

상계 해법을 이용한 순수 굽힘하의 원형 튜브의 단면 변화 해석

구 상 완* · 김 낙 수†
(2002년 6월 28일 접수, 2003년 2월 11일 심사완료)

An Analysis on Brazier Effect of Cylindrical Tubes Under Pure Bending by Upper Bound Method

Sangwan Koo and Naksoo Kim

Key Words: Brazier Effect(브래지어 효과), Tube Bending(튜브 굽힘), Upper Bound Method(상계 해법)

Abstract

This paper presents a new model on deformation characteristics of cylindrical tubes under pure bending. The model is based on the upper bound method that minimizes total strain energy of a system. It does not assume inextensibility condition. Geometric relations and displacement fields are derived by analysis of deformation behaviors of elastic tubes. Simulations are calculated using numerical optimization and integration techniques. The results give information about cross-sectional deformation of cylindrical tubes. Simulation results are compared with available data in literatures, which show that this method predicts deformation characteristics of tube bending process.

기호설명

- | | |
|---|---|
| <p>r : 굽힘전 튜브 반경[mm]</p> <p>r^* : 굽힘후 튜브 반경[mm]</p> <p>t^* : 굽힘전 튜브의 벽두께[mm]</p> <p>t : 굽힘후 튜브의 벽두께[mm]</p> <p>y^* : 굽힘 후 미소요소의 x-y 좌표계에서 y축 방향으로의 거리[mm]</p> <p>R : 굽힘 반경[mm]</p> <p>ρ_N : 중립 반경[mm]</p> <p>u : 미소요소의 반경 방향으로의 변위[mm]</p> | <p>v : 미소요소의 접선 방향으로의 변위[mm]</p> <p>γ : 변형전 미소요소와 변형후 미소요소의 사이각[radian]</p> <p>ζ : x-y 좌표계에서 변형후 미소요소의 위치각[radian]</p> <p>α : s*-t* 좌표계에서, 변형후 미소요소의 위치각[radian]</p> <p>$\Delta\theta$: 튜브의 굽힘각[radian]</p> <p>ν : 푸아송 비</p> |
|---|---|

1. 서 론

원형 튜브를 사용한 구조물은 산업체 전반에 광범위한 활용도를 지니고 있다. 특히 발전소, 해변가 구조물, 하수도 시설 등에 쓰이는 튜브는 지진, 폭발 등의 불시의 재난에 의해 허용 한계를 넘어선 과도한 하중이 작용될 수 있으며, 이것은 또 다른 재난이 원인이 되기도 한다. 따라

* 서강대학교 대학원 기계공학과
† 책임저자, 회원, 서강대학교 기계공학과
E-mail : nskim@ccs.sogang.ac.kr
TEL : (02)705-8635 FAX : (02)707-0558

서 많은 연구자들이 원형 튜브의 안정적 사용 범위를 확보하기 위해 외력에 의해 튜브가 변형되는 과정 및 불안정성을 이론적으로 규명하고자 하는 연구를 진행하여 왔다.

Brazier 효과⁽¹⁾는 굽힘 공정에 의해 튜브가 납작해지는 현상을 말하며, 1926년 Brazier⁽²⁾에 의해 해석된 이래 지금까지 그렇게 불려오고 있다. Brazier는 튜브의 비선형적인 탄성 굽힘에 대한 간단한 스프링 모델을 제안하여 실험결과와 비교적 잘 일치함을 보였다. 그리고, 튜브 굽힘시 탄성 불안정성에 의해 소성영역 이전에 붕괴되는 극한 굽힘 모멘트(ultimate bending moment)가 존재할 수 있음을 제시하였다. 뒤이어 Reissner⁽³⁾는 변분이론에 근거해 보다 내압이 있는 튜브에 대해 일반화된 해석을 시도하였으며, 이것은 Brazier의 모델과 비슷한 해석결과를 나타내었다.

수치적인 기법을 이용한 해석은 Reissner와 Weinitschke,⁽⁴⁾ Fabian⁽⁵⁾에 의해 시도되었다. Zhang⁽⁶⁾ 등은 Fabian과 유사한 수식화를 통해 탄소성 굽힘 변형에 대해 수치해석을 하였다. Tatting⁽⁷⁾은 유한한 길이를 가진 실린더에 대해 고전적인 셸(shell) 이론을 적용한 해석 결과를 제시하였다. 최근에는 Karamanos⁽⁸⁾가 탄성 영역에 대해 유한 요소 기법을 적용하여 원형 튜브의 불안정성에 대해 해석하였다.

