

벌칙방법에 의한 마찰 접촉문제의 강소성 유한요소 모델링

장동환* · 황병복**

(2002년 10월 21일 접수)

Rigid-Plastic FE Modeling of Frictional Contact Problems based on a Penalty Method

D. H. Jang and B. B. Hwang

Abstract

This paper presents a rigid-plastic finite element method to handle the frictional contact problem between two deformable bodies experiencing large deformation. The variational formulation combined with incremental quasi-static model is employed for treating the contact boundary condition. The frictional behavior of the model obeys Coulomb's law of friction. The proposed contact algorithms are classified into two categories, one for searching contacting nodes and the other for calculating contact forces at the contact surface. A slave node and master contact segment are defined using the geometric condition of finite elements on the contact interface. The penalty parameter is used to limit the penetration between contacting bodies, and the finite elements are coupled with contact boundary elements.

Key Words : Contact Problem, Finite Element Method, Penalty Method, Contact Searching

1. 서론

유한요소법을 이용하여 기계부품의 공정해석이나 구조물 해석시 나타나는 큰 문제중의 하나는 접촉문제이다.^(1~2) 접촉문제를 수학적 관점에서 보면 동역학적으로 불안정한 경계치 문제로 볼 수 있다. 그러나, 접촉문제에서의 불안정성은 영구적으로 작용하는 것이 아니고 변형에 의존한다.⁽³⁾ 따라서, 접촉현상은 물체의 변형에 직접적인 영향을 주고 마찰이 수반되어 상당히 복잡한 현상으로 알려져 왔다. 이러한 접촉문제의 중요성과 복잡성으로 인해 1967년 처음으로 마찰을 고려하지 않은 접촉

문제에 관한 수치적 접근이 시도된 이후로 지금까지 많은 연구가 진행되어 왔다.⁽¹⁾ Hertz가 19세기 접촉면에서의 응력분포를 해석하면서 접촉문제에 대한 이론을 정립한 이후 최근 들어 유한요소법에 의한 수치적 접근방법이 대두되기 시작하였다.⁽⁴⁾ Francavilla, Zienkiewicz⁽⁵⁾, Hughes⁽⁶⁾ 등은 최초로 유한요소법을 이용하여 기계요소들 사이에 상호작용 하는 접촉관계를 효율적으로 적용하였다. 그후로 수치적인 해석을 위한 여러 가지 방법들이 제안되면서 Wriggers, Simo⁽⁷⁾ 등은 연속체측면에서 비선형 거동을 고려한 3차원 접촉문제를 해석하였으며, Zhong^(8~10) 등은 접촉탐색방법에 대한 연구를 토대로 여

* 인하대학교 자동차공학과 박사과정

** 인하대학교 기계공학부 부교수

러 가지 접촉문제에 관한 사례들을 소개하였다. 그러나 현재까지는 탄성영역에서의 접촉연구나, 탄소성 유한요소법을 적용한 접촉문제의 해석등⁽¹¹⁻¹⁴⁾에 국한되어있으며, Chenot⁽¹⁵⁾등이 라그랑지언 방법을 통한 속도함수를 이용하여 점소성 문제에 적용시킨 사례가 있다. 강소성 문제에서는 Dalin⁽¹⁶⁾, Shimizu, Sano⁽¹⁷⁻¹⁸⁾등이 별치함수를 최소화함으로써 강체인 급형과 변형체 사이의 접촉문제를 유한요소법을 적용하여 해석하였다.

본 논문에서는 접촉경계면의 마찰을 고려한 두 개의 강소성 최대칭 변형체에 대해 증분형 준정적 문제 (incremental quasi-static problem)를 기반으로 별치방법을 이용하여 변분식에 접촉경계조건을 도입하고 모델링 하였다. 제안된 알고리즘과 경계영역기반의 접촉탐색을 이용하여 해석적 기준을 가지고 모의실험을 수행하였으며 수치적 해석결과를 검토하였다.

2. 접촉이론

2.1 접촉경계

변형체 Ω 에 대한 경계치 문제에서 표면력 t_i 는 외력 경계조건 Γ_f 에, 속도 v_i 가 속도경계조건 Γ_u 면에 작용한다. $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_f$ 라고 가정할 때 운동학적으로 가능한 속도장을 찾기 위하여 가속도나 체적력을 고려하지 않은 평형방정식에 대한 약형은 발산정리(divergence theorem)에 의해 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_f} t_i \delta v_i d\Gamma_f = 0 \quad (1)$$

여기서, δ 는 변분이며 σ_{ij} 는 Cauchy 응력텐서이고 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 는 변형률 속도텐서(strain rate tensor)이다.

식 (1)에서 가상속도장 δv 에 대해서 마찰경계조건을 제외하고 별치상수로 비압축성 조건과 소성유동식을 고려하여 이산화 할 수 있는 변분식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_{\Omega} \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v d\Omega - \int_{\Gamma_f} t_i \delta v_i d\Gamma_f \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, $\bar{\sigma}$ 와 $\bar{\epsilon}$ 는 각각 유효응력과 유효변형률속도이며, $\dot{\epsilon}_v$ 는 부피변형률속도이다. α 는 변형체의 체적을 일정하게 하기 위한 별치상수이다.

