

## 축대칭 쉘 구조의 단순 유한요소 해석

### A Simple Finite Element Analysis of Axisymmetrical Shell Structures

김 용 희\* · 이 윤 영\*\*

Kim, Yong - Hee · Lee, Yoon - Young

#### Abstract

Shell structure are widely used in a variety of engineering application and mathematical solution of shell structures are available only for a few special cases. The solution of shell structure is more complicated when it has such condition as winker foundation, variable thickness and other problem. In this paper, a simple finite element method is presented for the analysis of axisymmetric several types of shell structure subjected to axisymmetric loads and having uniform and varying wall thickness on elastic foundation. The method is based on the analogy with a beam on elastic foundation (BEF), foundation stiffness matrix where the foundation modulus and beam flexural rigidity are replaced by appropriate parameters pertaining to the shell under considerations. The technique is attractive for implementation on a numerical solution by means of a computer program coded in FORTRAN language with a few elements. To demonstrate this fact, it gives good results which compare well with SAP2000.

*Keywords : A simple finite element analysis, Beam on elastic foundation, Axisymmetrical shell structures, Foundation stiffness*

#### I. 서 론

축 대칭의 얽은 쉘은 공학적 구조물인 주요 건물 의 돔(dome), 항공기나 로켓의 외각, 물 탱크 및 공학 분야의 구조물 등 널리 사용된다. 축대칭 쉘

구조물은 다른 구조물에 비해서 역학적으로 안정되 고, 형상이 좋으며 경제적이다. 그러나, 이러한 쉘 구조물은 대개 탄성지반 위에 놓인 경우가 많고, 그 기능 또한 제작상의 요소 때문에 모선방향의 곡 률이 불연속이며, 두께도 일정치 않을 경우가 많다. 이러한 쉘구조물은 특수한 경우에만 수학적인 엄밀 해가 제한적으로 가능한데 특히, 지반조건, 원추 방 향의 두께의 변화 및 여러 가지 조건 등이 고려될 경우 미분방정식의 해석을 위한 수학적인 엄밀해를 구하기가 매우 복잡하고 어렵다.

\* 경남대학교 토목환경학부  
\*\* 경남대학교 대학원  
\* Corresponding author. Tel.: +82-55-249-2667  
fax: +82-55-249-2664  
E-mail address: kyhee@kyungnam.ac.kr

또한, 두께가 일정한 경우의 구조물에서는 H. Reisner와 Meisner는 탄성이론에 의한 미분 방정식으로 엄밀해를 얻었으나, 두께가 변화하는 쉘에 대하여는 단지 몇 개의 특수해를 얻었고, W. K. Sptopski, C. E. Pearson, E. W. Dri-gwell, A. W. Adkins, M. Soare에 의하여 컴퓨터를 이용한 유한 차분법으로 체계화 되었으나 아주 적은 요소를 사용하면서도 좋은 정도를 얻지 못했다.<sup>11)</sup> P. E. Grafton과 D. R. Strome<sup>12)</sup>은 직접강성법에 의한 유한요소법을 개발하여 실용상 충분한 해를 구하였으나 너무나 방대하여 시간과 노력이 많이 소요되었다. 최근 F. Tin-Loi, V. A. Pum ano, Thambiratnam<sup>4)</sup>는 유사탄성지반보(Analogy of Beam on Elastic Foundation) 개념을 도입하여 축대칭 하중이 작용하는 원통형 쉘과 원추형 쉘을 연구 하였다.

따라서, 본 연구에서는 Hetenyi<sup>1)</sup>와 Gharli<sup>2)</sup>의 유사탄성지반보 개념을 도입하여 축대칭 하중이 작용하는 축대칭 복합 쉘구조물에 원주 방향의 변위를 무시하고 회전체를 가지는 전체의 강성에 전체의 하중을 고려한 단위 폭 단일 요소의 탄성지반 상 힘 부재로 변환하여 해석 하였다. 또한, 이러한 방법을 검증하기 위해 단순화 유한요소법으로 구성된 SAP2000 프로그램에 의한 해석 결과와 비교한 바 좋은 결과를 얻었다.

## II. 유사탄성지반보<sup>1)</sup>

Fig. 1과 같이 탄성 지반 위에 놓여있고 하중을 받는 보의 처짐이 발생하게 되고, 처짐이 상하 어느 쪽으로 발생하더라도 지반 반력은 보에 작용한다고 가정하면 탄성지반은 연속적으로 분포된 반력을 발생한다. 또한, 반력  $p$ 가 보의 처짐  $y$ 에 비례한다고 가정하면 지반반력  $p$ 는 다음과 같은 식이 된다.

$$p = k y \dots \dots \dots (1)$$

여기서,

- $p$  : 지반반력 (kgf/cm<sup>2</sup>)
- $k$  : 지반반력 계수 (kgf/cm<sup>3</sup>)
- $y$  : 보의 처짐량 (cm)

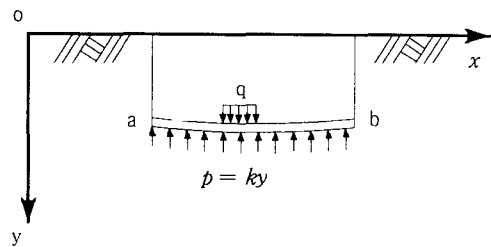


Fig. 1 Beam on elastic foundation

식 (1)을 고려하면 Fig. 1과 같이 탄성 지반 위에 놓인 보의 미분방정식은 식 (2)와 같이 된다.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -k y + q \dots \dots \dots (2)$$

한편, Fig. 3과 같이 내압을 받는 원통형 쉘과 원추형 쉘의 미분방정식은 식 (3), (4)와 같다.

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{Eh}{r^2} w + q(x) \dots \dots \dots (3)$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{Ehb \cos^2 \alpha}{r^2} w + q(x) \dots \dots \dots (4)$$

식 (2)과 식 (3), 식 (4)에서 다음과 같이 변환할 수 있기 때문에 이러한 보를 유사탄성지반보라고 하며 복합 쉘구조물을 뼈대구조로 간주하여 계산을 간략화할 수 있다.

$$EI(\text{Beam}) \leftrightarrow D = \frac{Ebh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{Shell})$$

$$k(\text{Beam}) \leftrightarrow \frac{Eh}{r^2} \quad (\text{Cylindrical shell})$$

$$k_f(\text{Beam}) \leftrightarrow \frac{Eb_c h \cos^2 \alpha}{r_c^2} \quad (\text{Conical shell})$$

여기서,

D : 쉘 강성,  $w$  : 원주 방향의 변위  
 EI : 보 강성,  $h$  : 원통형 쉘의 두께  
 $r$  : 원통형 쉘의 반지름,  $r_c$  : 원추형 쉘의 반지름  
 $y$  : 보의 처짐,  $b$  : 원통형 쉘의 단위 폭  
 $b_c$  : 원추형 쉘의 폭

$$M = D \frac{d^2 v}{d x^2} \dots\dots\dots (8)$$

$$M = D [B] \{a\} \dots\dots\dots (9)$$

여기서,

$$[B] = \{0 \ 0 \ 2 \ 6x\}$$

### III. 요소강성행렬

#### 1. 원통형 쉘 요소 강성행렬

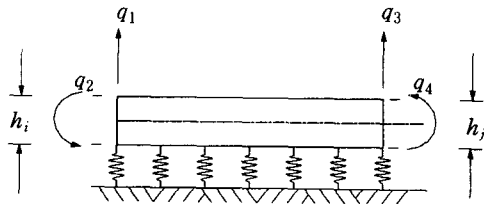


Fig. 2 Beam on elastic foundation element

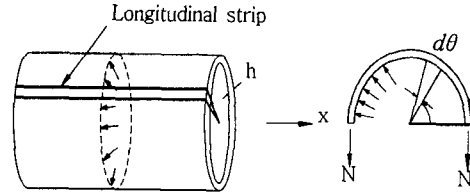


Fig. 3 Longitudinal strip of cylinder shell

Fig. 2와 같은 유사탄성지반상보를 적용하기 위하여 변위 함수를 다음과 같이 3차 다항식으로 가정하여 표기하면 식 (5)와 같다.

$$v = [A] \{a\} \dots\dots\dots (5)$$

여기서,

$$[A] = [1 \ x \ x^2 \ x^3]$$

$$\{a^T\} = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4)$$

또한, 절점 변위를  $q_1, q_2, q_3, q_4$ 라고 하면 이 절점 변위에 대한 식은 다음 식 (6)과 같이 주어진다.

$$\{q\} = [C] \{a\} \dots\dots\dots (6)$$

식 (5)과 식 (6)으로부터 다음과 같은 식 (7)을 얻을 수 있다.

$$v = [A][C]^{-1} \{q\} \dots\dots\dots (7)$$

보에 대한 휨의 미분방정식은 다음 식 (8)과 같고 행렬식으로 표기하면 식 (9)와 같다.

Fig. 3에서 휨에 의한 변형 에너지  $U_{Bc}$ 는 다음 식 (10)과 같이 된다.

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 v}{d x^2} M dx \dots\dots\dots (10)$$

위 식 (10)에 식 (8), (9)를 대입하면 탄성에너지에 대한 다음 식 (11)이 성립된다.