그러나 기존의 모델들은 대부분 Brazier가 사용한 비신장 조건(inextensibility condition)을 그대로 적용했다는 단점을 지니고 있다. 이는 Fig. 1에 나타낸 중심면(mid-surface)이 접선방향(ϕ)으로 신장 변형을 하지 않는다는 것으로, 사용되는 변수를 줄여주는 효과가 있지만, 변형이 거질수록 오차가 커지는 단점이 있다.

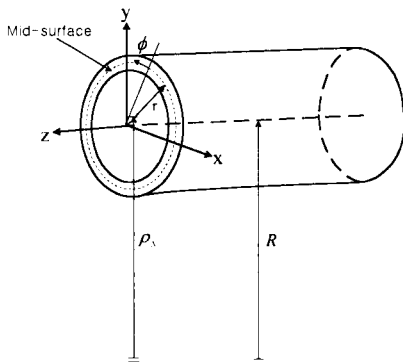


Fig. 1 Initial shape of a cylindrical tube

본 연구에서는 에너지 최소화 기법 중 하나인 상계해법(upper bound method)에 근거하고, 비신장 조건에 의한 간단화(simplification)를 사용하지 않은 튜브의 탄성 굽힘에 대한 해석 모델을 제안하였다. 이를 통해 단면 형상의 변화와 굽힘 모멘트를 예측하였으며, 이것을 여러 문헌에 제시된 결과와 비교하였다.

2. 상계해법 모델링

2.1 기본 가정

튜브 굽힘에 의한 변형 해석을 위해 행해진 기본 가정은 다음과 같다. (i)소재는 등방성, 선형탄성 재료이다. (ii)단면은 변형 중에 평면을 유지한다. (iii)튜브는 순수 굽힘에 의해 변형한다. (iv)튜브의 벽 두께는 변형 영역 전체에 대해 균일하다. 이와 같은 가정을 따라 변형하는 튜브의 요소와 사용된 기호를 Fig. 2와 Fig. 3에 나타내었다.

2.2 기하학적 적합성

튜브의 임의의 단면에 대해 미소요소 AB는 변형후 A*B*로 이동하므로, 기하학적 특성을 고려하면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다[Fig. 2]. 식에서 부호 '은 $d/d\phi$ 와 같은 의미이다.

$$\gamma = \frac{v}{r+u} \tag{1}$$

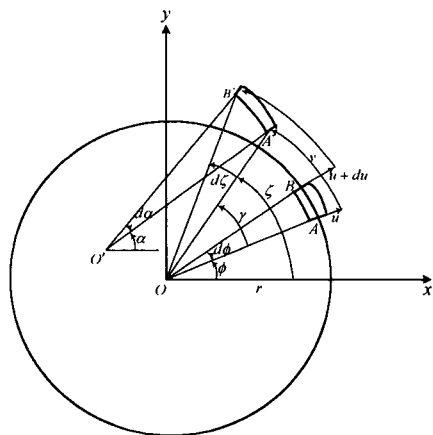


Fig. 2 Movement of an infinitesimal element in a section of a cylindrical tube

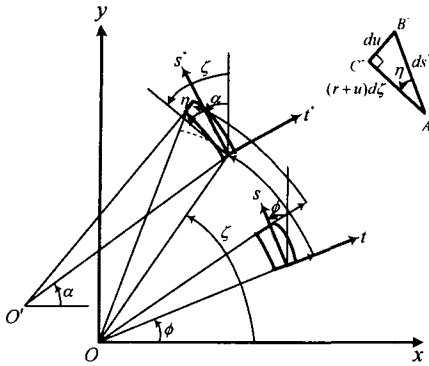


Fig. 3 Relationship between $s-t$ and s^*-t^* coordinates

$$\zeta = \phi + \gamma \quad (2a)$$

$$\zeta' = 1 + \gamma' = 1 + \frac{v'}{r+u} - \frac{vu'}{(r+u)^2} \quad (2b)$$

$$\zeta'' = \frac{v''}{r+u} - \frac{2v'u'}{(r+u)^2} - \frac{vu''}{(r+u)^2} + \frac{2vu'^2}{(r+u)^3} \quad (2c)$$