Fig. 1은 접촉문제에서 변형체의 경계조건들을 도식화한 것이다. 그림에서 보듯이 Hallquist⁽¹⁹⁾가 제시한 기준에 따라 우선 두 개의 변형체를 각각 종속 변형체(slave body)와 주 변형체(master body)로 구분하였다. 이러한 기준은 변형되는 형상에 따라 임의의 절점이 상대 경계면에 침투될 때 이러한 절점을 포함하는 물체를 종속변형체로 가정하였으며, 본 논문에서는 상점자를 사용하여 구분하였다. 이때 변형되는 형상에 따라 주변형체와 종속변형체의 관계는 서로 전환될 수 있다. 그림에 나타난 것처럼 두 개의 변형체가 시간증분에 따라 변형되는 형상에 의해서 각 변형체의 공통된 경계영역으로 구성된 새로운 접촉 경계조건 Γ_c 를 생성한다. 이때 경계에 대한 명확한 정의는 접촉문제의 해를 구하는데 있어서 매우 중요한 부분이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma_c = \Gamma_c^{(s)} \cap \Gamma_c^{(m)} \quad (3)$$

이러한 접촉경계를 식 (2)의 강소성 변형체에 대한 변분식에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta \Pi^{(s)} + \delta \Pi^{(m)} \\ &= \int_{\Omega} \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_f} t_i \delta v_i d\Gamma_f - \int_{\Gamma_c} f_N \delta v_i d\Gamma_c = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, f_N 은 각 변형체의 접촉경계면에서 법선 접촉력을 나타낸다.

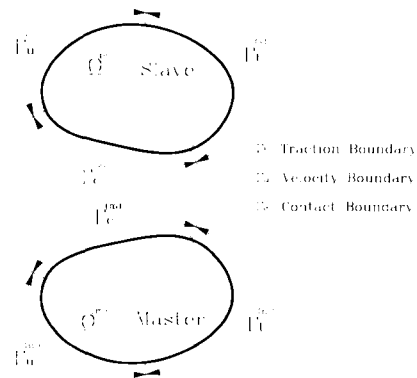


Fig. 1 Boundary conditions for incremental quasi-static contact problem

2.2 접촉조건

변형체에 대한 접촉문제에서 각각의 경계영역은 반드시 겹쳐지는 영역이 발생하지 않기 위한 불침투 조건이 필요하다. 그러나 이러한 구속조건은 대변형 문제에서 상대적인 변형에 대한 기준을 정하기가 어렵고, 비선형적 거동을 하기 때문에 변위에 관한 일반적인 대수식이나 미분식을 사용하여 표현하기가 어렵다.⁽²⁰⁾

접촉경계면상에서 주접촉면과 종속접촉면의 법선 벡터는 접촉경계면상에서 방향이 서로 반대이므로 주접촉면을 기준으로 상대속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_N &= \mathbf{v}^{(m)} \cdot \mathbf{n}^{(m)} + \mathbf{v}^{(s)} \cdot \mathbf{n}^{(s)} \\ &= (\mathbf{v}^{(m)} - \mathbf{v}^{(s)}) \cdot \mathbf{n}^{(m)} \\ &= v_N^{(m)} - v_N^{(s)} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, \mathbf{n} 은 법선벡터이며, $\mathbf{v}^{(s)}$ 와 $\mathbf{v}^{(m)}$ 은 각각 접촉경계면상의 속도벡터로서 주접촉면을 기준으로 양의 방향을 설정하였다. 이때 이러한 상대속도는 접촉후 각 변형체의 법선방향의 속도가 동일하므로 영이 된다.

접촉경계면상에서의 법선 접촉력은 작용·반작용의 원리에 따라 상대경계면에 대해 힘 평형조건을 만족해야 한다. 또한 변형체에 대한 접촉문제에서는 접촉경계면이 접촉상태가 아니기 때문에 인장력이 작용할 수 없고 압축력만이 작용할 수 있다. 따라서, 접촉경계면에서 다음과 같은 Kuhn-Tucker 조건⁽²¹⁾을 만족하여야 한다.

$$\gamma_N \geq 0 \quad (6a)$$

$$f_N \leq 0 \quad (6b)$$

$$\gamma_N \cdot f_N = 0 \quad (6c)$$

여기서, 식 (6c)는 접촉문제에서의 두 변형체는 시간 증분에 따른 변형상태에 따라 법선 접촉력과 상대속도중 하나는 반드시 영이 되어야 한다는 것을 의미한다.

