{-1} \sim 10^{-4}$ 범위에서 truncation 오차가 발생하고, 10^{-10} 이하에서는 round-off 오차가 발생하고 있음을 알 수 있다. 그와 비교해 볼 때 강체모드를 분리한 경우는 두 종류의 오차를 감소시키고 있으며, 증분율에 무관하게 안정적인 수렴값을 보이고 있다. Fig. 4 는 강체모드분리법

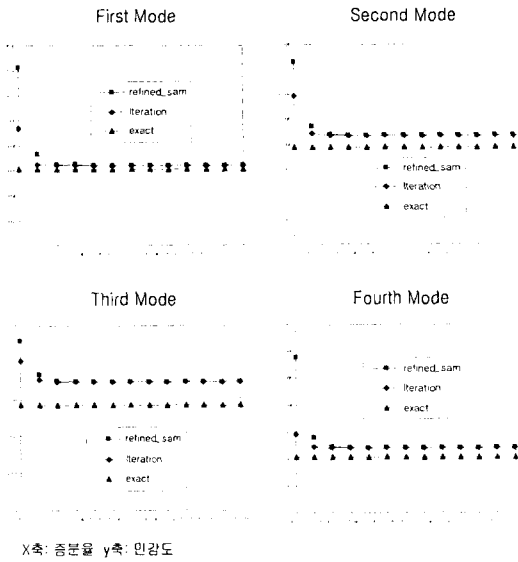


Fig. 4 The sensitivity analysis results of rectangular plate between refined SAM and Iteration

과 반복법으로 고차항을 추가하여 truncation 오차를 감소시켰을 때의 결과를 비교한 것이다.

강체모드만을 분리한 결과는 증분율이 큰 경우에 큰 오차를 보이고 있으며, 10^{-4} 보다 작은 증분율에서 수렴하고 있음을 알 수 있다. 반복법을 적용했을 때는 수렴속도가 더 빠르게 나타나며, 안정성에서도 상대적으로 좋은 결과를 보이고 있다.

Table 1은 고유벡터의 민감도 해석 결과를 나타낸 것이다. 고유벡터는 5개의 절점에서 계산되었고, 절점 위치는 Fig. 2에 표시하였다. Table 1은 강체모드 분리법과 반복법에 대해서 2차, 4차, 7차, 8차 모드에 대한 각 결과를 보여주고 있다. 본 연구에서 제안한 반복법을 이용했을 경우 각 절점에서의 고유벡터 민감도는 증분율에 관계없이 전 영역에서 신뢰도 높은 결과값을 보여주고 있다. 그러나, 강체모드만을 분리했을 경우는 $10^{-7} \sim 10^{-9}$ 의 좁은 증분 범위에서만 수렴값을 얻을 수가 있음을 알 수 있다. 그러므로, 고유벡터의 민감도 계산에서 본 연구에서 제안하는 방법이 신뢰도가 보장되며, 강체모드 분리법보다 훨씬 안정적인 강항을 보임을 알 수 있었다.

4.2 원공이 있는 평판의 자유진동 문제

해석 모델은 Fig. 5에 주어져 있다. 설계 변수는 원공의 반지름이며, 해석을 수행한 격자수는 144개이다. 물성치는 $E=100$, $t=1$, $\nu=0.3$ 이다. 결과는 Fig. 6과 Fig. 7에 주어져 있다.