따라서, 초기상태의 미소요소에 위치한 $s-t$ 좌표계는 Fig. 3에 나타난 것처럼 s^*-t^* 좌표계로 이동하게 되며, 두 좌표계 사이에는 회전의 정도를 나타내는 미지수인 η 가 개입된다.

$$\alpha = \zeta - \eta \quad (3)$$

η 는 Fig. 3에 제시된 삼각형 $A^*B^*C^*$ 에 의해 결정되며, 다음과 같이 계산된다.

$$\tan \eta = \frac{du}{(r+u)d\zeta} = \frac{u'}{(r+u)\zeta'} \quad (4)$$

식 (4)를 ϕ 에 관해 미분하면 다음과 같은 결과식을 얻을 수 있다.

$$\eta' = \frac{(r+u)(u''\zeta' - u'\zeta'') - u'^2\zeta''}{s^{*2}} \quad (5)$$

s^* 은 변형후 미소요소의 s 방향 길이를 ϕ 에 관해 미분한 것으로, 자세한 유도과정은 2.4절에 제시하였다.

2.3 응력-변형률 관계

튜브에 의해 가해지는 외력은 굽힘 모멘트가 유일하므로, 두께 방향으로 응력이 작용하지 않는 평면응력(plane stress) 상태로 가정할 수 있다.

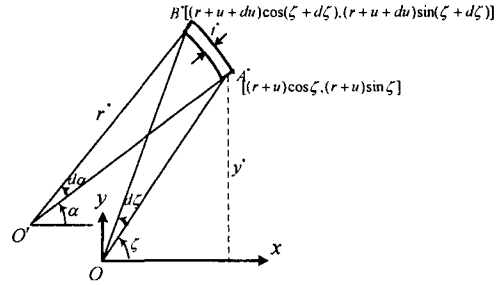


Fig. 4 The infinitesimal element and its coordinates after deformation

$$\sigma_r = 0 \quad (6a)$$

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_s + \nu\epsilon_t) \quad (6b)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_z + \nu\epsilon_s) \quad (6c)$$

2.4 변위-변형률 관계

미소 증분 ds^* 는 Fig. 4의 선분 A^*B^* 의 길이로 근사화될 수 있으므로, 점 A^* 와 B^* 의 사이의 거리로 구한다.

$$ds^* = r^*d\alpha = \sqrt{\{(r+u+du)\cos(\zeta+d\zeta) - (r+u)\cos\zeta\}^2 + \{(r+u+du)\sin(\zeta+d\zeta) - (r+u)\sin\zeta\}^2} \quad (7)$$

위 식에서 미소각 $d\zeta$ 에 대해 $\cos d\zeta \cong 1$, $\sin d\zeta \cong d\zeta$ 의 관계가 근사적으로 성립하므로, 다음의 형태로 나타내어질 수 있다.

$$ds^* \cong \sqrt{du^2 + (r+u)^2 d\zeta^2} \quad (8)$$

공학적 변형률의 정의에 따라 유도된 변형률 ϵ_s 와 ϵ_t 는 다음과 같다.

$$\epsilon_s = \frac{(r^*+t^*)d\alpha - (r+t)d\phi}{(r+t)d\phi} = \frac{ds^* + t^*d\alpha - (r+t)d\phi}{(r+t)d\phi} \quad (9)$$

$$\epsilon_t = \frac{t^* - t}{t} = \frac{t^*}{t} - 1 \quad (10)$$

변형후 튜브의 두께를 나타내는 t^* 는 미지수이므로 식 (10)을 식 (9)에 대입하여 2.3절에 제시한

응력-변형을 관계로 유도된 식 (11)를 사용하면 식 (12)로 변경할 수 있다.

$$\varepsilon_i = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \quad (11)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\frac{s^*}{t} + \alpha' - \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_\theta \alpha' - \frac{r}{t} - 1}{\frac{\nu}{1-\nu} \alpha' + \frac{r}{t} + 1} \quad (12)$$

굽힘 모멘트에 의한 z방향 변형률은 식 (13)에 나타내었다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{(y^* + R)d\theta - \rho_N d\theta}{\rho_N d\theta} \\ &= \frac{\{(r+u)\sin\zeta + R\}d\theta - \rho_N d\theta}{\rho_N d\theta} \end{aligned} \quad (13)$$

2.5 가용 변위장의 결정

상계 해법에서는 주어진 경계조건 중 필수 강제조건인 변위 경계조건을 반드시 만족하는 가용 변위장(admissible displacement field)을 가정해야 한다.⁽⁹⁾ 본 문제의 경우, 단면의 변형이 대칭되는 축에서 접선 방향 변위(v)가 0이라고 가정되었다 [Fig. 5].