3. 접촉문제에 대한 모델링

3.1 접촉탐색 및 벌칙방법

본 논문에서 작용된 접촉탐색 알고리즘은 Fig. 2에 나타나있다. 그림에 나타난 숫자는 접촉경계면상에 있는 절점번호를 나타내고 S 와 M 은 전체좌표계상에서 절점 좌표를 의미하며 속도는 V 로 표시하였다. 또한, 두 변

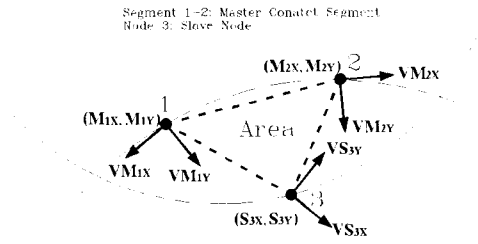


Fig. 2 Nodal velocities, coordinate and node-to-segment pairs based on contact searching

체 하점자의 X 와 Y 는 전체좌표계상에서 각 축의 방향을 나타낸다. 구체적인 접촉탐색 방법은 참고문헌⁽²²⁾에 나타나 있으며, 주 접촉세그먼트에 대한 종속절점(slave node to master contact segment)의 개념을 바탕으로 경계영역을 이용하여 탐색을 수행하고, 두 개의 주절점과 한 개의 종속절점이 형성하는 삼각형의 면적을 계산하여 접촉여부를 판단하였다.

Fig. 3은 접촉경계면에 위치한 각 변형체의 요소와 절점들을 나타낸 것이다. 그림에서 x_1, x_5, x_6 는 접촉경계면상에서 1번, 5번, 6번 절점들에 대해 최소제곱법을 이용하여 직선맞춤 했을 때의 x 좌표들을 나타낸다. 상부에 위치한 1번 절점이 5번과 6번 절점으로 이루어진 세그먼트에 접촉되었다고 가정했을 때 접촉경계면상에 위치한 종속절점에 대한 주 접촉 세그먼트를 커플링 하였다. 이러한 방법으로 해당되는 각 변형체의 전체 강성행렬과 하중벡터에 벌칙함수를 가산함으로써 두 변형체에 대한 수정된 포텐셜 에너지를 구성하였다. 식 (4)에 벌칙함수가 부가되어 수정된 총 포텐셜에너지는 다음과

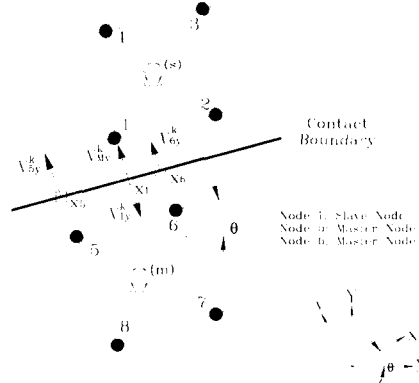


Fig. 3 Nodal velocities and local node numbering of contact elements

$$\Pi^* = \Pi^{(s)} + \Pi^{(m)} + \frac{\beta}{2} \gamma_N^2 \quad (7)$$

같이 표현된다.

여기서, β 는 접촉경계면에서 두 변형체의 법선방향의 상대속도를 동일하게 구속하기 위한 벌치상수이다.

식 (7)에서 Π^* 을 최소화하기 위한 변분식은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta \Pi^* = \delta \Pi^{(s)} + \delta \Pi^{(m)} + \beta \gamma_N \delta \gamma_N \quad (8)$$

식 (8)은 다중 뉴턴 랩슨방법을 이용하여 각 절점들의 속도증분에 대해 선형화된 식으로 구하여 진다. 따라서, 그림에 나타난 각 절점들의 속도는 반복해법에 의한 속도증분을 고려하여 접촉경계면에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_N &= v_{My}^k - v_{1y}^k \\ &= (\Delta v_{My}^k - \Delta v_{1y}^k) + (v_{My}^{k-1} - v_{1y}^{k-1}) \\ &= \Delta v_{My}^k - \Delta v_{1y}^k + v_{Dy} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, 상첨자 k 는 반복횟수를 나타내고, 두 번째 하첨자 y 는 주접촉면을 기준으로 법선성분을 의미한다. v_{1y}^{k-1} 와 v_{My}^{k-1} 는 각각 반복해법에 의해 이전단계에서 이미 유한요소해로부터 얻어진 각 절점의 속도 성분이기 때문에 하나의 속도상수 v_{Dy} 로 나타내었다. 또한 v_{My}^k 는 직선맞춤한 결과에 의해 1번 절점의 법선 방향 속도에 대응되는 주접촉면의 세그먼트에 있는 속도성분으로 5번, 6번 절점의 법선 방향의 속도에 대한 보간법에 의해 계산될 수 있다.

3.2 접촉 경계면에서의 마찰

접촉분체에서의 마찰경계는 경계면상에서의 또 하나의 경계조건으로 결국 접촉 경계면에서는 법선 접촉력과 접선 접촉력으로 나누어진다.

식 (4)에 정의된 변분식에 도입되는 마찰경계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \Pi_{\Gamma_f} = \int_{\Gamma_f} f_T \delta v_i d\Gamma_f \quad (10)$$

여기서, Γ_f 는 마찰경계면을 나타내며, f_T 는 마찰력이다.

