

축대칭 변형체의 마찰 접촉문제에 관한 유한요소 해석

장동환* · 조승한** · 황병복***

(2002년 10월 21일 접수)

Finite Element Analysis for Frictional Contact Problems of Axisymmetric Deforming Bodies

D. H. Jang, S. H. Cho and B. B. Hwang

Abstract

This paper is concerned with the numerical analysis of frictional contact problems in axisymmetric bodies using the rigid-plastic finite element method. A contact finite element method, based on a penalty function, are derived from variational formulations. The contact boundary condition between two deformable bodies is prescribed by the proposed algorithm. The program which can handle frictional contact problem is developed by using pre-existing rigid-plastic finite element code. Some examples used in this paper illustrate the effectiveness of the proposed formulations and algorithms. Efforts focus on the deformation patterns, contact force, and velocity gradient through the various simulations.

Key Words : Frictional Contact Problem, Penalty Method, Finite Element Analysis, Axisymmetric bodies

1. 서론

유한요소법은 최근 컴퓨터 용량의 대형화와 계산속도의 향상으로 다른 수치해법에 비하여 적용이 일반적이고 응력이나 변형률의 분포를 쉽게 구할 수 있기 때문에 연속체 문제 등에 광범위하게 사용되고 있다.⁽¹⁾ 이러한 유한요소법을 이용하여 기계부품의 공정해석이나 구조물 해석시 나타나는 큰 문제중의 하나는 변형체 사이의 접촉문제이다.⁽²⁻³⁾ 일반적으로 마찰접촉문제는 수학적 관점에서 운동학적으로 구속된 경계치 문제이며, 비선형성과 불연속성을 내재하고 있기 때문에 제한된 이론으로만 해석이 가능하다.⁽⁴⁻⁵⁾ 전통적으로 접촉문제는 해석적인 복

소함수를 도입하거나 적분방정식을 이용하여 해석하였다.⁽⁶⁾ 그러나, 일반적으로 마찰 접촉문제를 수치적으로 해석할 경우에는 매우 복잡한 계산과정과 많은 계산량이 필요하게 되어 보다 수렴이 확실하고 오차가 작으며 효율적인 방법이 요구된다.⁽⁷⁾ 1967년도에 처음으로 마찰을 고려하지 않은 접촉문제에 관한 수치적 접근이 시도된 이후로 지금까지 많은 연구가 진행되어 왔다.⁽²⁾ Duvaut, Lions⁽⁸⁾는 마찰접촉문제에 대한 변분 부등식을 제안하고 해의 존재성과 유일성을 증명하였지만, 이것은 접촉압력을 알고 있는 경우에만 적용 가능한 식이다. 유한요소법에서는 변분식을 이용하여 경계면에서의 표면외력을 적분이 도입된 등가하중으로 근사화 시킨다. 따라서, 상대

* 인하대학교 자동화공학과 박사과정

** 인하대학교 자동화공학과 석사과정

*** 인하대학교 기계공학부 부교수

적으로 해의 신뢰성이 떨어지는 단점과 접촉경계에서 절점들이 접촉되어야 한다는 제약으로 어려움이 있을 수 있다. 그러나 다양한 형상들에 대해 경계조건과 하중조건이 작용하는 접촉문제에 적용이 가능하고, 응력이나 변형률의 분포를 쉽게 구할 수 있기 때문에 현재까지 접촉문제에 많이 이용되고 있다.

본 논문에서는 기존의 강소성 유한요소법 코드로 구성되어 있는 ALPID⁽⁹⁾ 프로그램에 벌칙함수가 적용된 접촉문제를 도입하였다. 이를 통하여 형상과 재료가 다른 두 개의 축대칭 변형체에 대한 모의실험을 수행하고 해석된 결과로부터 얻어진 여러 가지 수치적 해를 비교·정리하였다.