(i) $\phi = 0$ 일 때, $v = 0$

(ii) $\phi = \frac{\pi}{2}$ 일 때, $v = 0$

이와 같은 경계조건을 만족하는 가용 변위장으로 다항식 또는 삼각함수가 사용되어질 수 있다. 튜브의 변형 해석시는 삼각 함수가 많이 사용된다.^(4,6,10) 본 연구에서는 N의 값을 통해 삼각함수의 갯수를 결정하여 자유도를 pd. 조절할 수 있도록 가용 변위장을 가정하였다.

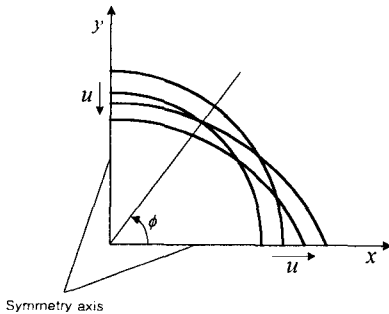


Fig. 5 Deformation of a cross-section

$$u = \sum_{i=1}^N r a_i \cos(2i\phi) \quad (14a)$$

$$v = \sum_{j=1}^N r b_j \sin(2j\phi) \quad (14b)$$

2.6 소비 에너지

소비 에너지는 순수 굽힘에 의한 변형 에너지 뿐이므로, 소비에너지 ΔU 는 식 (15)와 같게 된다 [Fig. 6].

$$\Delta U = \int_0^{2\pi} \int_{0.5h}^{0.5h} \sigma_r \varepsilon_r dt^* (r^* \alpha) [(R+y^*) \Delta\theta] \quad (15)$$

여기서 $\Delta\theta$ 는 상계해에 영향을 주지 않으므로, 최소화될 목적함수 Φ 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\Phi = \frac{\Delta U}{\Delta\theta} = \int_0^{2\pi} \int_{0.5h}^{0.5h} \sigma_r \varepsilon_r dt^* (r^* \alpha) [(R+y^*)] \quad (16)$$

3. 수치 해석

목적 함수가 최소화되는 지점에서는 변수들에 대한 1차 편미분치가 0 이므로, 다음과 같은 식들이 성립한다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_j} = 0 \quad (18)$$

주어진 비선형 식을 만족하는 해를 수치적으로

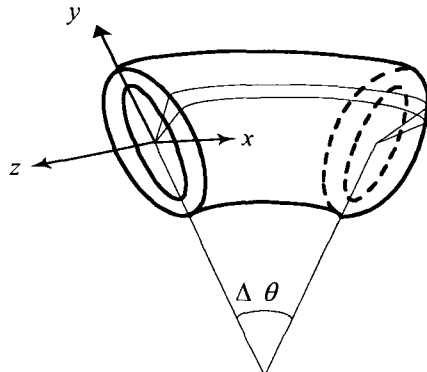


Fig. 6 Deformed shape of a cylindrical tube

구하기 위해서는 반복법에 의한 최적화가 필요하다. 뉴턴 방식은 목적 함수의 2차 미분으로 구성된 헤시안(Hessian) 행렬⁽¹¹⁾을 이용하여 탐색방향을 결정한다. 헤시안 행렬은 직접 미분해서 구하기 힘들므로, 일반적으로 근사 헤시안 행렬을 구성하는 준뉴턴(Quasi-Newton) 방법⁽¹¹⁾을 많이 사용한다. 본 연구에서 사용된 알고리즘은 준뉴턴 방법 중에 하나인 DFP 방식⁽¹¹⁾으로 2차 정확도를 유지하면서도, 계산빈도가 적어 효율적인 방향탐색 알고리즘 중에 하나이다.