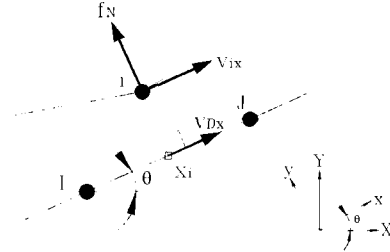


Fig. 4 Frictional boundary condition on the contact surface

본 논문에 적용된 접촉경계면의 마찰력은 Chen, Kobayashi^[23]등이 제안한 다음과 같은 변형된 마찰응력 식을 이용하였다.

$$f_T = -\mu f_N \left(\frac{2}{\pi} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_T}{a} \right) \quad (11)$$

여기서, μ 는 쿨롱마찰계수이며, γ_T 는 두 변형체간의 상대속도이고 a 는 수치적 해석을 위한 임의의 값이다.

Fig. 4는 접촉경계면에서 마찰경계가 포함된 접촉경계면을 나타낸 것이다. 그림에서 i 번 절점이 현재 I 번과 J 번으로 이루어진 세그먼트에 접촉되었을 때, 그림에 나타난 모든 절점은 접촉 세그먼트를 기준으로 접선방향의 마찰경계조건을 갖게 된다. 이때 i 번 절점에서 국부좌표계에서의 접선방향의 속도와 법선 방향의 절점력을 각각 v_{ix} 와 f_N 로 표시하였다. 또한, i 번 절점이 접촉세그먼트에서 대응하는 국부좌표계 좌표 x_i 에서의 접선방향의 속도는 v_{Dx} 로 나타내었다. 따라서, 마찰력을 계산하기 위한 접촉 경계면에서의 상대속도 γ_T 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\gamma_T = v_{ix} - v_{Dx} \quad (12)$$

여기서, v_{Dx} 는 I 와 J 절점의 속도보간에 의하여 구해진다. 이러한 상대속도와 절점력은 앞에서와 마찬가지로 Fig. 4에 나타난 각 θ 에 대한 전체 좌표계에서 회전 변환행렬에 의해 각각 분할된다.

4. 제안된 알고리즘에 의한 유한요소해석

4.1 해석조건

본 논문에서는 접촉문제에 대한 제안된 알고리즘을 기존의 강소성 유한요소법 코드로 되어있는 ALPID^[24]에 적용하고 프로그래밍 하였다. 완성된 알고리즘과 접촉탐색에 대한 수치적 해를 검토하기 위해 두 가지 기준을 가지고 해석하였다.

강소성 유한요소법에 의한 모의실험을 수행하기 위하여 유동응력과 유효변형률의 관계는 멱정리(power law)^[25]에 따라 다음 식과 같다.

$$\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n \text{ (kgf/mm}^2\text{)} \quad (13)$$

여기서 K는 강도계수이며, n은 가공경화지수이고 모의실험에 사용한 각각의 재료들에 대한 K와 n 값이 Table 1에 나타나있다.^[25]

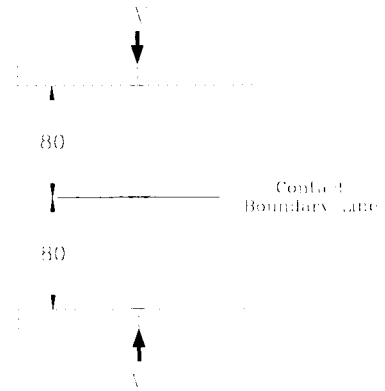
Table 1 Material parameters for simulation

	AISI 1010	AISI 1035
Strength Coefficient(K)	72.98	91.97
Work-hardening Exponent(n)	0.22	0.17
Strain Range	0.1-0.7	

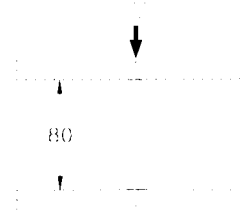
4.2 해석방법 및 결과

4.2.1 단동 및 복동 압축성형의 비교

Fig. 5는 제안된 알고리즘에서 벌칙방법에 의한 구속조건과 접촉탐색의 타당성만을 검토하기 위하여 첫 번째 적용한 형상과 압축성형법에 대한 개념도이다. Fig. 5(a)는 형상과 재료가 같은 두 개의 구에 대해 상·하부펀치가 동일한 속도로 동시에 성형이 이루어지는 복동 압축성형이다. Fig. 5(b)는 복동 압축성형과 동일한 재료와 속도로 고정된 금형 위에서 이동펀치에 의해 성형되는 단동 압축성형이다. 복동 압축성형은 상·하부펀치의 속도가 동일하기 때문에 그림에 표시된 접촉경계면에서 속도벡터의 합은 영이 된다. 따라서 상부 변형체와 하부 변형체는 동일한 변형양상을 가지게 되며, 이에 따라 유효변형률속도, 속도분포등과 같은 수치적인 해석결과가 경계면을 기준으로 대칭적인 형태를 보일 것이다. 또한 유한요소해석에 의한 일차적인 속도해만 고려했을 때 복동 압축성형에 의한 각 변형체의 변형양상은 하부금형의



