

효율적인 C^0 적층 곡선보 요소의 개발

김진곤* · 강상욱*

(2002년 8월 21일 접수, 2003년 2월 21일 심사완료)

A New and Efficient C^0 Laminated Curved Beam Element

Jin-Gon Kim and Sang-Wook Kang

Key Words : Laminated Curved Beam Element(적층 곡선보 요소), Higher-Order Hybrid-Mixed Formulation(고차 혼합 정식화), Stress Parameters (응력매개변수)

Abstract

In this study, we present a new highly accurate two-dimensional curved composite beam element. The present element, which is based on the Hellinger-Reissner variational principle and classical lamination theory, employs consistent stress parameters corresponding to cubic displacement polynomials with additional nodeless degrees to resolve the numerical difficulties due to the spurious constraints. The stress parameters are eliminated and the nodeless degrees are condensed out to obtain the (9x9) element stiffness matrix. It should be noted that the stacking sequences without transverse deformation to the load plane makes a two dimensional analysis of curved composite beams practically useful. Several numerical examples confirm the superior locking-free behavior of the present higher-order laminated curved beam element.

1. 서론

단섬유 보강 복합 적층재는 높은 강도로 인해 항공기와 자동차 등의 분야에서 구조물의 경량화를 위해서 널리 사용되고 있다. 또한 보는 여러 공학 분야에서 가장 일반적으로 사용되는 간단한 구조 요소이다. 이종곡률에 의한 영향을 제외하면, 곡선보는 축대칭 셀 요소가 가지는 신장-굽힘간 상호작용, 강체모드 구현의 어려움, 그리고 막-전단 강성과잉현상(membrane and shear locking) 등의 중요한 특징들을 대부분 가진다. 따라서, 정확하고 효율적인 복합 적층 보 요소의 개발은 그 의의가 매우 크다고 할 수 있다.

C^0 연속 축방향 변위와 C^1 연속 수직방향 변위를 사용하고 Kirchhoff-Love 이론에 바탕한 곡선보 요소나 또는 전단 변형을 고려한 저차의 보간함수를 사용하는 요소는 두께가 곡률의 반경에 비

해 아주 작은 경우의 아치문제에서 가성구속이 발생하여 강성과잉현상이 발생한다.⁽¹⁻³⁾ 강성과잉현상이 발생되면 변위는 실제보다 작게 계산되며 심각한 요동을 가지는 응력분포를 나타낸다.

이러한 최소 퍼텐셜 에너지 이론에 바탕한 변위 모델이 가지는 수치적인 문제점을 해결하기 위해 감차/선택 적분 요소(reduced/selective integration element),^(4,5) 장-일관 요소(field-consistent element),⁽⁶⁾ 비등매개변수 요소(anisoparametric element)⁽⁷⁾ 그리고 변형률 요소(strain-based element)⁽⁸⁾ 등과 같은 여러 가지 방법들이 제시되었다. 변위 모델에 대한 또 다른 대안으로서, Saleeb⁽⁹⁾과 Kim 등은^(10,11) Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕한 혼합 요소(hybrid-mixed element)들을 제안하였다. 그러나 제안된 혼합 요소들은 강성과잉과 같은 수치적인 문제점은 완화시켰지만, 저차의 보간함수를 사용하는 경우 효율성이 높지 않은 문제점이 있다. 따라서, 저차 혼합요소의 효율성을 향상시키기 위해, Kim 과 Kim 은⁽¹⁰⁾ 혼합 곡선 보 요소에 무절점 자유도(nodeless degrees)를 도입하여 수치적 거동을 향상시켰다.

본 논문에서는, 복합 적층보 해석을 위한 정확하고 효율적인 새로운 고차 혼합 곡선 보 요소를

† 책임저자, 회원, 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부
E-mail : kimjg1@cataegu.ac.kr
TEL : (053)850-2711 FAX : (053)850-2710
* 회원, 한성대학교 산업및기계시스템공학부

제안하고자 한다. 적층 보요소의 개발을 위하여 일반적인 적층 이론(lamination theory)을 사용하였다.^(12,13) 일반적인 적층판 순서를 가지는 복합 보는 하중면에 대해 전단 변형이 발생할 수도 있다. 따라서, 많은 문제들에서 하중면에 대한 전단 변형이 없는 스택킹 순서(stacking sequences)의 사용은 복합 적층 곡선보의 2 차원 해석이 실제 문제에서 적용 가능하게 한다.

이러한 적층이론을 통하여 혼합정식화에 바탕하고 무절점 자유도를 도입한 새로운 적층 곡선보 요소를 정식화하였다. 또한 장-일관성 개념을⁽⁷⁻⁹⁾ 도입하여, 변위 함수에 대응되는 적절한 응력매개 변수(stress parameter)들을 선정하였다. 응력매개 변수들은 定常조건(stationary condition)을 통하여, 그리고 도입된 무절점 자유도들은 정적 축약을⁽¹⁴⁾ 통하여 요소 정식화의 최종단계에서 제거함으로써, 일반적인 변위 요소의 강성행렬과 크기가 같은 (6x6)의 강성행렬을 유도하였다.

모든 해석과 수식의 유도는 Mathematica 프로그램을⁽¹⁵⁾ 사용하였으며, 여러 예제들에 대한 수치해석을 통하여 본 연구에서 제안한 요소의 뛰어난 정확성과 효율성을 확인할 수 있었다.

2. Hellinger-Reissner 변분이론

Fig. 1 은 6 개의 변위 자유도를 가지는 2 절점 곡선보 요소를 보여주고 있다. u 와 v 는 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향 변위를 나타내며, θ 는 z 방향 회전량을 나타내는 변위 성분이다. N 과 V 는 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향의 내력들이며, M 은 굽힘모우멘트 성분이다. 그림에서 하첨자 1 과 2 는 변위와 내력 성분들이 정의되는 절점의 의미이다. 고려된 곡선보는 두께 h 와 초기 곡률 반경 R 과 길이 l 을 가진다. 곡선보에 대한 Hellinger-Reissner 범함수(functional)는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\Pi_R = \int_V \left[-\frac{1}{2} \sigma' S \sigma + \sigma' \epsilon - (\sigma^{Th} + \sigma^{Hy})^T \epsilon \right] dV - W \quad (1)$$

여기서,

$$W = \int_L (p_x u + p_y v) dx + \sum_{i=1}^2 (N_i u_i + V_i v_i + M_i \theta_i) \quad (2)$$

곡선보의 응력 벡터 σ 와 변형률 벡터 ϵ 는 각각 $\sigma = [N, V, M]^T$ 와 $\epsilon = [\epsilon_0, \gamma_0, \kappa]^T$ 이다. S 는 컴플라이언스(compliance) 행렬을 나타내며, σ^{Th} 와 σ^{Hy} 는 각각 열하중과 hygrothermal 하중을 나타낸다.

깊은 곡선보(deep curved beam) 이론에서, 기준면

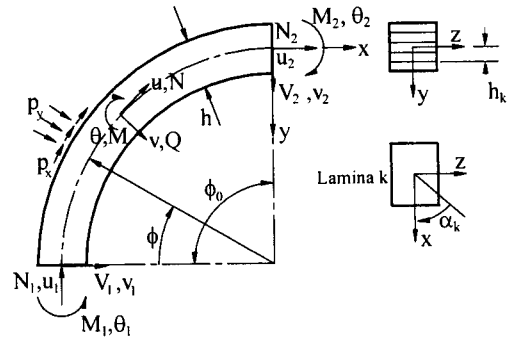


Fig. 1 The geometry of a two-noded laminated curved beam element

(reference surface)에서 y 만큼 떨어진 위치에서의 수직변형률 ϵ_x 과 전단변형률 γ_{xy} 는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_x = \frac{1}{1-y/R} (\epsilon_0 - y\kappa) \approx \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{y^2}{R^2} \right) (\epsilon_0 - y\kappa) \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\gamma_0}{1-y/R} \approx \left(1 + \frac{y}{R} + \frac{y^2}{R^2} \right) \gamma_0 \quad (4)$$

Naghdi 와 Reissner⁽⁹⁾ 의 셸 이론으로부터 유도된 곡선보 이론에 의해 중립면에서 정의되는 일반적인 변형률(generalized strain)은 다음과 같다.

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{Rd\phi} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{d}{Rd\phi} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{d}{Rd\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \Delta \cdot \mathbf{u} \quad (5)$$

이 때, ϕ 는 원주방향 중심각을 나타낸다. k 번째 단일층(single ply)에 대해 2 차원 보의 응력-변형률 관계식을 적용하면 다음과 같다.⁽¹³⁾

$$\sigma_x^k = E_x^k (\epsilon_x^k - \eta_x^k \Delta T - \mu_x^k \Delta m) \quad (6)$$

$$\tau_{xy}^k = G_x^k k_s \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) \gamma_{xy}^k \quad (7)$$

여기서, k_s 는 전단계수(shear factor), E_x^k 는 유효탄성계수(effective elastic modulus), G_x^k 는 유효전단계수(effective shear modulus), η_x^k 는 열팽창계수(coefficient of thermal expansion), μ_x^k 는 hygrometric 계수를, 그리고 ΔT 와 Δm 은 각각 온도와 습도변화를 나타낸다. E_x^k 와 G_x^k 는 다음과 같이 표현되어지며, α_k 는 섬유(fibre) 방향과 보의 길이방향

사이의 각을 나타낸다.⁽¹³⁾

$$\frac{1}{E_x^k} = \frac{\cos^4 \alpha_k}{E_{11}} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_{11}} \right) \cos^2 \alpha_k \sin^2 \alpha_k + \frac{\sin^4 \alpha_k}{E_{22}} \quad (8)$$

$$G_x^k = G_{13} \cos^2 \alpha_k + G_{23} \sin^2 \alpha_k \quad (9)$$

응력에 대한 합력들은 단면의 면적에 대한 적분을 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N = \int_A \sigma_x dA = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_x^k b^k dy$$

$$\approx [A_x + \frac{1}{R} B_x + \frac{1}{R^2} D_x] \cdot \epsilon_o - \quad (10)$$

$$[B_x + \frac{1}{R} D_x + \frac{1}{R^2} F_x] \cdot \kappa - N^{Th} - N^{Hy}$$

$$V = \int_A \tau_{xy} dA = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{xy}^k b^k dy$$

$$\approx k_x [A_{xy} + \frac{1}{R} B_{xy} + \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{h^2} \right) D_{xy} - \quad (11)$$

$$\frac{4}{Rh^2} F_{xy} - \frac{4}{R^2 h^2} H_{xy}] \cdot \gamma_o$$

$$M = \int_A \sigma_x y dA = \sum_{k=1}^{N_l} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_x^k y b^k dy$$

$$\approx [B_x + \frac{1}{R} D_x + \frac{1}{R^2} F_x] \cdot \epsilon_o - \quad (12)$$

$$[D_x + \frac{1}{R} F_x + \frac{1}{R^2} H_x] \cdot \kappa - M^{Th} - M^{Hy}$$

윗 식에서, N_l 은 적층의 수를, b^k 는 적층 보의 k 번째 층의 폭넓이를 나타낸다. 그리고 상기의 식들에서 정의된 상수들은 다음과 같다.

$$\left\{ \begin{matrix} A_x \\ B_x \\ D_x \\ F_x \\ H_x \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^{N_l} E_x^k b^k \left\{ \begin{matrix} (h_k - h_{k-1}) \\ (h_k^2 - h_{k-1}^2)/2 \\ (h_k^3 - h_{k-1}^3)/3 \\ (h_k^4 - h_{k-1}^4)/4 \\ (h_k^5 - h_{k-1}^5)/5 \end{matrix} \right\} \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{matrix} A_{xy} \\ B_{xy} \\ D_{xy} \\ F_{xy} \\ H_{xy} \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^{N_l} G_x^k b^k \left\{ \begin{matrix} (h_k - h_{k-1}) \\ (h_k^2 - h_{k-1}^2)/2 \\ (h_k^3 - h_{k-1}^3)/3 \\ (h_k^4 - h_{k-1}^4)/4 \\ (h_k^5 - h_{k-1}^5)/5 \end{matrix} \right\} \quad (14)$$

이로부터 일반적인 응력-변형률 관계식을 다음과 같이 간략히 나타낼 수 있다.

$$\sigma = C \cdot \epsilon \quad (15)$$

여기서, C 는 적층 곡선보의 응력-변형률간 강성 행렬을 의미하며, 컴플라이언스 행렬 S 는 강성행렬의 역행렬 C⁻¹ 이다.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & 0 \\ C_{13} & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서

$$C_{11} = A_x + \frac{1}{R} B_x + \frac{1}{R^2} D_x \quad (17a)$$

$$C_{13} = B_x + \frac{1}{R} D_x + \frac{1}{R^2} F_x \quad (17b)$$

$$C_{22} = k_x [A_{xy} + \frac{1}{R} B_{xy} + \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{h^2} \right) D_{xy} - \frac{4}{Rh^2} F_{xy} - \frac{4}{R^2 h^2} H_{xy}] \quad (17c)$$

$$C_{33} = D_x + \frac{1}{R} F_x + \frac{1}{R^2} H_x \quad (17d)$$

3. 유한요소정식화

저차함수를 가지는 2 절점 혼합 곡선보 요소의 수치적 효율성을 향상시키기 위해, 일반적인 등매개 보간함수에 $\frac{1}{4}(1-\xi^2)$ 와 $\frac{1}{4}(\xi^3-\xi)$ 같은 고차함수(bubble function)들을 도입하였다.⁽¹¹⁾ 곡선보 요소의 굽힘거동을 보다 정확하게 표현하기 위해 도입된 무차원 변수 $\xi = \varphi/\varphi_o$ ($-1 \leq \xi \leq 1$) 로 표현되는 고차함수를 사용함으로써, 변위는 다음과 같이 3 차의 보간 함수를 가지게 된다.

$$u = \frac{1-\xi}{2} u_i + \frac{1+\xi}{2} u_j + \frac{1}{4}(1-\xi^2) a_1 + \frac{1}{4}(\xi^3-\xi) a_2 \quad (18a)$$

$$v = \frac{1-\xi}{2} v_i + \frac{1+\xi}{2} v_j + \frac{1}{4}(1-\xi^2) a_3 + \frac{1}{4}(\xi^3-\xi) a_4 \quad (18b)$$

$$\theta = \frac{1-\xi}{2} \theta_i + \frac{1+\xi}{2} \theta_j + \frac{1}{4}(1-\xi^2) a_5 + \frac{1}{4}(\xi^3-\xi) a_6 \quad (18c)$$

식 (18)을 다음과 같이 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$u = [N_c : N_b] \cdot \begin{Bmatrix} d_c \\ d_b \end{Bmatrix} = N \cdot d \quad (19)$$

여기서, $d_b = \{a_1, \dots, a_6\}'$ 는 $\xi = -1, 1$ 의 절점에서는 정의되지 않지만, $\xi = 0$ 에서의 굽힘 변형과 관계된 무절점 자유도들이다. $d_c = \{u_i, \dots, \theta_j\}'$ 는

일반적인 형태의 등매개 곡선보 요소가 가지는 절점에서의 자유도 성분들이다.

혼합정식화에서, 변위의 근사함수에 대응되는 적절한 응력매개변수를 선정하기 위해, 전단 변형률에 대한 극한 거동(limit behavior)을 살펴보고자 한다. 먼저, 보가 거의 직선에 가깝고, 두께가 아주 얇아지는 경우 ($R \rightarrow \infty$), 전단 변형률이 무시할 정도로 작아진다.^(6,11) 따라서, 식 (5)와 (18)로부터 전단 변형률은 다음과 같이 표현된다.

$$\gamma_0 = \frac{dv}{ld\xi} - \theta = \left(\frac{2v_j - 2v_i - a_4}{4l} - \frac{2\theta_i - 2\theta_j + a_5}{4} \right) + \left(\frac{2\theta_i - 2\theta_j + a_6}{4} - \frac{a_3}{2l} \right) \xi + \left(\frac{3a_4}{4l} + \frac{a_5}{4} \right) \xi^2 - \frac{a_6}{4} \xi^3 \quad (20)$$

식 (20)에서, 전단 변형률 γ_0 이 0 이 되면서, a_6 이 0 으로 가는 불필요한 구속조건이 발생하게 되며, 이는 요소 단위에서는 $\theta_{,xxx} \rightarrow 0$ 과 같은 가상구속조건(spurious constraint)을 발생시키게 된다. 이러한 가상구속조건은 존재하지 않은 전단에 대한 가상에너지를 정식화 과정에 도입하게 되어, 전단 강성과잉이나 전단력 계산에 심각한 편차를 발생시킨다.^(6,10) 따라서, 상기의 보의 극한적 거동에서 발생되는 가상구속을 제거하기 위하여, 전단 변형률이나 응력에 대한 근사함수는 2 차 함수로 가정해야 한다.

유사한 방법으로, 비신장 굽힘(inextensional bending)과 같은 극한조건에서, 식 (5)의 축방향 변형률을 살펴보면 a_4 가 0 이 되는 구속조건이 발생한다. 이러한 a_4 에 관련된 구속조건은 요소 단위에서 $v_{,xxx}$ 가 0 이 되는 가상구속조건이 된다. 따라서, 일반적인 응력장에서 발생하는 가상구속조건들을 제거하기 위해, 응력장의 근사를 위해서는 3 차의 변위함수보다 한 차수 낮은 2 차의 응력함수를 가지는 다음과 같은 응력매개변수들로 가정해야 한다.

$$N = \beta_1 + \xi \beta_2 + \xi^2 \beta_3, \quad (21a)$$

$$V = \beta_4 + \xi \beta_5 + \xi^2 \beta_6, \quad (21b)$$

$$M = \beta_7 + \xi \beta_8 + \xi^2 \beta_9, \quad (21c)$$

여기서, β_i ($i=1, \dots, 9$) 는 응력매개변수를 나타내며, 식 (21)는 다음과 같이 간단한 벡터형태로 나타낼 수 있다.

$$\sigma = P \cdot \beta \quad (22)$$

이 때, P 는 응력에 대한 근사함수의 행렬을 나타낸다.

Table 1 The characteristics of several curved laminated beam elements in consideration

Displacement Approximation	Stress Approximation	Designation
Linear	Constant	CDLSC2
Cubic	Quadratic	CDCSQ2

이와 같이 응력에 대한 근사함수를 변위 보간함수와 일관성을 가지는, 즉 변위함수보다 차수가 하나 낮은 함수로 가정하지 않는다면, 비록 혼합요소일지라도 강성과잉이나 응력요동과 같은 수치적인 문제점을 가지게 되며, 일반적인 변위요소와 등가의 강성행렬을 가진다는 것이 Kim 에^{(10),(11)} 의해 보고된 바 있다. 본 논문에서 제안한 변위와 응력에 대한 식 (19)와 (22)를 이용하여 고차의 적층 곡선보 요소 CDCSQ2 를 정식화하였다. 또한, 제안한 CDCSQ2 요소의 정확성과 효율성을 검증하기 위하여, 무절점 자유도를 도입하지 않은 저차의 적층 곡선보 요소 CDLSC2 를 정식화하여 비교하였다.

4. 요소강성행렬

유한요소의 강성행렬을 유도하기 위해, 식 (19)와 (22)를 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 식으로 나타난다.

$$\varepsilon = \Delta \cdot N \cdot d = B \cdot d \quad (23)$$

$$\Pi_R = \beta' G d - \frac{1}{2} \beta' H \beta - R' d \quad (24)$$

그리고,

$$H = \int_c P' S P dx \quad (25a)$$

$$G = \int_c P' B dx = \int_c P' [B_c : B_b] dx = [G_c : G_b] \quad (25b)$$

여기서, 행렬 G 는 일반적인 형태의 변형률-변위 행렬 B_c 와 무절점 자유도에 대응되는 고차 변형률-변위 행렬 B_b 로 구성되는 행렬성분이다. 하중벡터 R 은 다음과 같이 표시된다.

$$R = \int_c [(\sigma^{Th} + \sigma^{Hy})' B] dx + Q' \quad (26)$$

이 때, Q 는 등가의 절점력을 나타낸다.

벡터 d 와 β 에 대해 식 (24)의 범함수의 평형조건을 적용하면

$$G' \beta = R \quad (27a)$$

$$H' \beta = G d \quad (27b)$$

식 (27)에서 β 를 요소 단위에서 제거하면, 다음의 식

을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{cb} \\ \mathbf{K}_{bc} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c \\ \mathbf{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

여기서, 부행렬 성분 \mathbf{K}_{jj} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{jj} = \mathbf{G}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{G}_j \quad (i \text{ and } j = c, b) \quad (29)$$

무절점 자유도 \mathbf{d}_b 는 어떠한 하중도 전달할 수 없으므로, 식 (28)을 정적응축(static condensation)을 통하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{d}_b = -\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{bc}\mathbf{d}_c \quad (30)$$

식 (30)을 식 (28)의 첫번째 식에 대입하면 최종적으로 다음과 같은 요소방정식을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{d}_c = \mathbf{R} \quad (31a)$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{cb}\mathbf{K}_{bb}^{-1}\mathbf{K}_{bc} \quad (31b)$$

따라서, 요소는 이제 절점에서의 변위성분만을 변수로 갖는 강성행렬형태로 다룰 수 있게 되었으며, 일반적인 변위모델과 같이 축약된 각각의 요소 강성행렬과 하중벡터를 전체적으로 합칠 수 있으며, 또한 경계조건을 부과할 수 있다. 또한, 식 (31b)에서 \mathbf{K}_{cc} 는 무절점 자유도를 도입하지 않은 저차의 CDLSC2 요소의 요소 강성행렬이 됨을 알 수 있다.

5. 수치예제

본 연구에서 제안한, 3 차의 변위 보간함수와 2 차의 응력근사함수를 가지는 혼합요소 CDCSQ2의 수치 거동을 정해에 대한 수렴성, 강성과잉 현상등의 관점에서 보다 자세하게 살펴보기 위하여 몇 가지 수치예제에 대해 해석을 수행하였다.

5.1 직선 외팔보

$R \rightarrow \infty$ 로 가고 $R\phi_0 = l$ 인 직선보(nearly straight beam)에서 전단강성과잉(shear locking)현상을 살펴보기 위하여, 길이가 L 이고 단면의 높이가 h 인 외팔보의 자유단에서 전단력 P 가 작용하는 문제를 고려하였다. 보의 재료물성과 기하학적 형상은 Table 2와 같다. Timoshenko 보 이론을 적층보 이론에 적용하면, 외팔보의 자유단에서의 수직방향 변위에 대한 정해는 다음과 같이 구해진다.

$$v_{theory} = PL^3 \left[\Gamma_1 \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right) + \Gamma_2 \left(\frac{x}{L} \right) \right] \quad (32)$$

여기서, 식 (13)과 (14)로부터

$$\Gamma_1 = \frac{A_x}{2(A_x D_x - B_x^2)} ; \quad \Gamma_2 = \frac{1}{k_s(A_{xy} - 4D_{xy}/h^2)}$$

Fig. 2는 사용하는 요소 수를 증가시킬 때의 수직방향 변위값의 수렴성을 보여주고 있다. 두 요소 모두, 변위에 대응하는 적절한 응력매개변수를 사용하여, 강성과잉(shear locking)현상은 발생하지 않음을 확인할 수 있다. 하지만, 무절점 자유도를 도입한 고차 적층 보요소 CDCSQ2의 수렴성이 저차 적층 보요소 CDLSC2보다 월등히 뛰어난 것을 알 수 있다. 비록, CDCSQ2 요소의 요소단위 강성행렬의 계산에 다소 시간이 CDLSC2보다 소요되지만, 뛰어난 수렴성으로 인해 이러한 추가적인 계산시간을 충분히 상회하는 효율성을 보이고 있다. 이로부터, 적층 보요소에 고차 혼합 정식화가 상당히 효과적으로 적용될 수 있음을 확인할 수 있다.

Table 2 Material and geometric data of a straight beam

Material (Kevlar epoxy) ⁽¹³⁾	
E_{11}	76 GPa
E_{22}	5.5 GPa
$G_{12} = G_{13} = G_{23}$	2.3 GPa
ν_{12}	0.34
Geometry	
Stacking sequence	[90/45/-45/45/-45/0] _s
Beam length	0.5 m
Beam height	12 mm
Beam width	20 mm
Tip transverse load	1 N

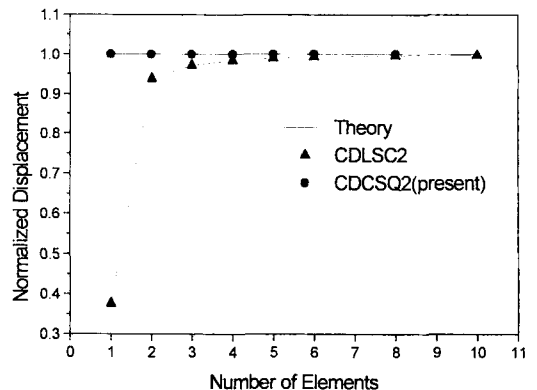


Fig. 2 Convergence behavior of the normalized displacement at the loaded point in the nearly straight beam

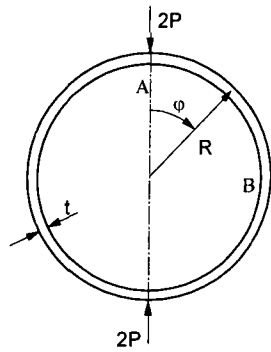


Fig. 3 A pinched ring

Table 3 Material and geometric data of a pinched ring

Material (graphite epoxy) ⁽¹³⁾	
E_{11}	289 GPa
E_{22}	6.06 GPa
$G_{12} = G_{13} = G_{23}$	4.13 GPa
ν_{12}	0.31
Geometry	
Stacking sequence	$[90/45/-45/45/-45]_s$
Radius R	0.1 m
Beam height h	20 mm
Beam width b	20 mm
Shear factor k_s	1.2

5.2 Pinched Ring

Fig. 3 과 같이 반경이 0.1m 이고 두께가 20mm ($R/h=5$)인 링의 상하에 횡방향의 집중하중이 가해지는 곡선보를 살펴보았다. 이 경우, 대칭 경계조건을 이용하여 A 에서 B 까지 사분원 링만 모델링하여 해석하였다. 고려한 곡선보의 재료물성과 기하학적 형상은 Table 3 과 같다. 본 연구에서 제안한 유한요소에 대한 수치해의 수렴성을 검증하기 위하여, 부록에 유도된 정해를 비교에 사용하였다. Fig. 4 는 유도된 정해에 대한 유한요소해의 수렴성을 비교한 결과이다. 이러한 깊은 곡선보 문제에서, 직선보의 경우보다 고차의 혼합 적층 보요소가 저차의 요소보다 훨씬 뛰어난 수치적 거동을 보임을 다시 한 번 확인할 수 있다. CDCSQ2 요소의 요소 단위에서 추가되는 수치적 계산량을 고려하더라도, 훨씬 효율적이고 정확함을 알 수 있다. Fig. 5 는 수직방향 하중값의 분포를 보여주는 그림이다. 하중에 대해서도 CDCSQ2 요소는 적분점 외의 위치에서도 단 2 개의 요소만으로 이론해와 거의 일치하는 정확성을 보여주었다.

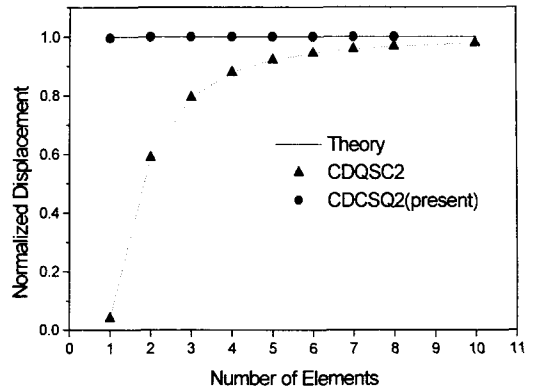


Fig. 4 Convergence behavior of the normalized displacement at the loaded point in the pinched ring shown in Fig. 3

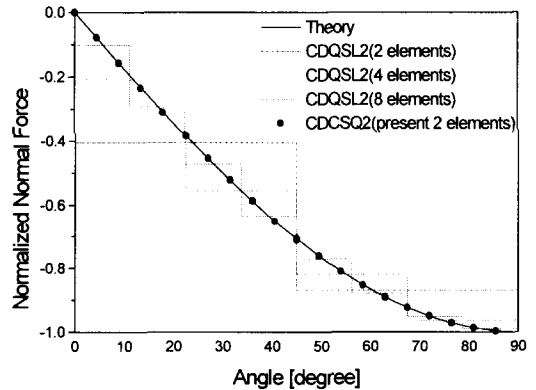


Fig. 5 Normal force distribution for the pinched ring.

6. 결론

본 논문에서는, 복합 적층보 해석을 위한 정확하고 효율적인 새로운 고차 혼합 곡선보 요소를 제안하였다. 적층 하중면에 대한 전단변형이 없는 스택킹 순서를 적층이론을 통하여, 혼합정식화에 바탕하고 무절점 자유도를 도입한 새로운 적층 곡선보 요소를 정식화하였다. 또한 장-일관성 개념을 도입하여, 변위 함수에 대응되는 적절한 응력 매개변수(stress parameter)들을 선정하였다. 응력매개변수들은 定常조건(stationary condition)을 통하여, 그리고 도입된 무절점 자유도들은 정적 축약을 통하여 요소 정식화의 최종단계에서 제거하여, 일반

적인 형태의 강성행렬을 유도하였다.

몇 가지 예제에 대한 수치해석을 통하여 본 연구에서 제안한 고차의 혼합 적층 곡선보 요소가 무절점 자유도의 도입으로 인해 요소단위에서 다소 추가적인 계산시간이 소요됨에도 불구하고, 강성과잉을 제거하고 뛰어난 정확성과 효율성을 가짐을 확인할 수 있었다. 또한, 제안된 요소의 응력합력의 정확한 계산능력은 적층에서 발생하는 층간응력(interlaminar stress)을 보다 정확히 계산하는 데도 활용될 수 있을 것이다.

후 기

이 논문은 2002년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2002-002-D00008)에 의하여 연구 되었음.

참고문헌

(1) Dawe, D. J., 1974, "Numerical Studies Using Circular Arch Finite Elements," *Comput. Struct.*, Vol. 4, pp. 729~740.

(2) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1983, "Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 41, pp. 279~296.

(3) Noor, A. K. and Peters, J. M., 1981, "Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Analysis of Curved Beams," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 17, pp. 615~631.

(4) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1982, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 172~176.

(5) Moon, W. J., Kim, Y. W., Min, O. K. and Lee, K. W., 1996, "Reduced Minimization Theory in Skew Beam Element," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 20, No. 12, pp. 3702~3803.

(6) Prathap, G. and Babu, C. Ramesh, 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 1583~1600.

(7) Tessler, A. and Spiridigliozzi, L., 1986, "Curved Beam Elements with Penalty Relaxation," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 2245~2262.

(8) Ryu, H. S. and Sin, H. C., 1996, "A 2-Node Strain Based Curved Beam Element," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 18, No. 8, pp. 2540~2545.

(9) Saleeb, A. F. and Chang, T. Y., 1987, "On the Hybrid-Mixed Formulation C^0 Curved Beam Elements," *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 60, pp. 95~121.

(10) Kim, J. G. and Kim, Y. Y., 1998, "A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 43, pp. 925~940.

(11) Kim, J. G., 2000, "Optimal Interpolation Functions of 2-Node Hybrid-Mixed Curved Beam Element," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 24, No. 12, pp.

3003-3009.

(12) Dorfi, H. R. and Busby, H. R., 1994, "An Effective Curved Composite Beam Finite Element Based on the Hybrid-Mixed Formulation," *Comput. Struct.*, Vol. 53, pp. 43~52.

(13) Vinson, J. R. and Sierakowski, R. L., 1986, *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff, Dordrecht.

(14) Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd Edition, Wiley, New York.

(15) Wolfram, S., 1991, *Mathematica*, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc..

(16) Bhimaraddi, A., Carr, A. J. and Moss, P. J., 1989, "Generalized Finite Element Analysis of Laminated Curved Beams with Constant Curvature," *Comput. Struct.*, Vol. 31, pp. 309~317.

부 록 : Exact Solution

Fig. 3의 곡선보의 정해는 다음과 같이 구할 수 있다. 경계조건은 다음과 같다.

$$u(0) = u(\pi/2) = 0$$

$$\theta(0) = 0$$

구조물이 정적으로 정정(statically determinat)이므로, 곡선보의 평형방정식으로부터 다음과 같은 합력을 구할 수 있다.

$$N = -P \sin \varphi \tag{33a}$$

$$V = -P \cos \varphi \tag{33b}$$

$$M = -PR(1 - \sin \varphi) \tag{33c}$$

식 (15)의 일반화된 응력과 변형률의 컴플라이언스 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} \\ 0 & S_{22} & 0 \\ S_{13} & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ V \\ M \end{Bmatrix} \tag{34}$$

식 (5), (33) 그리고 (34)로부터 θ 에 대한 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\theta_{,\varphi} = -PR[S_{13} \sin \varphi + S_{33}R(1 - \sin \varphi)] \tag{35}$$

위 식을 적분한 후 경계조건을 적용하면 θ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\theta = PR[S_{13}(\cos \varphi - 1) + S_{33}R(1 - \cos \varphi)] \tag{36}$$

유사하게 식 (5)에서 ϵ_0 를 φ 에 대해 미분한 후, γ_0 와 관련된 항에 더하면 아래 식과 같은 축방향의 변위 u 에 대한 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$u + u_{,\varphi\varphi} = R(\gamma_0 + \epsilon_{0,\varphi} + \theta) \tag{37}$$

위 식에 식 (33), (34) 그리고 (36)을 대입하면 다음

과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$u + u_{,\varphi\varphi} = A \cos \varphi + B\varphi + C \quad (38)$$

여기서

$$A = -PR(S_{11} + S_{22} + R^2S_{33} - 2RS_{13})$$

$$B = -PR^3S_{33}$$

$$C = -PR^2(S_{13} - RS_{33})$$

식 (38)의 미분방정식에서 동차해(homogeneous solution)와 특수해(particular solution)는 다음과 같다.

$$u_h(\varphi) = a \cos \varphi + b \sin \varphi \quad (39a)$$

$$u_p(\varphi) = \frac{A}{2} \varphi \sin \varphi + B\varphi + C \quad (39b)$$

위 식에 경계조건을 적용하면 변위 u 의 정해는 다음과 같이 구해진다.

$$u(\varphi) = \frac{A}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi + B \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \varphi + C(1 - \cos \varphi - \sin \varphi) \quad (40)$$

식 (33), (34)와 (40)을 식 (5)에 대입하면, 변위 v 는 최종적으로 다음과 같이 구해진다.

$$v(\varphi) = \sin \varphi \left[\frac{A}{2} + C + PR(S_{11} - S_{13}R) \right] + \cos \varphi \left[\frac{A}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{B\pi}{2} - C \right] + B + PR^2S_{13} \quad (41)$$