준뉴턴 방식은 근사 헤시안 행렬을 사용하므로, 업데이트되는 방향이 수렴적임을 보장하지 못한다. 따라서 선탐색 알고리즘과 함께 사용하여 계산된 방향으로 얼마만큼 이동할 것인지를 결정하게 된다. 본 연구에서 사용된 알고리즘은 황금분할 탐색법(golden-section search method)⁽¹¹⁾으로, 이동 크기를 황금분할을 이용해 반복 횟수를 현저히 줄인 것이 특징이다.

제시된 최적화 기법에 목적함수 ϕ 를 적용시키기 위해서는 t^* 와 s^* 방향으로 이중 적분을 수행해야 한다. 이를 해석적으로 구하는 데는 어려움이 있으므로, Romberg 적분법⁽¹²⁾을 사용하여 수치 적분하였다.

Fig. 7에는 수치적으로 튜브굽힘 문제를 해석하기 위해 구현된 알고리즘을 순서도로 나타내었다. 중립반경을 입력 값으로 받아 주어진 응력과 변형률 상태에 대해 변형 에너지를 최소화하는

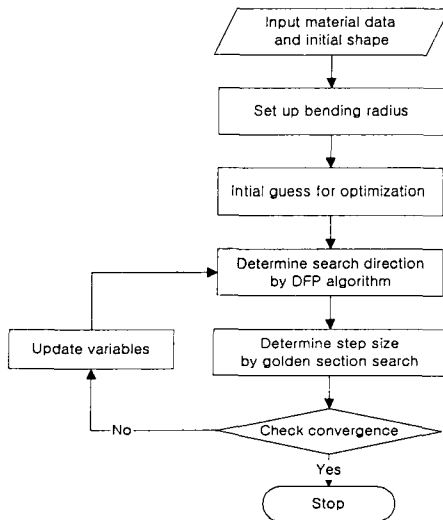


Fig. 7 Flow chart for tube bending problem

단면 형상을 결정하게 된다. 본 연구에서 사용된 수렴판정 기준은 $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 이고, 반복법을 위한 초기 가정치로는 0을 사용하였다.

가용 변위장의 미정계수는 N=1일 경우와 N=3일 경우에 대해 테스트되었다. 두 결과 사이에 차이가 거의 없는 것으로 보아, N=1일 때의 항들이 단면의 변형을 전체적으로 좌우하는 것으로 판단되어 더 이상의 테스트는 수행하지 않았다. 이후의 결과는 N=3일 때를 기준으로 한 것이다.

Fig. 8에는 본 연구에 사용된 DFP 알고리즘의 경사도 벡터의 놈(norm)의 추이를 도표에 나타내었다. 일반적으로 수치 최적화 과정 중에 수렴판정 기준으로는 경사도 벡터의 놈을 사용한다. 대체로 경사도 벡터의 놈은 진동하면서 0으로 수렴하는 경향을 보이며, 그러한 특성이 Fig. 8에도 나타남을 확인할 수 있다.

4. 결과의 검증

제시된 모델의 유효성을 검증하기 위해 Table 1의 경우에 대해 모사한 후, Zhang⁽⁶⁾과 Brazier⁽²⁾ 모델의 해석결과와 비교하였다. Zhang⁽⁶⁾의 모델은 Brazier,⁽²⁾ Reissner⁽³⁾의 모델 등과 마찬가지로 비신장 조건을 가정한 것으로, 비신장 조건이 단면 변형에 미치는 영향을 확인할 수 있다. 해석을 위해 사용한 설정은 Table 1과 같다.

Table 1 Configuration for Simulation

Young's modulus [N/mm ²]	2.08×10^5
Poisson's ratio	0.3
Wall thickness of tube [mm]	9.5
Average diameter of tube [mm]	33.3