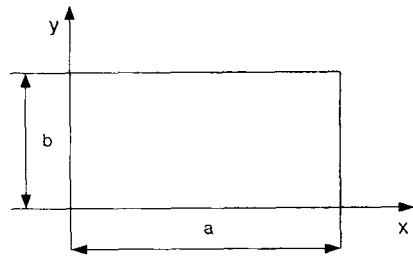


Fig. 5 Schematic of simply supported plate with a hole

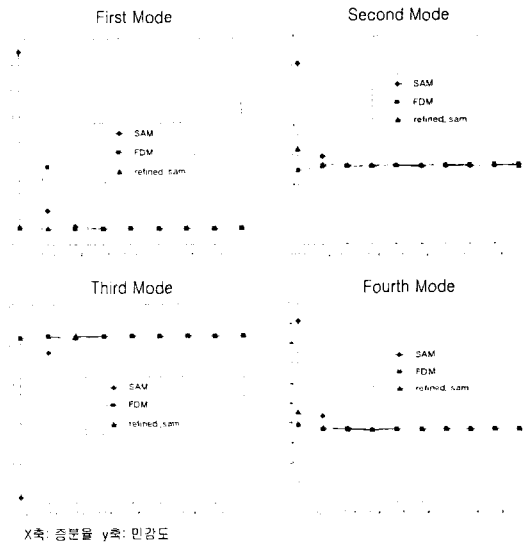


Fig. 6 The sensitivity analysis results of the plate with circular hole between refined SAM, the traditional SAM and the FDM

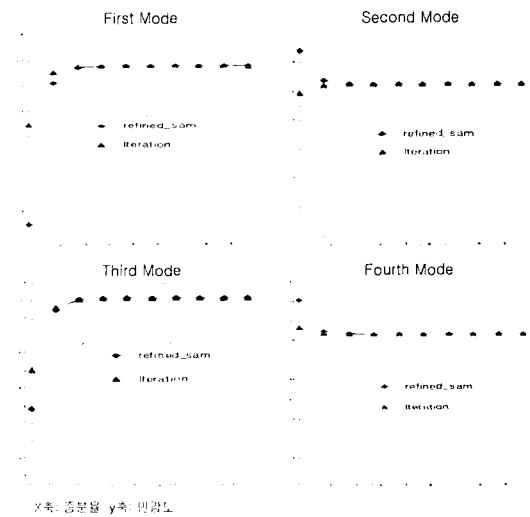


Fig. 7 The sensitivity analysis results of the plate with circular hole between refined SAM and Iteration

Table 1 Sensitivity calculation of eigenvectors in the rectangular plate

< Node 15 >

	2 nd mode		4 th mode		7 th mode		8 th mode	
	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration
10 ⁻³	-51.2172	0.0086	8.737	-0.0108	17.4668	-0.0054	20.5043	-0.0003
10 ⁻⁴	-4.3274	-0.0005	0.7371	-0.0042	1.4767	-0.0004	1.7264	-0.0003
10 ⁻⁵	-0.4265	-0.0005	0.0696	-0.0033	0.145	-0.0004	0.1687	-0.0003
10 ⁻⁶	-0.043	-0.0005	0.004	-0.0033	0.0141	-0.0004	0.0167	-0.0003
10 ⁻⁷	-0.0015	-0.0005	-0.0011	-0.0033	0.0012	-0.0004	0.005	-0.0003
10 ⁻⁸	-0.0009	-0.0005	-0.0032	-0.0033	-0.0003	-0.0004	-0.0001	-0.0003
10 ⁻⁹	-0.0005	-0.0005	-0.0033	-0.0033	-0.0004	-0.0004	-0.0003	-0.0003
10 ⁻¹⁰	-0.0005	-0.0005	-0.0033	-0.0033	-0.0004	-0.0004	-0.0003	-0.0003
10 ⁻¹¹	-0.0013	-0.0005	-0.0031	-0.0033	-0.0002	-0.0004	-0.0013	-0.0003