(a) Double action pressing with two spheres(unit:mm)



(b) Single action pressing with a sphere(unit:mm)

Fig. 5 Schematic configuration for test run (I)

속도벡터가 영인 단동 압축성형의 결과와 같아야 한다. 따라서, 본 논문에서는 이와 같은 해석적 기준을 가지고 모의실험을 수행하여 복동 압축성형과 단동 압축성형에 의한 해석결과를 비교하였다. 이때, 모의실험에 사용된 소재는 AISI 1035이며, 마찰에 의한 영향을 무시하기 위해서 모든 경계면상의 마찰값은 영으로 설정하였고, 압축성형을 위한 성형속도는 0.15mm/sec 이다.

Fig. 6(a), (b)는 제안된 알고리즘에 의해 각각의 높이 감소율에 따른 유효변형률속도 및 변형에 따른 격자들을 나타낸 것이다. 각각의 그림에서 좌측은 변형체간의 접촉경계를 갖고 있는 복동 압축성형에 의한 형상이며, 우측그림은 단동 압축성형에 대한 결과이다. 그림에서 알 수 있듯이 제안된 프로그램에 의해서 모든 높이 감소율에 대해 복동 압축성형에 의한 유효변형률 속도 분포가 접촉 경계선을 기준으로 대칭적으로 나타났다. 또한 이러한 해석결과가 단동 압축성형에 의한 압축성형과 비교하여 동일한 경향을 보이고 있다. 특히, Fig. 6(b)의 워안에 확대된 그림의 접촉 경계면에서 알 수 있듯이 성형이 진행되어도 제안된 프로그램에서는 경계면 상에서 요소들간의 침투가 발생하지 않고 구속조건을 만

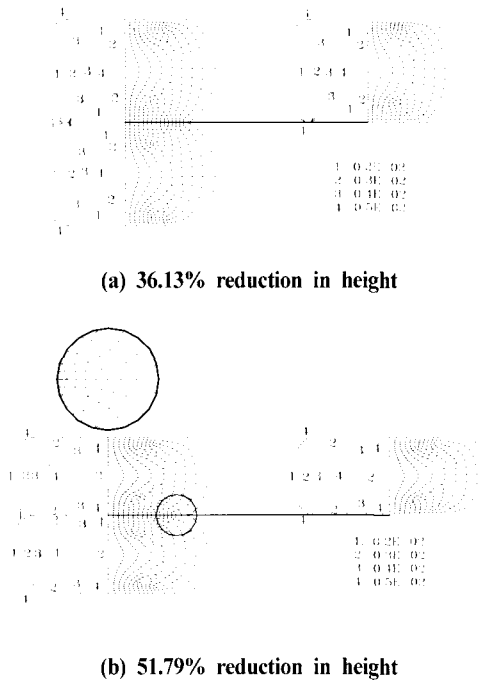


Fig. 6 Deformation patterns and effective strain rate with proposed program at each reduction in height; Simulation results by double(left) and single action pressing(right), respectively

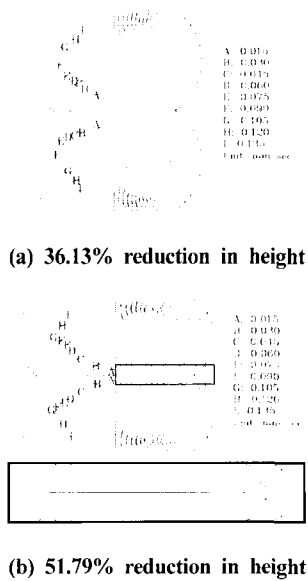


Fig. 7 Velocity contour and vector plots with proposed program at each reduction in height; Simulation results by double action pressing

축하고 있다.

Fig. 7(a), (b)는 각각 앞에서와 같은 높이 감소율에 대해서 속도분포와 속도벡터를 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 제안된 프로그램은 유효변형률속도 분포와 마찬가지로 상·하부 변형체가 동일하게 대칭적 분포를 나타내고 있다. 또한, Fig. 7(b)의 사각형안에 확대된 접촉 경계면으로부터 앞서 언급한 접촉조건이 만족함을 알 수 있다.

이상의 결과로부터 본 논문에서 제안된 접촉분제에 대한 유한요소해석 프로그램은 접촉탐색과 별직방법에 의한 구속에 의해 불침투 조건을 만족하고 앞서 제시한 기준과 동일한 결과를 나타냈다.

4.2.2 가상강체와 금형과의 검증결과

접촉현상은 급속의 성형과정에서 금형과 재료와의 사이에서도 발생한다. 이러한 금형과의 접촉을 구축할 때 일반적으로 사용하는 방법이 직접해법(direct method)이며 유한요소법에서 급형과의 접촉경계에 있는 격자점들

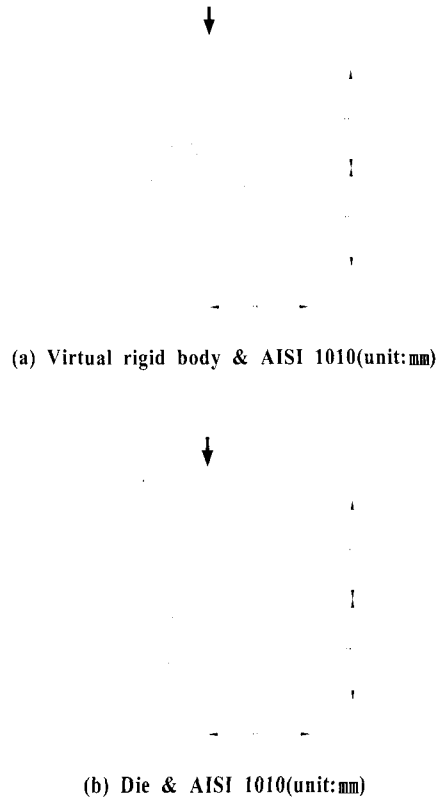


Fig. 8 Schematic configuration for test run(II)

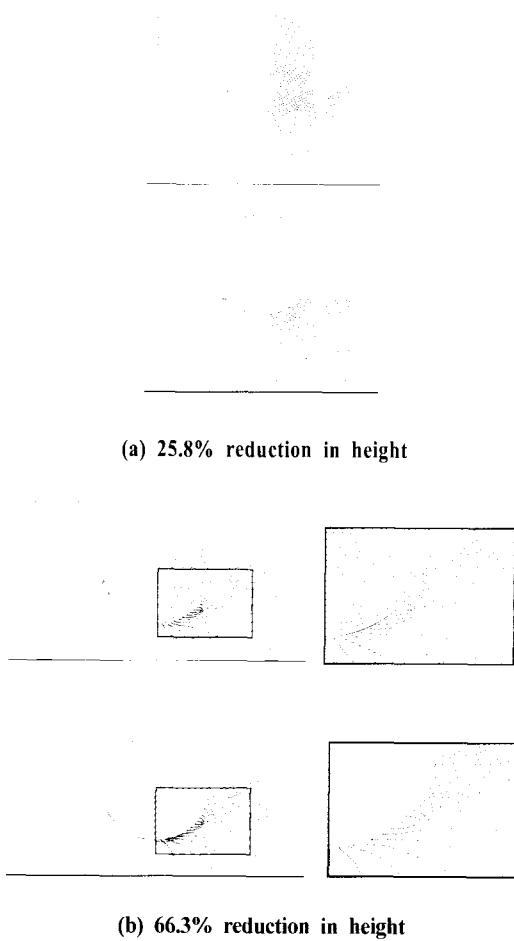


Fig. 9 Deformation patterns and distribution of effective strain rate with virtual rigid body(top) and die(bottom) at each reduction in height($\mu=0.1$)

을 접촉탐색에 의해 금형의 속도나 변위와 동일하게 구속하여 불침투 조건을 만족시킨다. 이와 같은 방법은 특히 금형을 강체라고 가정했을 때 상대적인 이동속도를 알 수 있기 때문에 접촉된 재료의 속도나 마찰경계조건 문제에 쉽게 적용할 수 있는 장점이 있다.⁽³³⁾

본 논문에서는 제안된 프로그램의 접촉탐색과 마찰경계조건을 비교하는 또 다른 기준으로 이러한 직접해법과 별칭방법의 구속조건에 대해 모의실험 하였다. Fig. 8은 이와 같은 방법들을 비교하기 위하여 모의실험에 사용된 금형의 형상과 변형체의 초기 격자를 나타낸 것이다. 그림에 나타난 것처럼 금형의 형상과 동일한 가상의 강체를 설정하여 단동 압축성형에 의해 재료의 유동과 접촉면에서의 구속정도를 비교하였다. 이때 가상의 강체는 하부 변형체의 강도계수보다 매우 큰 값을 사용하여 상

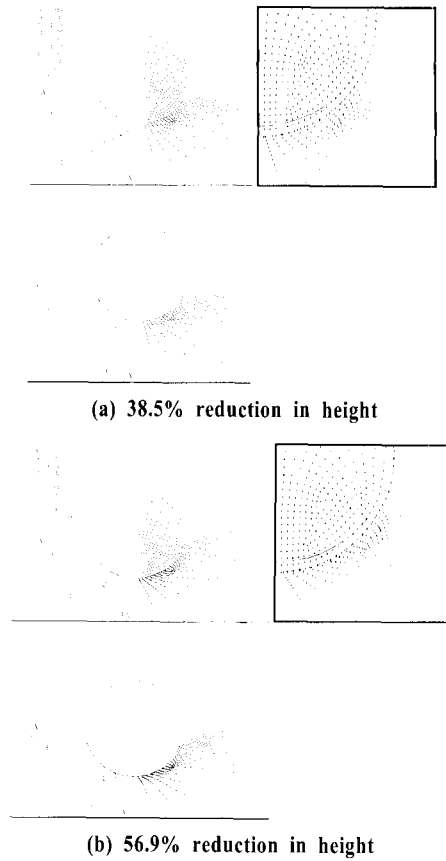


Fig. 10 Velocity contour and vector plots by virtual rigid body(top) and die(bottom) at each reduction in height($\mu=0.1$)