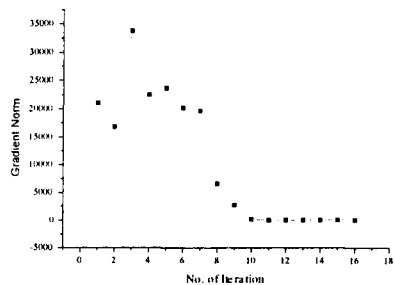


Fig. 8 History of norm of the gradient vector for DFP optimization

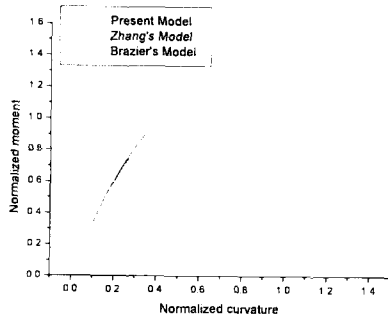


Fig. 9 Normalized moment-curvature relationship

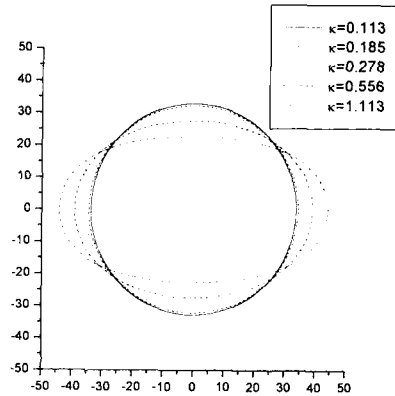
제안된 모델의 굽힘 모멘트 및 단면 형상의 변화를 알아보기 위해 굽힘 반경을 점진적으로 작아지게 하면서 해석을 진행하였다. 굽힘반경은 역수인 곡률(curvature)로 나타내었으며, 굽힘 모멘트와 같이 무차원화하여 해석결과를 제시하였다.

$$M_n = \frac{Ert^2}{\sqrt{1-\nu^2}}, \quad k_n = \frac{t}{r^2\sqrt{1-\nu^2}} \quad (19)$$

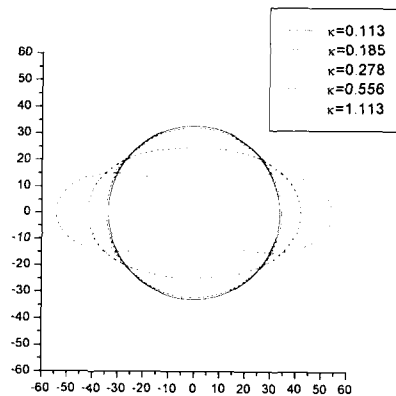
$$m = M/M_n, \quad \kappa = k/k_n \quad (20)$$

여기서, m 과 κ 는 각각 무차원화된 굽힘 모멘트와 곡률(curvature)을 뜻하며, Fig. 9에 이들 간의 관계를 나타내었다. Zhang과 Brazier의 모델은 κ 가 대략 0.5~0.6일 때 극한 굽힘 모멘트를 가지는 것으로 나타났다. 그러나, 본 연구에서 제안된 모델은 그러한 타원화 불안정성(ovalization instability)⁷⁾ 현상을 나타내지 않았다.

굽힘 반경을 감소시키면서 각 수치모델의 단면의 변화를 Fig. 10에 나타내었다. 두 모델은 단면의 모양이 완전한 원에서 납작해진 타원으로 변형할 것으로 예측하였다. 그러나, 변형이 진행되면서 Zhang의 모델은 완전한 타원에서 일부 영역이 움푹 들어간 모습으로 변화하였다. 이는 본 모델이 균일한 타원을 이룰 것으로 예측한 것과 차이를 보이고 있다. 그리고 비신장 조건을 가정한 다른 해석 결과^(5,7)도 이와 같은 비슷한 변형 상태를 나타내고 있다. 따라서 Zhang 모델의 불균일한 변형상태는 비신장 조건에 기인한 것으로 판단된다.



(a) Present Model



(b) Zhang's Model

Fig. 10 Comparison between Brazier effect of two models

Fig. 11에는 튜브 단면이 찌그러지는 정도를 측정하기 위해 식 (21)에 제시한 타원성 지수(ellipticity index)를 정의하여, 굽힘반경이 작아짐에 따라 변하는 과정을 나타내었다.

$$Ellipticity\ Index = \frac{r_{max}}{r_{min}} \quad (21)$$

제안된 모델은 타원성 지수가 선형적으로 증가하는 것으로 나타났으며, 이와 달리 Zhang¹⁾의 모델은 비선형적으로 증가하였다. 두 직선이 분기하기 시작하는 지점은 곡률이 0.2에서 0.3 사이인 곳이며, 이것은 Fig. 10에서 각 모델의 굽힘 모멘트가 벌어지기 시작하는 위치와 거의 일치한다. 따라서 비신장 조건을 가정한 모델에서 나타나는