2. 접촉문제의 해법

2.1 벌칙방법에 의한 유한요소 수식화

마찰접촉문제는 이론적, 수치적 관점에서 볼 때 복잡하게 구성되어 있다. 그것들은 고체역학에서 다루고 있는 일반적인 연속성대신에 경계면에서 재료와 기하학적인 측면에서 불연속적인 특징을 가지고 있다.⁽⁵⁾

두 개의 강소성 변형체에 접촉문제에 대한 평형방정식과 경계조건을 변분식에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta\Pi^{(s)} + \delta\Pi^{(m)} \\ &= \int_{\Omega} \bar{\sigma} \delta \bar{\epsilon} d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \dot{\epsilon}_v \delta \dot{\epsilon}_v d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_f} t_i \delta v_i d\Gamma_f - \int_{\Gamma_c} f_N \delta v_i d\Gamma_c = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 상점자는 두 개의 변형체를 구별하기 위한 것으로 본 논문에서는 각각 종속변형체(slave body)와 주 변형체(master body)로 구분하였다. Γ_f 와 Γ_c 는 각각 외력경계와 접촉경계를 나타내며 f_N 은 접촉력이다. 또한, $\bar{\sigma}$ 와 $\bar{\epsilon}$ 는 각각 유효응력과 유효변형률속도이며, $\dot{\epsilon}_v$ 는 부피변형률속도이고, α 는 비압축성을 고려하기 위한 벌칙상수이다.

본 논문에서는 접촉 경계면에서 상대속도와 접촉력 등에 관한 식을 구성하기 위하여 주접촉 세그먼트에 대한 종속절점(slave node to master segment)의 개념⁽¹⁰⁾을 도입하였다. 즉, 변형되는 형상에 따라 임의의 절점이 상대 경계면에 침투될 때 이러한 절점을 종속절점으로 가정하였다. 접촉경계면상에서 주접촉면과 종속접촉면의

법선 벡터는 접촉경계면상에서 방향이 서로 반대이다. 이때 접촉 경계면에서의 상대속도는 접촉후 각 변형체의 법선 방향의 속도가 서로 동일하므로 영이 되고 법선 접촉력은 반드시 압축력이 되어야한다.⁽¹¹⁾ 본 논문에서는 상대속도를 구하기 위하여 접촉경계면상에 위치한 절점들을 속도중분이 고려된 각 방향의 자유도에 대해 계산하였다. 이러한 상대속도에 벌칙함수가 부가되어 식 (1)에 대한 수정된 변분식은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta\Pi^* = \delta\Pi^{(s)} + \delta\Pi^{(m)} + \beta \gamma_N \delta \gamma_N \quad (2)$$

여기서, γ_N 은 접촉 경계면에서의 상대속도이며 β 는 두 변형체의 법선방향의 상대속도를 동일하게 구속하기 위한 벌칙상수이다.

식 (2)는 다중 뉴턴-랩슨방법을 이용하여 각 절점들의 속도중분에 대해 선형화된 식으로 구하여지며, 본 논문에서는 접촉 경계면상에 위치한 종속절점에 대한 주접촉 세그먼트를 커플링 하였다.

2.2 접촉 경계면에서의 마찰 및 접촉 탐색

마찰은 대부분의 금속성형공정에서 재료의 유동 및 변형상태에 심각한 영향을 준다. 때로는 성형하중과 응력을 감소시키고, 균일한 변형을 위해 작은 마찰력이 요구되기도 한다.⁽¹²⁾ 이러한, 수평외력에 관한 모델을 총괄하여 마찰모델이라 하며 기본적으로 쿨롱마찰이 일반화 되어있다.⁽¹³⁾ 본 논문에서는 접촉 경계면에서 법선 접촉력에 초점을 두고 쿨롱 마찰계수를 적용하였으며 Chen, Kobayashi⁽¹⁴⁾ 등이 제안한 다음과 같은 변형된 마찰응력 식을 이용하였다.

$$f_T = -\mu f_N \left(\frac{2}{\pi} \right) \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_T}{a} \right) \quad (3)$$

여기서, f_T 는 마찰력이고, μ 는 쿨롱 마찰계수이며, a 는 수치적 해석을 위한 임의의 값이다. γ_T 는 접촉 경계면에서의 상대속도로서 세 개의 절점에 대해 접선방향의 속도를 이용하여 계산하였다.