대적으로 변형이 발생하지 않게 하였다. 따라서 상부에 위치한 가상의 강체는 하부 변형체에 대해 단동 압축성형에서의 금형과 동일한 경향으로 구속을 하고 마찰이 적용되어야 한다. 이때, 모의실험에 사용된 하부 변형체의 재료는 AISI 1010이며 가상 강체에 설정된 강도계수와 가공경화지수는 각각 1×10^5 과 1×10^{-4} 이다.

Fig. 9(a), (b)는 각각 가상적인 강체로 가정하여 성형한 경우(상단그림)와 금형으로 성형했을 때의(하단그림) 높이 감소율에 따른 유효변형률속도 분포와 변형된 격자를 나타낸 것으로 성형속도는 0.5mm/sec이다. 접촉 경계면의 마찰에 대한 유동특성을 비교하기 위하여 마찰값은 0.1로 하였으며, 하부 금형에서는 영으로 설정하였다. 그림에서 알 수 있듯이 제안된 프로그램에 의한 유효변형률속도 분포가 금형에 의한 결과와 거의 동일함을 알 수 있다. 그러나, Fig. 9(b)에서처럼 성형 후반부에서는 축중심과 바깥쪽 접촉면 부근에서 제안된 프로그램에 의한

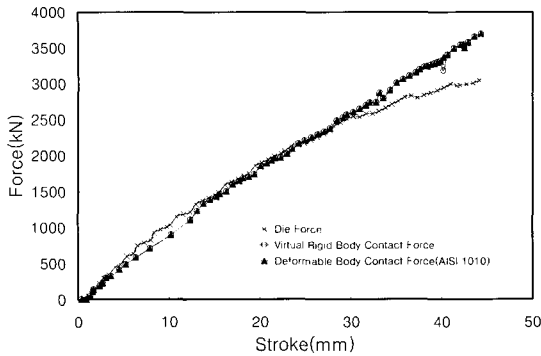


Fig. 11 Load-stroke relationships for the virtual rigid body and die ($\mu=0.1$)

유효변형률속도 분포가 상대적으로 약간 크게 나타났다. 이것은 직접해법과 접촉문제의 마찰경계조건에서 계산되는 마찰력의 차이점으로 판단된다.

Fig. 10(a), (b)는 앞에서와 동일한 성형조건에 대해서 각각의 높이 감소율에 따른 속도분포이며 확대된 그림은 가상강체의 접촉 경계면에서 속도벡터를 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 두 개의 해석결과가 전체적으로 일치하고 있음을 알 수 있다. 또한 확대된 그림으로부터 접촉 경계면을 따라 하부변형체가 가상 강체와 동일한 크기의 속도벡터를 가지고 있으면서 이동하고 있다.

Fig. 11은 행정거리에 따른 급형에 의한 성형하중과 제안된 프로그램에 의한 경계면의 접촉력을 비교한 것이다. 그림에서 가상 강체와 하부 변형체의 접촉력이 서로 일치하므로 접촉 경계면에서 힘 평형조건을 만족하고 있음을 알 수 있다. 이러한 접촉력을 급형에 의한 성형하중과 비교해볼 때 성형초기에는 대체로 접촉력과 일치하지만 행정거리가 길어질수록 접촉력이 더 크게 나타났다.

지금까지 급형의 이동속도를 이용하여 접촉경계면을 구축하고 마찰경계조건을 적용하는 직접해법과 제안된 프로그램에서 적용된 별치방법에 의한 해를 비교하였다. 그 결과 제안된 프로그램이 직접해법과 전체적인 소재의 이동경향이나 변형은 유사하였으나 성형하중은 별치방법이 성형 후반부에서 더 크게 나타났다.

5. 결론

본 논문에서는 두 개의 강소성 축대칭 변형체에 대한 접촉문제를 별치함수와 쿨롱 마찰법칙을 이용하여 수식화하고 유한요소해석 알고리즘을 제안하였으며 그 내용

을 정리하면 다음과 같다.

- (1) 경계치 문제를 기반으로 기존의 강소성 유한요소 변분식에 접촉경계조건을 도입하고 모델링 하였다.
- (2) 제안된 알고리즘을 이용하여 단동 및 복동 압축성형에 대한 모의실험의 수치적 해를 비교한 결과 유효변형률속도와 속도분포가 동일하게 나타났다.
- (3) 마찰경계를 고려한 가상강체와 급형과의 비교에서는 재료의 이동경향이나 접촉 경계면등은 서로 유사하지만 성형하중은 별치방법이 더 크게 나타났다.

후 기

이 논문은 인하대학교의 R.A. 연구비 지원 및 2002년도 교수연구진흥비의 지원에 의하여 연구되었음.(INHA-22680)

참 고 문 헌

- (1) I. Paczelt, B. A. Szabo and T. Szabo, 1999, "Solution of contact problem using the hp-version of the finite element method", *Int. J. Computers & Mathematics with Appl.* Vol. 38, pp. 49~69.
- (2) T. Shimizu and T. Sano, 1997, "Development of a penalty method contact algorithm and its application to a sheet forming problem", *J. of Materials Processing Tech.* Vol. 67, pp. 177~182.
- (3) H. Parisch and CH. Lubbing, 1997, "A formulation of arbitrary shaped surface elements for three-dimensional large deformation contact with friction", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 3359~3383.
- (4) D. A. Spence, 1975, "The Hertz contact problem with finite friction", *J. Elasticity*, Vol. 5, pp. 297~319.
- (5) A. Francavilla and O. C. Zienkiewicz, 1975, "A note on numerical computation of elastic problems", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 913~924.
- (6) T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, J. L. Sackman, 1976, A. Curnier and W. Kanokkulchai, "A finite element method for a class of contact-impact problems", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 8, pp. 249~276.
- (7) P. Wriggers and J. C. Simo, 1985, "A note on

- tangent stiffness for fully nonlinear contact problems", *Commun. Appl. Numer. Methods*, Vol. 1, pp. 199~203.
- (8) Z. H. Zhong and L. Nilsson, 1989, "A contact searching algorithm for contact problems", *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 1, pp. 197~209.
- (9) Z. H. Zhong and L. Nilsson, 1994, "Automatic contact searching algorithm for dynamic finite element analysis", *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 2, pp. 187~197.
- (10) Z. H. Zhong, 1993, *Finite element procedures for contact-impact problems*, Oxford University Press.
- (11) P. Hrycaj, S. Cescotto and J. Oudin, 1991, "Elasto-plastic finite element analysis of unilateral contact with generalized Coulomb friction", *Engineering computations*, Vol. 8, pp. 291~303.
- (12) Z. Wanxie and S. Suming, 1988, "A finite element method for elasto-plastic Structures and contact problems by parametric quadratic programming", *Int. J. for Num. Mech. Eng.*, Vol. 26, pp. 2723~2738.
- (13) B. C. Lee and B. K. Kwak, 1984, "A computational method for elasto-plastic contact problems", *Computers & Structures*, Vol. 18, No. 5, pp. 757~765.
- (14) J. W. Joo and B. M. Kwak, 1986, "Analysis and applications of elasto-plastic contact problems considering large deformation", *Computers & Structures*, Vol. 24, No. 6, pp. 953~961.
- (15) L. Fourment, J. L. Chenot and K. Mocellin, 1999, "Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation", *Int. J. for Numerical Methods in Engrg.*, Vol. 46, pp. 1435~1462.
- (16) J. B. Dalin and E. Onate, 1989, "An automatic algorithm for contact problem: Application to sheet metal forming", *Numerical Methods in Industrial Forming Processes '89*, Fort Collins, pp. 419~424.
- (17) T. Shimizu and T. Sano, 1993, "Development of penalty method contact algorithm for rigid plastic FEM", *Adv. Technol. Plast.*, Beijing, Vol. 3, pp. 1163~1168.
- (18) T. Shimizu and T. Sano, 1995, "An application of a penalty method contact friction algorithm to a 3-dimensional tool surface expressed by a B-spline patch", *J. Mater. Process. Technol.*, Vol. 48, pp. 207~213.
- (19) J. O. Hallquist, G. L. Goudreau, Benson DJ, 1985, "Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computation", *Computer Methods in Applied Numerical Methods*, Vol. 51, pp. 107~137.
- (20) T. Belytschko and W. K. Liu and B. Moran, 2000, *Nonlinear finite elements for continua and structures*, John Wiley & Sons, LTD, England.
- (21) T. A. Laursen and J. C. Simo, 1993, "A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody large deformation frictional contact problems", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3451~3485.
- (22) S. H. Cho, 2002, A contact searching algorithm for axisymmetric finite element analysis, Inha University, pp. 11~24. (in Korean)
- (23) C. C. Chen, S. Kobayashi, 1978, "Rigid plastic finite element analysis of ring compression", *Applications of numerical methods to forming processes*, ASME Applied Mechanics Division, Vol. 28, pp. 163~174.
- (24) S. I. Oh, G. D. Lahoti and T. Altan, 1981, "ALPID - A General Purpose FEM Program for Metal Forming", *Proceedings of NAMRC IX*, Pennsylvania State University.
- (25) Air Force Material Laboratory, 1973, *Forming Equipment, Materials and Practices*, Metal and Ceramics Information Center, p. 164.
- (26) S. Wang and A. Makinouchi, 2000, "Contact search strategies for FEM simulation of the blow molding process", *Int. J. Numer. Mech. Engrg.*, Vol. 48, pp. 501~521.