< Node 35 >

	2 nd mode		4 th mode		7 th mode		8 th mode	
	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration
10 ⁻³	-292.3	0.0494	-28.6	0.0159	-40.8	0.0154	32.9	0.0013
10 ⁻⁴	-24.1443	-0.0025	-2.4142	0.0137	-3.4438	0.0017	2.7715	0.0013
10 ⁻⁵	-2.4386	-0.0027	-0.2281	0.0108	-0.339	0.0017	0.2733	0.0013
10 ⁻⁶	-0.2459	-0.0027	0.0131	0.0108	-0.0323	0.0017	0.0285	0.0013
10 ⁻⁷	-0.0244	-0.0027	0.005	0.0108	-0.0031	0.0017	0.0025	0.0013
10 ⁻⁸	-0.0051	-0.0027	0.0105	0.0108	0.0019	0.0017	0.0016	0.0013
10 ⁻⁹	-0.0027	-0.0027	0.0108	0.0108	0.0017	0.0017	0.0013	0.0013
10 ⁻¹⁰	-0.0028	-0.0027	0.0108	0.0108	0.0017	0.0017	0.0013	0.0013
10 ⁻¹¹	-0.0028	-0.0027	0.0108	0.0108	0.0017	0.0017	0.0013	0.0013

< Node 70 >

	2 nd mode		4 th mode		7 th mode		8 th mode	
	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration
10 ⁻³	-169.2	0.0288	54.7	-0.0696	-231	0.0093	117.5	-0.0045
10 ⁻⁴	-14.2118	0.0004	4.6175	-0.0266	-2.4584	-0.0009	1.4723	-0.0045
10 ⁻⁵	-1.3989	0.0003	0.4358	-0.021	-0.2429	-0.0009	0.1409	-0.0045
10 ⁻⁶	-0.1384	0.0003	0.0246	-0.021	-0.0251	-0.0009	0.01	-0.0045
10 ⁻⁷	-0.0156	0.0003	0.0124	-0.021	-0.0024	-0.0009	-0.001	-0.0045
10 ⁻⁸	-0.001	0.0003	-0.0205	-0.021	-0.0012	-0.0009	-0.0043	-0.0045
10 ⁻⁹	0.0003	0.0003	-0.021	-0.021	-0.0009	-0.0009	-0.0045	-0.0045
10 ⁻¹⁰	0.0003	0.0003	-0.021	-0.021	-0.0009	-0.0009	-0.0045	-0.0045
10 ⁻¹¹	-0.0042	0.0003	-0.0193	-0.021	-0.0013	-0.0009	-0.0054	-0.0045

< Node 95 >

	2 nd mode		4 th mode		7 th mode		8 th mode	
	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration
10 ⁻³	121.6	-0.0229	63.2	-0.0792	0.0154	0.0154	14.4	0.005
10 ⁻⁴	11.6266	0.0029	5.3239	-0.0313	0.0047	0.0017	1.22	0.0049
10 ⁻⁵	1.1474	0.003	0.5028	-0.0249	0.0047	0.0017	0.1253	0.0049
10 ⁻⁶	0.1172	0.003	0.0278	-0.0249	0.0047	0.0017	0.0158	0.0049
10 ⁻⁷	0.012	0.003	-0.0122	-0.0249	0.0047	0.0017	0.006	0.0049
10 ⁻⁸	0.0041	0.003	-0.0244	-0.0249	0.0047	0.0017	0.005	0.0049
10 ⁻⁹	0.003	0.003	-0.0244	-0.0249	0.0047	0.0017	0.0049	0.0049
10 ⁻¹⁰	0.003	0.003	-0.0249	-0.0249	0.0047	0.0017	0.0049	0.0049
10 ⁻¹¹	0.0067	0.003	-0.0237	-0.0249	0.0047	0.0017	0.0049	0.0049

< Node 115 >

	2 nd mode		4 th mode		7 th mode		8 th mode	
	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration	Rigid body separation	Iteration
10 ⁻³	183.1312	-0.0284	-45.2103	0.0617	0.3891	-0.0039	-34.2031	0.0023
10 ⁻⁴	14.2956	0.0021	-4.1501	0.0248	0.0285	-0.0049	-2.878	0.0024
10 ⁻⁵	1.4085	0.0022	-0.3908	0.0199	-0.0015	-0.0046	-0.2811	0.0024
10 ⁻⁶	0.1427	0.0022	-0.0211	0.0199	-0.0044	-0.0049	-0.0259	0.0024
10 ⁻⁷	0.0036	0.0022	0.0195	0.0199	-0.0048	-0.0048	-0.0021	0.0024
10 ⁻⁸	0.0023	0.0022	0.0195	0.0199	-0.0048	-0.0049	0.0021	0.0024
10 ⁻⁹	0.0068	0.0022	0.0199	0.0199	-0.0048	-0.0048	0.0024	0.0024
10 ⁻¹⁰	159.1912	0.0022	0.0189	0.0198	-0.0048	-0.0048	0.0024	0.0024
10 ⁻¹¹	14.2956	0.0022	0.0195	0.0199	-0.0048	-0.0048	0.0024	0.0024
10 ⁻¹²	1.4095	0.0022	0.0189	0.0199	-0.0048	-0.0048	0.0024	0.0024

Fig. 6 은 유한차분법, 준해석적 방법, 강체모드 분리기법을 비교한 결과이고, Fig. 7 은 강체모드 분리기법과 반복법의 결과를 비교한 것이다. Fig. 6 에서 증분을 10^{-5} 이하에서는 세 가지 방법의 수렴성은 모두 신뢰할 수 있는 것으로 나타난다. 그러나, 10^{-5} 이상에서는 각 방법의 수렴성은 다르게 나타나고 있다. 증분율이 클 경우 세 방법 모두 신뢰도가 떨어지고 있으며, 유한 차분법의 경우 1 차 모드에서 불규칙적인 수렴경향을 보이고 있다. Fig. 7 에서 반복법에 의한 개선은 증분을 10^{-4} 이하에서는 나타나지 않고 있다. 그것은 강체모드 분리에 의해 충분한 수렴성이 보장되기 때문이다. 그러나, 증분율이 10^{-4} 이상으로 커질 경우 반복법은 1 차 모드부터 4 차 모드까지 수렴 결과를 개선하고 있음을 확인할 수 있다.

4.3 양 끝단이 고정된 사각 튜브의 자유진동문제

Fig. 8 은 해석을 수행한 사각 튜브 형상이다. 양 쪽 끝단이 고정되어 있고, 설계변수는 튜브의 길이 방향이다.

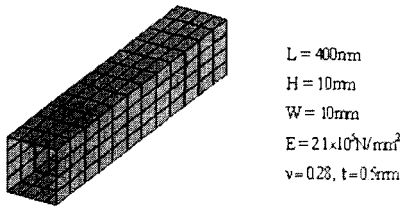


Fig. 8 Clamped rectangular tube opened at both ends

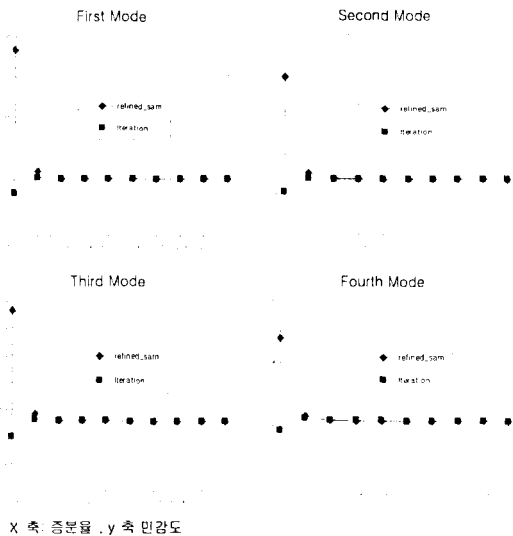


Fig. 9 The sensitivity analysis results of clamped rectangular tube between refined SAM and Iteration

Fig. 9 는 축방향 모드의 민감도 해석결과를 보이고 있다. 굽힘 모드의 경우에는 강체모드가 지배적이기 때문에 반복법에 의한 민감도 계산의 개선은 강체모드 분리법 이상의 효과를 기대하기 어렵다. 그러나, 축방향 진동모드는 차분에 의해 계산되어지는 수치적인 부분이 반복법에 의해 현저히 개선되는 결과를 얻을 수 있다. Fig. 9 에서 강체모드 분리법은 증분율이 큰 범위에서 민감도 결과의 신뢰성이 떨어지고, 반복법에 비해 수렴속도가 떨어짐을 알 수 있다. 강체모드 분리법은 증분율 10^{-4} 이하의 범위에서 수렴의 신뢰성이 보장되고 있음을 확인할 수 있다. 이런 경향은 결과에서 제시한 1 차부터 4 차 모드에서 모두 나타나고 있다.

4.4 단순지지된 실린더 쉘의 자유진동문제

Fig. 10 은 실린더 쉘의 형상이다. 설계변수는 실린더의 축방향 길이이고, 해석 요소수는 196 개이다.

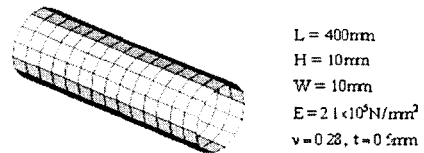


Fig. 10 Simply supported cylindrical shell

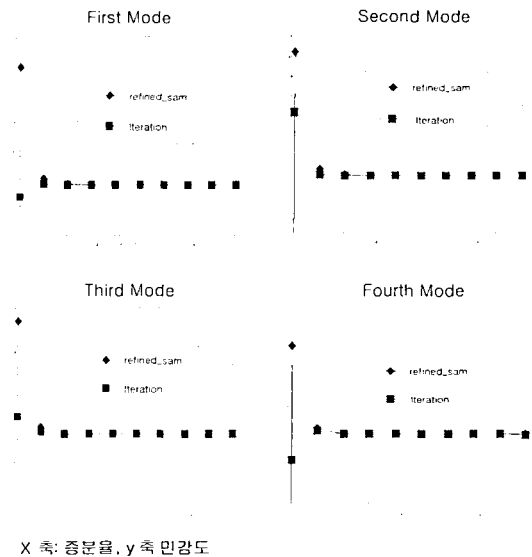


Fig. 11 The sensitivity analysis results of simply supported cylindrical shell between refined SAM and Iteration

Fig. 11 은 축방향 모드에 대한 해석 결과이며, 앞에서 제시하였던 사각튜브의 결과와 비슷한 경향을 보이고 있다. 반복법은 굽힘모드나 반경방향 모드에서는 주목할만한 개선을 보이지는 않는다. 그러나, 축방향 모드에서 반복법의 개선은 확연히 나타나고 있으며, 특히 증분율 10^{-4} 이상의 범위에서는 수렴속도와 수렴성이 강제모드 분리법에 비해 좋은 결과를 얻을 수 있다. 두번째 모드에서는 명확한 개선결과를 보이지 않고 있다.

그러나, 첫번째, 세번째 그리고 네번째 모드에서 정확도의 개선과 신뢰성은 충분히 확인할 수 있다. Fig. 11 에서 반복법은 강제모드분리법의 결과를 증분율이 큰 범위에서 개선시키고 있음을 알 수 있다.

5. 결론

기존의 준해석적 방법은 강제모드가 지배적인 문제에서 증분율의 선택에 따라서 심각한 부정확성을 나타내었다. 특히, $10^{-1} \sim 10^{-7}$ 에서는 truncation 오차가 발생하게 되고, 10^{-8} 부터는 round-off 오차에 의해 민감도 수렴성이 크게 떨어지는 결과를 나타내었다. 이 문제점은 정적문제에 비해 고유치 민감도 계산에서 더욱 크게 발생한다. 정적문제에서는 Van Keulen 과 Oral 등에 의해 강제모드분리와 반복법을 통해 문제점이 개선되어 왔다.

본 논문에서는 동적문제의 경우 이 두가지 방법을 조합하여 민감도 해석 결과를 증분율에 관계없이 개선시킬 수 있는 방법을 제안하고 있다. 그 방법으로 고유벡터를 강제모드와 순수변형부로 분리하고 초기 고유치 민감도값을 산출한 후, 증분율을 이용한 표현식을 사용하여 고유벡터 변화량식과 고유치 변화량식을 구성하였다. 2×3 회의 반복과정을 통해 수렴값을 얻을 수가 있으며, 직교화된 강제모드의 사용과 반복법에 의해 기존의 민감도 해석방법들과 수렴값의 효율성을 비교한 결과를 제시하였다. 결과로부터 증분율이 10^{-5} 이하일 경우에는 반복법의 성능 개선이 확연히 나타나지는 않는다. 그러나 증분율이 큰 경우는 반복법을 사용하지 않는 경우보다 수렴 속도를 개선할 수 있고, 오차를 크게 줄일 수 있는 것을 확인할 수 있었다. 그리고, 굽힘모드에서는 반복법에 의한 개선 결과가 미비하지만, 축방향 모드에서는 개선 효과가 확연함을 보여주고 있다.

고유벡터의 민감도 해석을 수행할 때는 그 정확도의 견지에서 본 논문에서 제안하는 반복법과 모드 분리법을 혼합한 방법을 강력히 추천한다.

고유치 민감도에서보다 고유벡터의 민감도 해석에서 본 연구에서 제안하는 방법은 강제모드만 분리한 방법과 비교하여 훨씬 높은 신뢰도를 보여준다.

결론적으로, 동적문제는 정적문제에 비해 많은 메모리와 시간을 요구하기 때문에 기존의 민감도 계산방법의 개선이 필요하다. 본 연구에서 제시된 방법은 고유벡터를 순수변형부와 강제모드부로 분리하여 계산함으로써 오차감소의 효과를 얻을 수 있고, truncation 오차는 반복법을 이용한 고차항의 추가를 통해 개선할 수 있으며 사용 유한요소 소프트웨어에도 쉽게 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

후 기

이 논문은 2002 년도 두뇌한국 21 사업에 의해 지원되었음

참고문헌

- (1) Parente, E., Jr. and Vaz, L.E., 2001, "Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities of Nonlinear Structures Using Equilibrium Relation," *Int.J.Numer. Mech.Engng.*, Vol. 50, pp. 127~2142.
- (2) Van Keulen F. and De. Boer, H., 1998, "Rigorous Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities by Exact Differentiation of Rigid Body Motions," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol. 42, pp. 71~91.
- (3) Suha Oral, 2000, "A Mindlin Plate Finite Element with Semi-Analytical Shape Design Sensitivities," *Computers and Structures*, Vol. 78, pp. 467~472
- (4) Kim, H. and Cho, M., 2001, "A Study on the Improvement of Shape Desing Sensitivity in Eigenvalue Problems Using Semi-Analytical Method," *Proc.COSEIK Symposium-Fall*, pp. 159~165.
- (5) Aminpour, M.A., 1992, "An Assumed Stress Hybrid 4 Node Shell Element with Drilling Degrees of Freedom," *Int.J.Numer.Mech.Engng.*, Vol. 33, pp. 19~38.
- (6) Kim, H., 2002, "A Study of Refined Semi-Analytic Sensitivity Based on the Finite Element," M.S.Thesis, Seoul National University.
- (7) Barthelemy, Chon, T. and Raphael, Haftka, T., 1988, "Accuracy Problems Associated with Semi-Analytical Derivatives of Static Response," *Finite elements in analysis and design.*, Vol. 4, pp. 249~265.
- (8) De Boer, H. and Van Keulen, F., 2002, "Refined Semi-Analytical Design Sensitivities," *Int.J.Solids Struct.*, Vol. 37, pp. 6961~6980.