접촉경계면에서 경계조건을 알기 위한 접촉탐색방법은 계산의 효율성을 위해 탐색시간이 적게 걸려야 한다. 또한 접촉되어지는 절점이나 세그먼트들을 정확히 찾을 수 있는 신뢰성이 있으면서 시간중분에 따른 변형체의 형상에 무관하게 적용시킬 수 있는 범용성도 필요하다.⁽¹⁵⁾ 본 논문에서는 주 접촉면과 종속접촉면 알고리즘

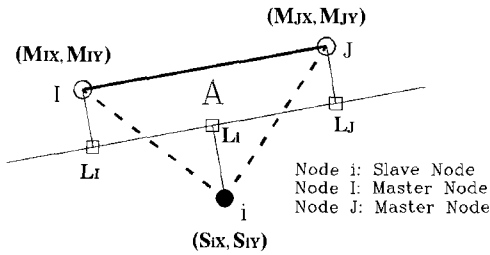


Fig. 1 Nodal coordinate and territory based on contact searching

⁽¹⁰⁾을 바탕으로 경계면상에서 차지하고 있는 경계영역을 이용하여 탐색을 수행하는 알고리즘을 적용하였다. 그러나 일반적으로 단면 알고리즘⁽¹⁶⁾에서 적용되는 접촉간극 거리 대신에 경계면상에 위치한 절점과 세그먼트가 차지하고 있는 경계영역을 이용하였다.

Fig. 1은 본 논문에 적용된 접촉탐색 방법을 나타낸다. 그림에서 S와 M은 각각 절점좌표를 나타내며, L은 최소제곱법(least square method)에 의해서 직선맞춤한 좌표이다. A는 접촉 경계면에서 각 절점들로 구성된 삼각형의 면적으로 반시계 방향으로 계산된 영역이 영이 될 때 종속절점은 주접촉 세그먼트에 위치하게 된다. 그러나, 모의실험단계에서 이러한 경우는 수치적으로 발생하지 않기 때문에 침투깊이를 고려하여 $-1E-8$ 의 오차값으로 접촉을 판단하였다. 이러한 탐색과정에서 종속절점의 판단은 그림에 나타난 직선맞춤한 좌표에 의해 수행되었으며, 이로부터 소재유동에 따른 절점들간의 위치정보도 수정하였다.

3. 유한요소해석 및 결과

3.1 해석조건

유한요소법을 이용한 모의실험방법이 등장하여 실험을 통해 얻을 수 있었던 각종 자료들을 경제적으로 얻을 수 있도록 재료의 유동, 응력, 변형을, 내부결함, 다이충만 정도 그리고 연성효과 등의 각종 특징들을 예측할 수 있게 되었다.⁽¹⁷⁾ 특히 강소성 유한요소법은 Lec와 Kobayashi

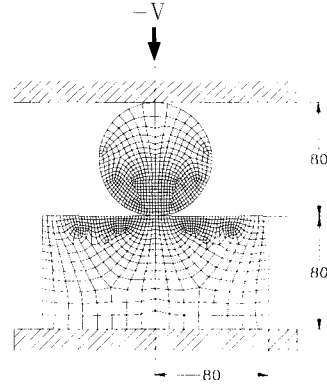


Fig. 2 Schematic configuration for simulation (unit: mm)

⁽¹⁸⁾가 변분 원리에 입각한 행렬법을 수식화한 이후 금속의 성형해석에 많이 이용되고 있다.

본 논문에서는 제안된 프로그램을 통해 여러 가지 재료와 형상들에 대해 모의실험을 수행하였다. Fig. 2는 모의실험에 사용한 소재의 초기형상과 격자를 나타낸 것이다. 그림에서처럼 구와 중실축 재료를 단동 프레스에 의해 압축성형 하였으며 이로부터 유효변형률 분포, 유동양상, 속도벡터, 접촉력등과 같은 다양한 정보를 얻을 수 있었다. 또한 두 변형체의 물리적 접촉시 발생하는 마찰력의 상대적인 영향을 분석하고, 마찰값에 따른 접촉압력분포 등을 정리하였다.

강소성 유한요소법에 의한 모의실험을 수행하기 위하여 유동응력과 유효변형률의 관계는 멱정리(power law)⁽¹⁹⁾에 따라 다음 식과 같다.

$$\bar{\sigma} = K \bar{\epsilon}^n \text{ (kgf/mm}^2\text{)} \quad (9)$$

여기서 K는 강도계수이고, n은 가공경화지수이며, 본 논문에서 모의실험에 사용한 소재의 값들은 Table 1에 나타나있다.⁽¹⁹⁾

3.2 재료에 따른 해석결과

Fig. 3(a), (b)는 강도가 서로 다른 소재에 대해 압축

Table 1 Material parameters for simulation

	AISI 1010	AISI 1035	AISI 1050	CDA 110(Copper)
Strength Coefficient(K)	72.98	91.97	114.96	37.97
Work-hardening Exponent(n)	0.22	0.17	0.09	0.275
Strain Range	0.1-0.7			0.2-1.0

성형 후 높이 감소율에 따른 유효변형률분포 및 변형된 격자의 형상을 나타낸 것이다. 사용된 소재는 경강(hard steel)으로 AISI 1050을 연강(mild steel)으로는 AISI 1010을 선택하였다. 이때, 강도가 다른 두 가지 소재의 위치를 서로 변경하여 모의실험 하였으며 급형과 소재의 접촉 경계면에 동일한 마찰계수 0.1을 적용하였다. 그림에서 알 수 있듯이 두 가지 경우 모두 초기에는 상부에

위치한 소재가 성형되어 접촉면적을 확보한 후에 하부소재의 변형이 일어나고 있다. 그러나, 성형 후반부에는 경강이 상부에 위치해 있을 경우(Fig. 3(b) 상단그림)에는 소재가 전체적으로 변형이 원활하게 일어나고 있는 반면에 그와 반대의 경우(Fig. 3(b) 하단그림)에는 연강에 변형이 집중되고 있다. 두 경우 모두 이동편치에 접촉된 소재의 변형이 하부 중심축의 접촉 경계면과 비교하여 상대적으로 크게 일어났다. 유효변형률 분포에서는 하부

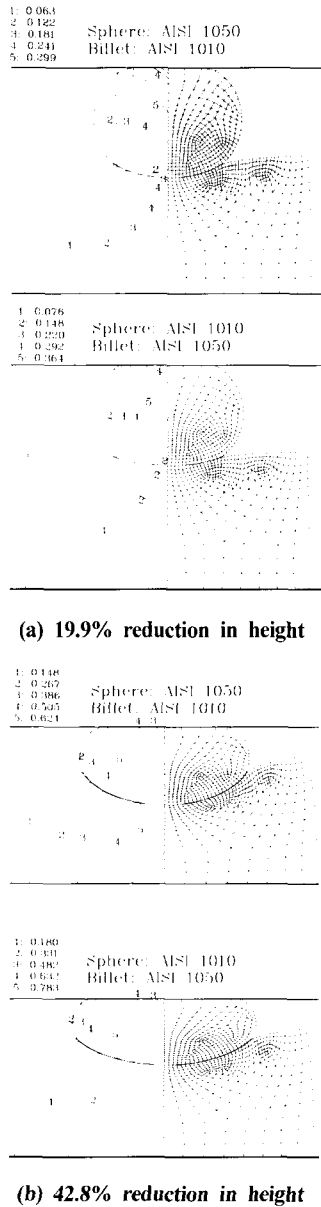


Fig. 3 Deformation patterns and effective strain with different materials at each reduction in height ($\mu=0.1$)

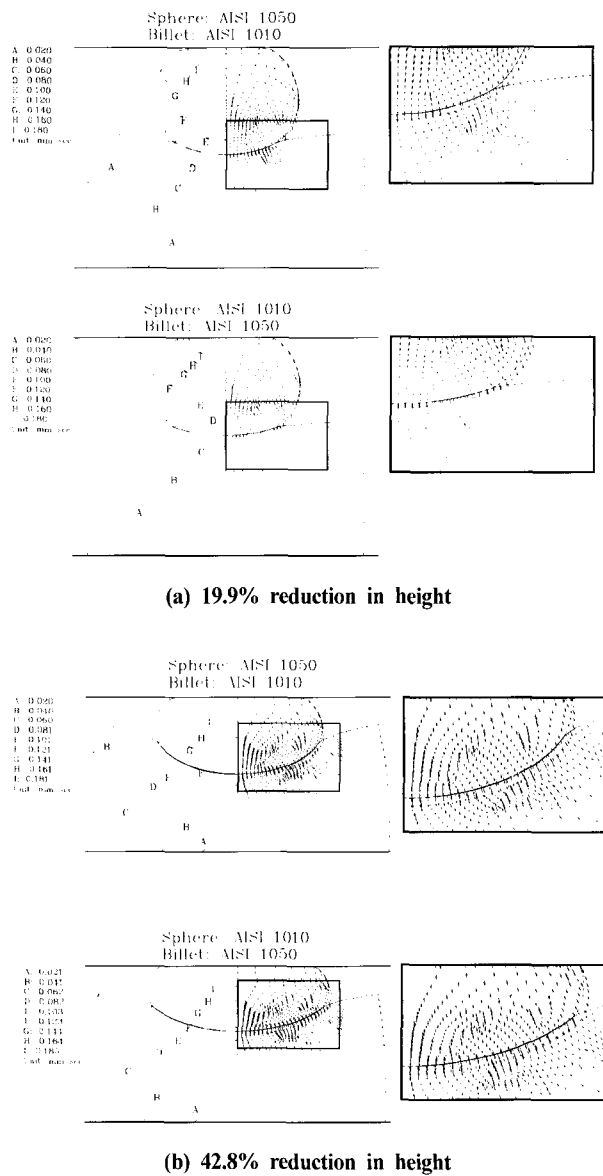
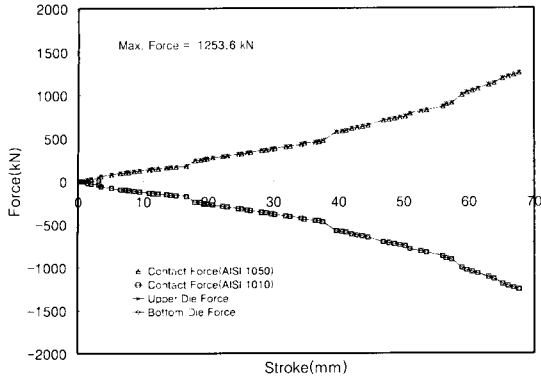
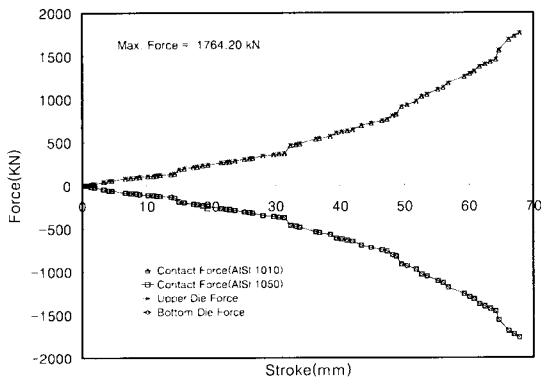


Fig. 4 Velocity contour and vector plots with different materials at each reduction in height ($\mu=0.1$)



(a) Sphere(AISI 1050) and billet(AISI 1010)



(b) Sphere(AISI 1010) and billet(AISI 1050)

Fig. 5 Load-stroke relationships for each materials and die ($\mu=0.1$)

에 연강이 있을 경우에 최소/최대 유효변형률 차이가 더 작게 나타났으며, 최대값은 모두 상부에 위치한 구의 중심부분에서 분포했다. 따라서 두가지 경우 모두 구의 중심부에서 최대변형률이 발생함으로써 중실축보다 상대적으로 안정된 형상을 갖고 있는 구에서 응력집중 현상이 나타남을 알 수 있다.

Fig. 4(a), (b)는 앞에서와 같은 높이감소율에 대해 각 변형체에 대한 속도분포와 속도벡터를 나타낸 것이다. 그림으로부터 전체적으로 성형이 진행되어도 접촉탐색에 의한 구속으로 경계면상에서 요소들간의 침투가 발생하지 않고 접촉조건을 만족하고 있다. 속도분포는 연강이 상부에 있을 경우가 반대인 경우와 비교하여 접촉면을 중심으로 더 조밀함을 알 수 있다. 속도벡터는 확대된 그림에서 알 수 있듯이 성형초기에는 접촉 경계면에서 소재의 강도차이에 의한 영향을 보이지 않고 있다. Fig. 4(b)의 성형 후반부에서는 하부에 위치한 변형체는 소재의 강도와 무관하게 일정한 방향의 속도성분을 갖는다.

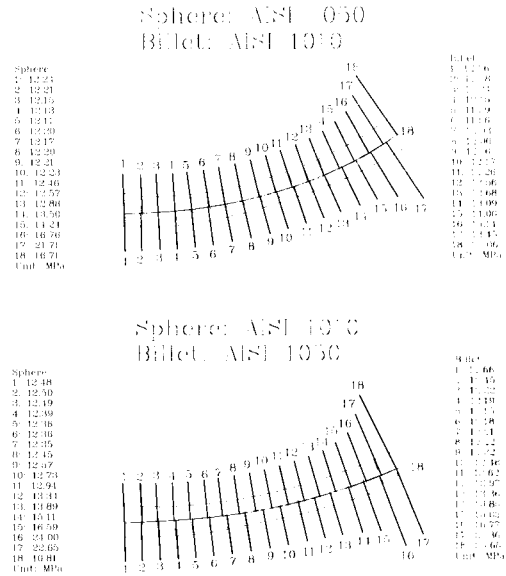
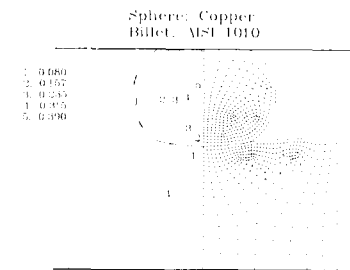


Fig. 6 Distribution of reaction pressure on the contact surface at 26.5% reduction in height ($\mu=0.1$)

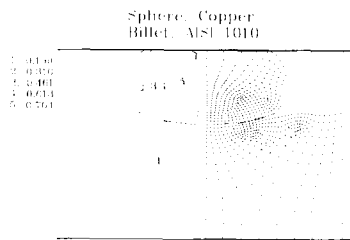
그러나 상부 변형체가 경강인 경우 접촉 경계면에서 축방향의 속도성분을 보이는 반면에 연강인 경우에는 중실축과 동일한 방향을 가진다. 이것은 초기 성형단계에서 소재의 강도와 무관하게 구의 변형이 원활하게 일어나지만 성형이 진행 될수록 연강인 구에 비교해서 경강인 구가 먼저 한계성형에 도달했기 때문이다.

Fig. 5(a), (b)는 각각 행정거리에 따른 접촉 경계면에서의 접촉력과 급형에서의 성형하중을 나타낸 것이다. 각 변형체가 받는 반력을 기준으로 부호를 정하여 상부 변형체는 양으로 나타내고 하부 변형체는 음으로 표시하였다. 각각의 그림에서 상·하부 변형체에 대한 접촉력이 작용·반작용의 원리에 의해 경계면에서 평형을 이루고 성형하중과 완전히 일치하고 있다. 이로부터 본 논문에서 적용한 별착함수에 의해 접촉 경계면에서 힘 평형조건이 만족되고 있음을 알 수 있다. 두 개의 그림을 비교해보면 중간 행정까지는 하중이 거의 동일하다. 그러나, 성형이 진행될 수록 상부에 경강이 위치해 있는 경우(Fig. 5(a) 참조)는 하중이 완만하게 증가하고 있지만 이와 반대인 경우에는 급격히 증가하고 있다(Fig. 5(b) 참조). 이러한 이유는 연강의 원활한 소재유동로 인한 넓은 접촉면적과 이에 따른 하부 변형체의 반력에 의해 접촉력이 크게 작용했기 때문이다. 각각의 압축성형에서 최대 성형하중은 구가 AISI 1050인 경우 1253.6kN이고, AISI 1010인 경우 1764.2kN으로 나타났다.

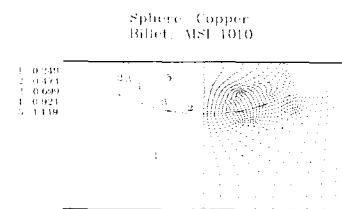
Fig. 6은 높이감소율 26.5%에 대해 접촉 경계면에서



(a) 17.6% reduction in height



(b) 29.5% reduction in height



(c) 41.2% reduction in height

Fig. 7 Deformation patterns and effective strain with copper and steel at each reduction in height(die: $\mu=0.1$, contact surface: $\mu=0.2$)

각 변형체가 상대적으로 받고 있는 반력에 의한 접촉압력을 나타낸 것이다. 그림으로부터 앞서 행정거리에 따른 하중분포와 마찬가지로 연강이 상부에 놓여 있을 때 각각의 절점에서 접촉압력이 더 크다. 또한 이미 접촉된 절점들은 압력분포가 균일한 반면에 경계면의 외곽에서 새롭게 접촉되는 절점들에서는 급격히 압력이 증가하는 경향을 보이고 있다. 이것은 상부변형체와 하부변형체의 유동방향이 일치하지 않기 때문에 상대속도의 차이가 다른 접촉된 절점들에 비교하여 크기 때문이다.

Fig. 7(a)~(c)는 비철금속인 구리와 AISI 1010을 압축성형했을 때의 유효변형률 분포를 나타낸 것으로 금형과 재료의 경계면에 각각 다른 0.1과 0.2의 마찰값을 적용하였다. 구리는 연성이 큰 재료이기 때문에 그림에

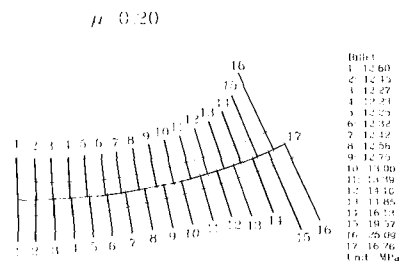
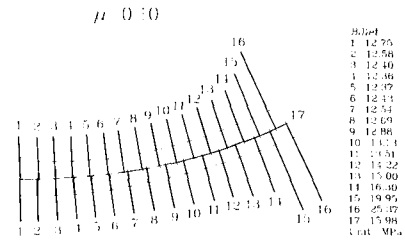


Fig. 8 Distribution of reaction pressure on the contact surface at 23.1% reduction in height(sphere: AISI 1035, billet: AISI 1035)

나타난 것처럼 성형초기에도 반경방향으로 변형이 원활하게 일어나고 있다. 반면에 강철제인 증실축은 축 중심에서 접촉 경계면을 따라 구리에 비해 상대적으로 작은 변형을 보이고 있다. 그러나, 전체적인 유동양상이나 변형이 앞서 강철제에 대한 압축성형과 유사한 경향을 보이고 있다. 유효변형률 분포에서는 성형이 진행될수록 증실축에 비해 구에서 변형률 차이가 더욱 크게 나타났으며, 최대 유효변형률은 구리인 구의 중심부에서 1.149이다.

3.3 마찰에 따른 해석결과

본 논문에서는 마찰값에 따른 성형특성을 알아보기 위하여 동일한 재료에 대해 접촉 경계면의 마찰값을 다르게 하여 모의실험을 수행하였다. 이때 구와 증실축에 동일한 AISI 1035 소재를 사용하였으며, 접촉경계면에 대한 마찰의 영향만을 고려하여 금형과의 마찰값은 0.1로 모두 일정하게 하였다.

Fig. 8은 높이감소율 23.1%에서 각각의 마찰값에 대해 접촉 경계면에서 각 변형체가 상대적으로 받고 있는 접촉압력을 나타낸 것이다. 그림으로부터 마찰이 할수록 상대적으로 접촉압력은 동일한 지점에서 작게 분포하고 각각의 절점들에 대한 접촉압력의 차이가 비교적 균일한 경향을 보이고 있다. 그러나, 접촉압력의 전체적인 분포

와 경향이 앞서 서로 다른 재료에 대한 해석결과와 유사하며 접촉 경계면의 마찰값에 의한 영향은 비교적 작게 나타났다. 이것은 동일한 재료에 대해 접촉 경계면에서 소재유동이나 성형성 등의 경향이 유사하기 때문인 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 논문에서는 강소성 축대칭 변형체인 구와 중실축 재료에 쿨롱 마찰계수를 적용하여 제안된 접촉문제에 대한 유한요소해석 프로그램으로 모의실험 하였으며 그 내용을 정리하면 다음과 같다.

- (1) 강소성 유한요소법을 접촉경계에 적용하여 비교적 간단한 형상에 대해 성형에 따른 해를 구하였다.
- (2) 모의실험을 통하여 제안된 접촉탐색 알고리즘에 대한 적용성을 검증하였다.
- (3) 서로 다른 강도를 갖고 있는 구와 중실축 재료를 단동 프레스에 의해 압축성형한 결과 연강이 하부에 위치해 있을 때 성형하중, 접촉압력, 최대 유효변형률이 더 크게 나타났다.
- (4) 구와 중실축의 압축성형에서 접촉 경계면의 마찰값이 미치는 영향은 작은 것으로 나타났다.

후 기

본 연구는 2002년도 인하대학교의 교수연구진흥비의 지원에 의하여 수행되었음을 밝힙니다. (INHA-22680)

참 고 문 헌

- (1) Serope Kalpakjian, 1992, *Manufacturing processes for engineering materials*, 2nd Edition., Addison Wesley publishing company Inc.
- (2) I. Paczelt, B. A. Szabo and T. Szabo, 1999, "Solution of contact problem using the hp-version of the finite element method", *Int. J. Computers & Mathematics with Appl.* Vol. 38, pp. 49~69.
- (3) T. Shimizu and T. Sano, 1997, "Development of a penalty method contact algorithm and its application to a sheet forming problem", *J. of Materials Processing Tech.* Vol. 67, pp. 177~182.
- (4) H. Parisch and CH. Lubbing, 1997, "A formulation of arbitrary shaped surface elements for three-dimensional large deformation contact with

- friction", *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 3359~3383.
- (5) G. Pietrzak and A. Curnier, 1999, "Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangian treatment", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 177, pp. 351~381.
- (6) P. Chabrand, O. Chertier and F. Dubois, 2001, "Complementarity methods for multibody friction contact problems in finite deformations", *Int. J. Numer. Mech. Engrg.*, Vol. 51, pp. 553~578.
- (7) S. S. Lee, 1989, A complementarity problem formulation for frictional contact, KAIST, Korea.
- (8) G. Duvaut and J. L. Lions, 1976, *Inequalities in mechanics and physics*, Springer-Verlag, Berlin.
- (9) S. I. Oh, G. D. Lahoti and T. Altan, 1981, "ALPID - A General Purpose FEM Program for Metal Forming", *Proceedings of NAMRC IX*, Pennsylvania State University.
- (10) Z. H. Zhong and L. Nilsson, 1990, "A contact searching algorithm for general 3D contact-impact problems", *Computers and Structures*, Vol. 34, No. 2, pp. 327~335.
- (11) T. A. Laursen and J. C. Simo, 1993, "A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody large deformation frictional contact problems", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3451~3485.
- (12) P. Hartley, I. Pillinger, C. E. N. Sturgess, 1992, *Numerical modelling of material deformation process*, Springer-Verlag, New York.
- (13) T. Belytschko and W. K. Liu and B. Moran, 2000, *Nonlinear finite elements for continua and structures*, John Wiley & Sons, LTD, England.
- (14) C. C. Chen, S. Kobayashi, 1978, "Rigid plastic finite element analysis of ring compression", *Applications of numerical methods to forming processes*, ASME Applied Mechanics Division, Vol. 28, pp. 163~174.
- (15) M. W. Heinstein, S. W. Attaway, J. W. Swegle and F. J. Mello, 1993, *A general contact detection algorithm for finite element analysis*, Computational Mechanical Publications, UK.
- (16) 한영원, 임용택, 1995, "성형공정의 자유경계면 접촉

- 에 관한 유한요소해석”, 한국소성가공학회지, Vol. 4, No. 1, pp. 48~58.
- (17) K. Osakada, G. B. Yang, T. Nakamura and K. Mori, 1990, "Expert system for cold forging process based on FEM Simulation", Annals of the CIRP, Vol. 39, No. 1, pp. 249~252.
- (18) C. H. Lee, S. Kobayashi, 1973, "New solutions to rigid plastic deformation problems using a matrix method", J. Eng. Ind. Trans. ASME 95, p. 865.
- (19) Air Force Material Laboratory, 1973, Forming Equipment, Materials and Practices, Metal and Ceramics Information Center, p. 164.