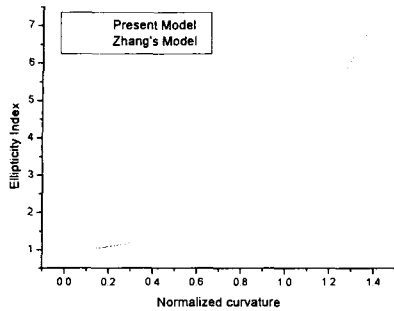


Fig. 11 Comparison of ellipticity index

단면의 불균일한 변형이 굽힘 모멘트의 변화에 영향을 주고 있는 것으로 볼 수 있다. 그리고 비신장 조건을 사용치 않은 본 모델은 굽힘 모멘트의 불안정성을 예측하지 않은 것으로 보아, 이와 같은 타원화 불안정성은 비신장 조건을 가정한 모델에서만 예측되는 현상이라고 결론지을 수 있다.

5. 결론

상계해법을 이용하여 튜브의 굽힘 공정을 해석할 수 있는 새로운 수치 모델을 제안하였다. 이는 불합리하게 가정된 비신장 조건을 사용하지 않은 것으로, 단면의 변형을 보다 정확하게 예측할 수 있을 것으로 판단된다. 수치 시뮬레이션은 DFP 알고리즘과 황금분할 탐색법을 이용해 수행하였으며, 이를 Brazier와 Zhang의 모델과 비교하였다. 이로써 도출된 결론은 다음과 같다.

(1) 제안된 모델과 Zhang의 모델은 변형이 과도해질수록 Zhang의 모델은 변형이 단면에 굴곡이 생길 것을 예측하였고, 제안된 모델은 완만하게 변형할 것으로 예측하였다.

(2) 찌그러지는 정도를 나타내는 타원성 지수는 Zhang의 모델이 비선형적으로 증가한 반면, 본 모델은 선형적으로 증가하였다.

(3) 본 모델과 Zhang의 모델의 타원성 지수가 차이가 나기 시작하는 위치는 굽힘 모멘트가 차이가 나기 시작하는 위치와 거의 일치한다.

(4) 비신장 조건을 가정한 모델에서 예측된 타원화 불안정성은 비신장 조건을 가정하지 않은 본 모델에서는 예측되지 않았다. 따라서 타원화 불안정성은 비신장 조건을 가정한 모델에서만 나

타나는 현상으로 판단된다.

후기

본 논문 연구는 서강대학교 산업기술연구소의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Calladine, C.R., 1983, *Theory of Shell Structures*, Cambridge University Press, New York.
- (2) Brazier, L.G., 1926, "On the Flexure of Thin Cylindrical Shells and Other Sections," *Proc. Royal Soc. Series A. CXVI*, pp. 104~114.
- (3) Reissner, E., 1959, "On Finite Pure Bending of Pressurized Tubes," *J. Appl. Mech.*, pp. 386~392.
- (4) Reissner, E. and Weinitzschke, H.J., 1963, "Finite Pure Bending of Circular Cylindrical Tubes," *Quarterly J. of Appl. Math. XX(4)*, pp. 305~319.
- (5) Fabian, O., 1977, "Collapse of Cylindrical, Elastic Tubes under Combined Bending, Pressure and Axial Loads," *Int. J. Solids Structures*, pp. 1257~1269.
- (6) Zhang, L.C. and Yu, T.X., 1987, "An Investigation of the Brazier Effect of a Cylindrical Tube under Pure-Plastic Bending," *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, pp. 77~86.
- (7) Tatting, B.F. and Gurdal, Z., 1997, "The Brazier Effect for Finite Length Composite Cylinders under Bending," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 34, pp. 1419~1440.
- (8) Karamanos, S.A., 2002, "Bending Instabilities of Elastic Tubes," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39, pp. 2059~2085.
- (9) Avitzur, B., 1968, *Metal Forming : Process and Analysis*, McGraw-Hill
- (10) Zhang, W.G. and Li, D.X., 1999, "On Nonlinear Bending and Instability of Imperfect Cylindrical Tubes," *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, Vol. 76, pp. 43~47.
- (11) Arora, J.S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill.
- (12) Chapra, S.C. and Canale, R.P., 1988, *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill.