

# 공간상에서 자유 곡면 물체의 접촉 모델링

박수진\* · 신기봉\* · 손정현\*\* · 유완석\*\*\*  
(2002년 7월 25일 접수, 2003년 2월 17일 심사완료)

## Contact Modeling of Arbitrary Shaped Bodies in Space

Su-Jin Park, Ki-Bong Shin, Jeong-Hyun Sohn and Wan-Suk Yoo

**Key Words:** Multibody Dynamics(다물체 동역학), Contact Force(접촉력), Parameter(매개변수), Penetration(침투량), Continuous Analysis(연속 해석법)

### Abstract

The contact analyses of arbitrary shaped spatial bodies are important in the study of multi-body dynamics. This paper presents a method for calculating contact force between bodies in space. At each integration time step, the proposed method finds potential contact points on bodies and then calculates the penetration, the velocity of penetration, and the contact force. A continuous analysis method is adopted to calculate the contact force. To get contact points accurately on their outlines, a new algorithm is developed. The proposed algorithm is tested and compared the results of DADS. As applications, the contact of two steel balls, spatial pendulums, and the problem of a ball and bat are demonstrated.

### 1. 서 론

기어, 볼트와 너트, 베어링, 나사 등 각종 기계 부품류에서 접촉은 피할 수 없는 현상이다. 이들의 접촉은 기계시스템의 성능이나 각 부품의 파손이나 마멸에 직접적인 영향을 미치므로 이러한 접촉현상에 대한 정확한 해석이 필요하다. 이러한 접촉현상은 충돌과 같이 짧은 시간 동안에 매우 큰 접촉력을 발생시켜 급격한 속도와 가속도의 변화를 초래하는 접촉현상이 있는 반면에 기어나 지면을 굴러가는 물체간의 접촉과 같이 계속적인 접촉력을 발생시키는 접촉도 있다.

접촉을 해석하는 방법으로는 불연속 해석하는 법(piecewise analysis)과 연속 해석법(continuous

analysis)으로 나눌 수 있다. 불연속 해석법은 시스템에서 접촉이 순간적으로 일어난다고 가정하여 접촉 전과 접촉 후로 나누어 계산한다.

이 해석법은 주로 자유 물체 혹은 구속되지 않은 물체간의 충돌해석에 사용되어져 왔다.<sup>(1~3)</sup> 다물체 시스템의 경우에는 Wehage<sup>(4)</sup>에 의해서 처음으로 선운동량 보존법칙을 이용해 나타내었고, Shabana와 Khulief<sup>(5)</sup>은 이것을 탄성체에 확장시켰다. 이 해석 방법은 아주 효율적이거나 접촉 기간이 짧은 시스템인 경우에만 사용 가능하며 접촉 기간이 시스템의 중요한 인자이거나 저속의 접촉에의 응용에는 한계가 있다.

반면에 연속 해석법은 접촉력이 연속적으로 작용한다고 가정하여 해석하는 방식으로 이 해석 방법은 단순히 접촉력을 시스템의 운동 방정식에 적용시켜 주기만 하면 된다. 가장 간단한 것으로 Kelvin-Voigt model<sup>(6)</sup>이라 불리는 접촉력을 선형 스프링과 댐퍼로 표현한 것이 있고, Khulief와 Shabana<sup>(7)</sup>는 이 모델을 다물체 시스템에 적용시켰으며 Hunt와 Grossley<sup>(8)</sup>는 이 모델에서 선형 스

† 책임저자, 회원, 부산대학교 기계설계공학과 대학원  
E-mail : psjjk@pusan.ac.kr  
TEL : (051)510-1457 FAX : (051)512-9835  
\* 회원, (주)한국타이어  
\*\* 회원, 부산대학교 기계기술연구소  
\*\*\* 회원, 부산대학교 기계공학부

프링과 댐퍼에 의한 접촉력 해석이 적합하지 않음을 지적하고, 접촉력을 Hertz의 탄성이론<sup>(14)</sup>에 의한 거리의 함수로 나타내었다.

하지만 이들 논문에서는 접촉력의 계산에만 주로 관심을 가졌고 접촉하는 물체의 외형에 대해서는 고려를 하지 않았다.

본 논문에서는 공간상에 있는 임의의 형상에 대해서 접촉알고리즘을 제시하고 이를 차량동역학 해석 프로그램인 CADyna<sup>(9)</sup>의 접촉모듈로 추가하였으며 여기서 계산된 결과를 상용 다물체 동역학 해석 프로그램인 DADS<sup>(10)</sup>와 비교하였다.

2장에 접촉해석을 위한 알고리즘을 제시하였고 3장에 간단한 수치예제를 보였으며 4장에서는 결론을 제시하였다.

## 2. 접촉 해석

시스템의 접촉을 해석하기 위해서는 크게 접촉을 판단하는 단계와 접촉력을 구하는 단계로 나뉜다.

### 2.1 접촉판단

공간상에서 두 물체가 접촉을 하기 위해서는 다음과 같은 두 가지의 구속조건이 있다. 먼저 두 강체상의 접촉점의 좌표는 일치해야 하고 각 강체상의 접촉점에서의 접평면에 수직인 벡터들 서로 평행해야 한다는 것이다. 이 구속조건들을 만족하면서 두 물체의 예상되어지는 접촉점을 찾아 접촉 여부를 판단한다.<sup>(11)</sup>

접촉 판단을 위해 접촉하려는 두 물체를 이산적인 데이터, 즉 공간상에서 좌표를 가진 점들로 모델링하였다. 두 물체간의 접촉점을 찾기 위해 두물체의 좌표점들간의 최단거리를 갖는 두 점을 찾고, 찾은 점들을 이용해 최단거리를 구성하는 평면을 구성해 다시 한번 최단거리를 찾는다. 두 점들간의 거리가 영(zero)에 가까울 때 (본 프로그램에서는  $10^{-10}$  이하) 접촉이 일어난다고 판단하였으며, 접촉 판단 과정을 순서적으로 설명하면 다음과 같다.

① 접촉하려는 두 물체의 형상정보(geometric data)를 나타내는 좌표값들을 입력파일로부터

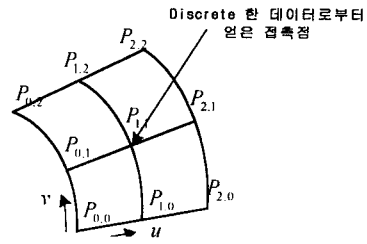


Fig. 1 Contact point

불러들인다.

② 두 물체간의 거리가 가까워질수록 최단거리를 체크하는 점의 개수를 늘이고, 시간간격은 프로그램에서 설정된 변수에 값을 부여하여 조정한다. 주어진 좌표 데이터들간의 거리를 계산하여 최단 거리를 갖는 접촉하려는 두 물체위의 점  $P_i, P_j$ 를 찾아낸다.

③ 접촉 당하는 물체상의 점  $P_j$ 과 접촉하는 물체상의 점  $P_i$ 을 이용하여 Fig.1 과 같은 곡면(surface)를 구성하여 접촉점을 찾아낸다. 공간상에서 곡면을 표현하는 방법은 곡면상의  $x, y, z$  좌표값을 매개변수(parameter)로 표현하는 방법과  $x, y, z$  의 관계를 직접함수로 표시하는 방법이 있다. 본 논문에서는 물체의 모델링을  $x, y, z$  좌표값으로 모델링하였기 때문에 매개변수로 곡면을 표현하였다.

이 곡면을 구성하는 알고리즘은 평면형성 알고리즘인 Bezier<sup>(13)</sup>곡면을 사용하였다. Bezier 곡면은 ②번에서의  $P_i$  점을 Fig.1의  $P_{1,1}$  이라 보고  $P_{1,1}$ 점과 주위의 8개의 점을 Bezier 곡면의 조정점으로 하여 매개변수  $(u, v)$ 에 따라 곡면을 형성한다. 이 Bezier 곡면을 통하여 곡면상의 임의의 점에 대해서  $P_j$  점과 최단거리를 갖는 접촉점을 찾아낼 수 있다. 식 (1)은 Bezier 곡면에서 매개변수  $(u, v)$ 에 따른 곡면위의 한점에 대한 추출식이다.

$$\begin{aligned}
 P(u_0, v_0) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m P_{i,j} B_{i,n}(u_0) B_{j,m}(v_0) \\
 &= [ \sum_{j=0}^m P_{0,j} B_{j,m}(v_0) ] B_{0,n}(u_0) \\
 &= [ \sum_{j=0}^m P_{1,j} B_{j,m}(v_0) ] B_{1,n}(u_0) + \dots \quad (1)
 \end{aligned}$$

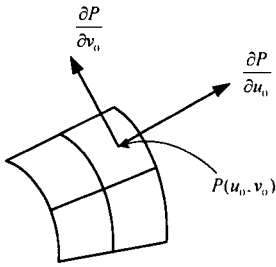


Fig. 2 Tangent vectors in the contact patch

점  $P(u_0, v_0)$  에 대한 접선벡터는 Fig. 2와 같다. 법선벡터는 각 접선벡터의 외적으로 구할 수 있으므로 Bezier 곡면 위의 한 점에서 매개 변수  $(u, v)$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(u, v)}{\partial u} &= \frac{d}{du} \left[ \sum_{i=0}^n P_{i,0} B_{i,n}(u) \right] B_{0,m}(v) \\ &+ \frac{d}{du} \left[ \sum_{i=0}^n P_{i,1} B_{i,n}(u) \right] B_{1,m}(v) + \dots \\ &+ \frac{d}{du} \left[ \sum_{i=0}^n P_{i,m} B_{i,n}(u) \right] B_{m,m}(v) \quad (2) \end{aligned}$$

$\frac{\partial P(u, v)}{\partial v}$  에 대해서도 식 (2)와 같은 방법으로 구할 수 있다. 위에서 구한 두 접선벡터를 외적(cross product)하면 법선벡터를 구할 수 있다.

④ Bezier 곡면상에서 한점을 추출하는 알고리즘은 de Casteljau 알고리즘<sup>(13)</sup>을 사용하였다. Fig. 3은 한점을 추출하는 과정을 형상화시킨 것이다.  $P(u)$ , 즉 파라미터  $u$ 에 해당하는 Bezier 곡선상의 점의 좌표값은 식 (3)과 같은 점화식에 의해 계산되는  $P_0^n$ 의 값과 같다.

$$\begin{aligned} P_i^r &= (1-u) P_i^{r-1} + u P_{i+1}^{r-1} \quad (3) \\ r &= 0, 1, 2, \dots, n \\ I &= 0, \dots, n-r \end{aligned}$$

초기치  $P_i^0$  은 조정점의 좌표  $P_i$  이다. 위의 알고리즘을 이용하면 ③번에서 구한 접촉점의 접선벡터와 법선벡터도 같이 구할 수 있다.

⑤ 최단거리를 갖는 점  $P_i, P_j$ 가 정해졌으면 그 두 점간의 거리를 구한다.

⑥  $P_i, P_j$ 간의 거리가 허용오차( $10^{-10}$ )보다 작으면

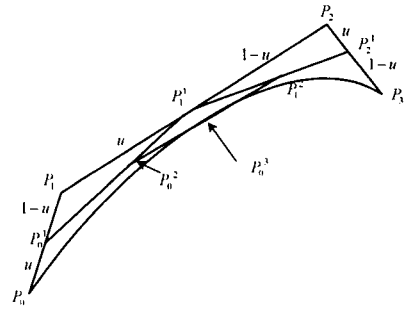


Fig. 3 De Casteljau curve

영(zero)으로 간주하여 접촉이 발생하는 순간이라고 판정한다.

⑦ 접촉이 일어나면 그 순간의  $P_i, P_j$ 를 저장하여  $\overrightarrow{P_i P_j}$ 를 변형 벡터(penetration vector)로 하여 접촉력을 계산한다.

### 2.2 연속 접촉력 계산

일반적으로 접촉은 두 물체간의 압축 상태와 복원 상태(restitution phase)로 구분되어진다. 압축 상태동안 두 물체는 접촉면의 수직방향으로 변형이 생기고, 두 물체의 접촉점의 상대속도는 영(zero)으로 감소된다. 압축 상태가 끝나는 시점은 변형이 최대로 되었을 때이며 이때가 이완 상태의 시작이 된다. 이완 상태는 두 물체가 떨어질 때까지 계속되며,<sup>(12)</sup> 연속 접촉 모델에서 접촉력은 접촉 기간동안 지속적으로 작용한다고 생각한다. 연속 접촉 모델은 Kelvin-Voigt 모델에서부터 시작하여 Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델로 이어져 왔다. 연속 접촉 모델에서는 접촉력을 구하기 위해서 충돌하는 두 물체를 단순히 스프링과 댐퍼를 가진 시스템으로 가정한 뒤 스프링 강성 및 댐핑 계수를 이용하여 접촉력을 구하거나 변형량과 변형 속도에 따라 비선형적인 접촉력을 구한다. 그리고 Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델은 재료의 물성치인 영 계수와 반발 계수를 사용하여 접촉력을 구한다.

Kelvin-Voigt 모델에서 접촉력을 구하는 식은 다음과 같다.

$$F = K\delta + D\dot{\delta} \quad (4)$$

여기서 K와 D는 각각 스프링 강성과 댐핑 계수를 나타내고,  $\delta$ 와  $\dot{\delta}$ 은 각각 변형량과 변형 속

도를 나타낸다. 식 (4)에 의한 접촉력은 댐핑이 있는 경우 변형량이 영이더라도 침투 속도에 의해 0이 아닌 값을 가지게 된다. 따라서 실제 물리현상에 적용시키기에는 불합리하다고 할 수 있다.

반면, Hertz의 탄성이론을 바탕으로 하는 모델에서는 접촉력을 구하는 스프링력과 댐핑력을 거리에 대한 비선형적인 함수로 계산을 하고 있다. Fig. 4는 변형량에 대한 접촉힘을 나타낸 것이고, Fig. 5은 접촉이 일어나는 순간부터 접촉이 끝나는 순간까지 시간에 대한 변형량을 나타낸 것이다. Fig. 4에서 보는 바와 같이 변형량이 영인 지점에서는 접촉력이 영이 되며 거리에 따른 접촉력이 비선형적인 것을 알 수 있다. 이것은 접촉힘이 Kelvin-Voigt 모델과는 달리 접촉력이 거리에 따른 선형적인 함수가 아니라 비선형적인 함수이기 때문이다. 또한 반발 계수에 의한 에너지 감쇠 역시 거리의 함수로 계산되어진다.

Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델에서 접촉력을 구하는 식은 다음과 같다.

$$F = K\delta^n + D\dot{\delta} \quad (5)$$

여기서  $n=3/2$ 이고,  $K$ 는 물성치와 구의 반지름에 관련된 변수이며 다음과 같다.

$$K = \frac{4}{3\pi(h_i + h_j)} \left[ \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right]^2 \quad (6)$$

식 (6)에서  $R_i$ 와  $R_j$ 는 각 물체의 곡률반경을 나타내고,  $h_i$ 와  $h_j$ 는 재료의 물성치를 나타내는데 다음과 같다.

$$h_l = \frac{1 - \nu_l^2}{\pi E_l} : l = i, j \quad (7)$$

식 (7)에서  $\nu_l$ 과  $E_l$ 은 각각 프와송 비와 영 계

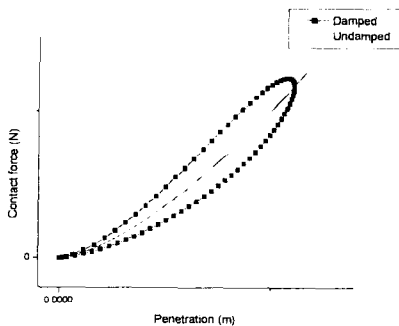


Fig. 4 Contact force vs penetration

수를 나타낸다. 식 (5)의 댐핑계수  $D$ 는 다음과 계산할 수 있다.

$$D = \mu\delta^n \quad (8)$$

여기서  $\mu$ 는 이력 댐핑요소(hysteresis damping factor)이며 다음과 같이 나타낸다.

$$\mu = \frac{3K(1-e^2)}{4\dot{\delta}_0} \quad (9)$$

여기서  $\dot{\delta}_0$ 는 초기 침투 속도를 의미한다. 이상과 같이 식 (6)에서 식 (9)까지를 조합하면 Hertz의 탄성이론을 기반으로 하는 모델의 접촉력은 다음과 같이 나타낸다.

$$F = K\delta^n \left[ 1 + \frac{3(1-e^2)}{4} \frac{\dot{\delta}}{\dot{\delta}_0} \right] \quad (10)$$

### 3. 수치예제

#### 3.1 구와 구 접촉

가장 간단한 예제로서 본 논문에서 제시한 방법이 합당한지 여부를 검사하기 위해서 Fig. 6과 같이 3차원 형상의 구를 형상화시켜서 상용프로그램인 DADS로 모델링하였다. Fig. 7에서 보는 바와 같이 DADS의 결과와 본 연구에서 유도한 결과와는 일치한다. 본 연구에서 사용한 물성치는 Table 1에 제시되어 있다. Table 1에서 Depth는 침투량(Penetration Depth)을 나타낸다.

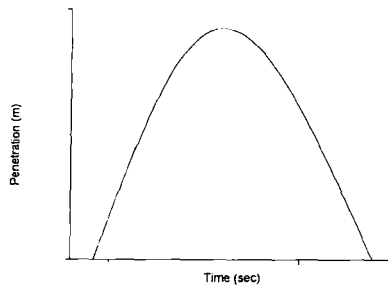


Fig. 5 Penetration vs time

Table 1 Properties of Ball

Stiffness	Damping	Radius	Depth	Discrete points
10000 N/m	10 N · s/m	1.0 m	0.1 m	2020

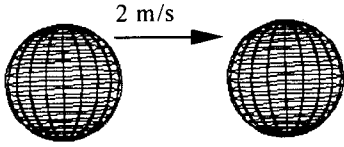


Fig. 6 Contact between two balls

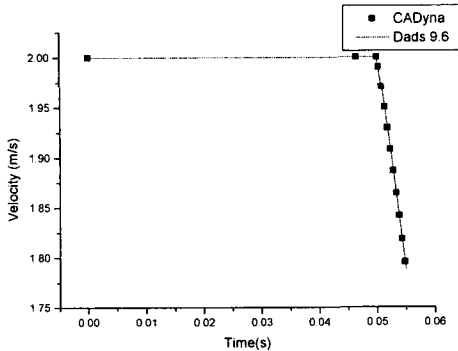


Fig. 7 Velocity of the left ball

Table 2 Properties of pendulum

Stiffness	Damping	Slider Radius	Block Radius	Discrete points
10000 N/m	10 N · s/m	1.0 m	0.1 m	2520

3.2 공간상의 두 개의 진자

Fig. 8은 공간상에서 두 개의 단진자로 구성된 계를 보여준다. 두 개의 단진자는 반경이 0.5m인 구형의 외형을 갖는 진자이고 그림에서 보여지는 것처럼 한 진자는 초기에 고정시켜놓고 다른 한 진자에 초기속도를 주어 두진자의 속도를 비교해 보았다. 계에 작용하는 외력은 중력이고, 중력 가속도는  $9.8066 \text{ m/sec}^2$ 의 크기를 갖는다. 충돌하는 두 물체의 물성치는 Table 2에 나타내었다. Fig. 8의 우측볼에 속도를 주었는데 움직이는 진자의 X축에 대한 속도가 Fig. 9에서처럼 완만한 곡선을 그리며 줄어들다가 충돌 후 일정한 값을 나타냄을 볼 수 있는데 이는 충돌시 적용되는 운동량 보존의 법칙과 일치한다. 또한 DADS의 결과와도 같음을 알 수 있었다. Fig. 10은 움직이는 진자의 X축에 대한 변위를 나타낸다.

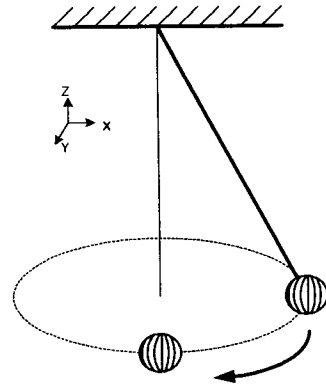


Fig. 8 Pendulum in space

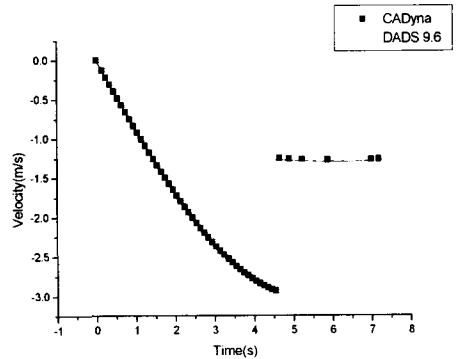


Fig. 9 Velocity of moving pendulum on x-coordinate

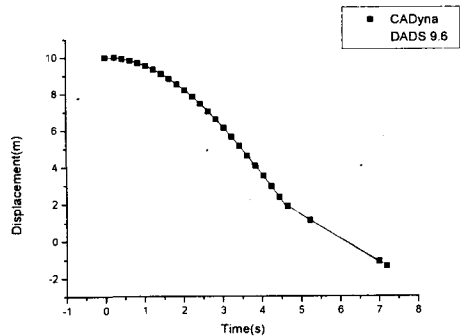


Fig. 10 Displacement of moving pendulum on x-coordinate

3.3 공간상의 자유곡면 형상 예제

Fig. 11은 야구 방망이와 볼을 공간상에서 상용 CAD 프로그램을 이용하여 모델링한 그림이다. 좌측 볼은 앞에서 제시한 예제처럼 구와 방망이를 3080개의 이산화된 점들로 표현하였다.

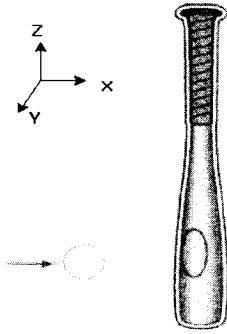


Fig. 11 Bat and ball in space

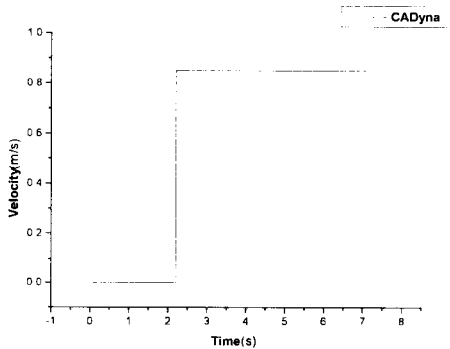


Fig. 12 Velocity of bat

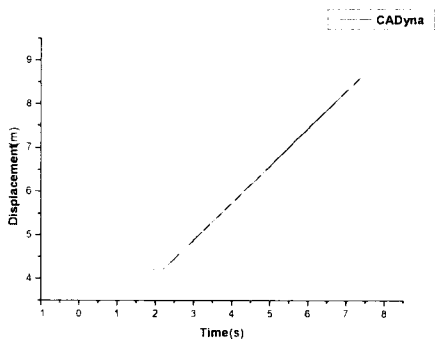


Fig. 13 Displacement of bat

물체가 고정되어 있지 않다고 가정했을 때 다음과 같이 전개된다.

$$v_i^{(+)} = \frac{1}{m_i + m_j} [(m_i - em_j)v_i^{(-)} + (1 + e)m_j v_j^{(-)}] \quad (13)$$

$$v_j^{(+)} = \frac{1}{m_i + m_j} [(m_j - em_i)v_j^{(-)} + (1 + e)m_i v_i^{(-)}] \quad (14)$$

반발계수는 0.7, 볼이 1 m/s 로 좌측에서 우측으로 운동하고 있다. 아래와 같이 식 (13)과 식 (14)를 이용하여 충돌후의 속도를 나타내었다.

$$v_i^{(+)} = \frac{1}{1.0 + 1.0} [(1.0 - 0.7 \times 1.0) \times 1.0 + (1 + 0.7) \times 1.0 \times 0.0] = 0.15$$

$$v_j^{(+)} = \frac{1}{1.0 + 1.0} [(1.0 - 0.7 \times 1.0) \times 0.0 + (1 + 0.7) \times 1.0 \times 1.0] = 0.85$$

Fig. 12과 Fig. 13에서 방향이의 충돌 전과 후의 X축에 대한 속도와 변위를 나타내었다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 공간상에서 임의의 외형을 갖는 두 강체의 접촉 현상을 해석하였다. 본 논문에서는 공간상에서 움직이는 임의의 형상을 좌표틀 가진 점들로 모델링하였다. 두물체의 좌표점들간의 최단거리가 되는 점이 접촉점이므로 이점을 찾기 위한 알고리즘을 제시하였다. 논문에서 제시한 간단한 예제에 대해서 동역학 상용 프로그램인 DADS와 그 결과를 비교·검증하여 신뢰성을 보였다. 본 논문의 연구결과는 향후 일반적인 접촉문제를 해결하는 데에 기초자료로 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

#### 후 기

본 연구는 국가지정연구실(부산대학교 기계공학부 CAE 연구실, M1-0203-00-0017-02J0000-00910)의 지원으로 이루어졌으므로 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Greenwood D.T., Principles of Dynamics,

모멘트 평형에 의한 충돌 전과 충돌 후의 속도 관계식을 전개할 수 있다.

$$m_i v_i^{(-)} + m_j v_j^{(-)} = m_i v_i^{(+)} + m_j v_j^{(+)} \quad (11)$$

$$e = - \frac{v_i^{(+)} - v_j^{(+)}}{v_i^{(-)} - v_j^{(-)}} \quad (12)$$

식 (11)과 식 (12)를 연립하면 충돌하는 두 개의

- Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- (2) Meirovitch, L., *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, 1970.
- (3) Kane, T. R., *Dynamics*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1968.
- (4) Wehage, R. A., "Generalized Coordinate Partitioning in Dynamic Analysis of Mechanical Systems," Ph.D. Dissertation, University of Iowa, 1980.
- (5) Khulief, Y. A., and Shabana, A. A., "Dynamic Analysis of Constrained System of Rigid and Flexible Bodies with Intermittent Motion," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Paper No. 84-DET-116, 1984.
- (6) Goldsmith, W., 1960. "Impact, the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids," Edward Arnold Ltd.
- (7) Khulief, Y. A., and Shabana, A. A., 1987. "A Continuous Force Model for the Impact Analysis of Flexible Multibody System," *Mechanisms and Machine Theory*, Vol. 22, No. 3, pp. 213~224.
- (8) Hunt, K. H. and Grossley, F. R. E., "Coefficient of Restitution Interpretde as Damping in Vibroimpact," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, pp. 440~445, 1975.
- (9) Kim, S. O., Yoo, W. S., Kim, J. B. 2002. "Design and Analysis of Intermediate Shaft of the Steering System Using Vehicle Dynamic Program CADyna," *Transactions of the Korean Automotive Engineers*, Vol. 10, No. 3, pp. 185~191.
- (10) DADS User's Manual, 2000, CADSI, Oakdale, Iowa, U.S.A.
- (11) Park, J. H., Yoo, H. H., Hwang, Y. H. and Yang, H. I., 2000, "Dynamic Analysis of Constrained Multibody Systems Undergoing Collision," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 24, No. 2, pp. 535~542.
- (12) Lim, S. H., Sohn, J. H., Kim, K. S. and Yoo, W. S., 2001, "Development of Contact Module in AutoDyn7 Program," *KSAE*, Vol. 9, No. 6, pp. 152~159.
- (13) Lee, K. W., 2000, *Principles of CAD/CAM/CAE Systems*.
- (14) Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., 1970, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, Third Edition.