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} \int \{ [B] \{a\} \}^T D [B] [C^{-1}] \{q\} dx$$

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} \int \{ [B] [C^{-1}] \{q\} \}^T D [B] [C^{-1}] \{q\} dx$$

$$U_{Bc} = \frac{1}{2} \{q\}^T [C^{-1}]^T \left[ \int [B]^T D [B] dx \right] [C^{-1}] \{q\} \dots\dots\dots (11)$$

여기서,

$$[ \bar{k}_{Bc} ] = \int [B]^T D [B] dx$$

일정한 두께( $h$ )의 원통형 쉘요소와 변화하는 두께( $h(x)$ )의 원통형 쉘요소에 대한 쉘 강성은 각각 식 (12), 식 (14)와 같다.

$$D = \frac{Ebh^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots\dots(12)$$

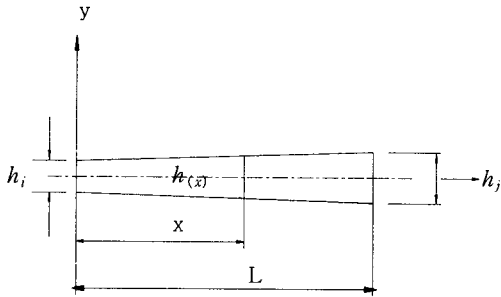


Fig. 4 Axisymmetric shell element with linearly varying thickness

Fig. 4에서  $i$ 점으로부터  $x$ 만큼 떨어진 곳의 높이  $h(x)$ 를 고려하면 다음 식 (13)과 같다.

$$h(x) = h_i + (h_j - h_i) \frac{x}{L} \dots\dots\dots(13)$$

이때 변단면의 휨 강성은 변단면 두께  $h(x)$ 를 고려하여 다음 식 (14)와 같이 된다.

$$D = \frac{Ebh^3(x)}{12(1-\nu^2)} \dots\dots\dots(14)$$

축대칭 유사탄성지반보의 휨강성 행렬(4×4)은 다음 식 (15)와 같다.

$$[k_{Bc}] = [C^{-1}]^T [\bar{k}_{Bc}] [C^{-1}] \dots\dots\dots(15)$$

또한, 탄성지반강성 계수( $k_{cf}$ )는 식 (11)에서  $[\bar{k}_{Bc}]$ 대신  $[\bar{k}_{Bcf}]$ 로 대입하면 다음 식 (16)이 된다.

$$U_{Fc} = \frac{1}{2} \{q\}^T [C^{-1}]^T [\bar{k}_{Fc}] [C^{-1}] \{q\}$$

$$[k_{Fc}] = [C^{-1}] [\bar{k}_{Fc}] [C^{-1}] \dots\dots\dots(16)$$

여기서,

$$[\bar{k}_{Fc}] = \int_0^L [A]^T \frac{Eh}{r^2} [A] dx$$

원통형 쉘요소의 최종 완전한 강성행렬은 다음 식 (17)과 같이 된다.

$$K_c = k_{Bc} + k_{Fc} \dots\dots\dots(17)$$

## 2. 원판요소 강성행렬

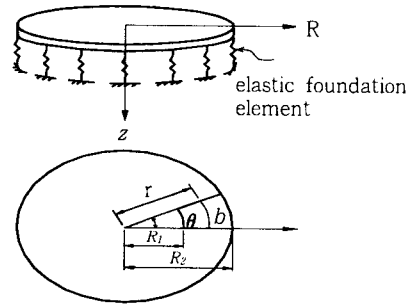


Fig. 5 Circular plate element on elastic foundation

Fig. 5와 같은 원판에 대한 변위 함수를 다음과 같이 3차 다항식으로 가정하면 식 (18)과 같고, 휨에 대한 변형에너지를 나타내면 다음 식 (19)와 같다.

$$w = [\bar{A}] \{a\} \dots\dots\dots(18)$$

여기서,

$$[\bar{A}] = [1 \quad r \quad r^2 \quad r^3]$$

$$\{a^T\} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4)$$

$$U_{Bcf} = \frac{1}{2} \int \sigma^T \epsilon dA \dots\dots\dots(19)$$

여기서,

$$\sigma = D\epsilon \quad , \quad \epsilon = (\epsilon_R \quad \epsilon_\theta) \left[ \frac{d^2 w}{dr^2} \quad \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right]$$

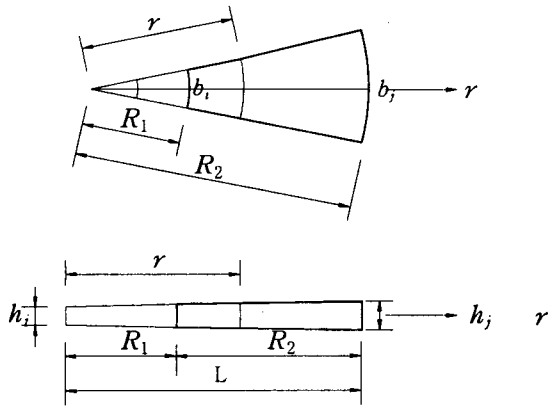


Fig. 6 Wedge-shaped plate element with linearly varying thickness

Fig. 6에서  $h(r)$ 를 구하면 다음 식 (20)과 같이 된다.

$$h(r) = h_i + (h_j - h_i)(r - R_1)/L \dots \dots \dots (20)$$

식 (16)을 정리하면 원판요소의 휨 강성행렬 (4×4)은 다음 식 (21)과 같이 된다.

$$[k_{Bci}] = [C^{-1}]^T [\bar{k}_{Bci}] [C^{-1}] \dots \dots \dots (21)$$

또한, 탄성지반반력 강성행렬( $k_{FFci}$ )은 식 (22)와 같이 된다.

$$U_{FFci} = \frac{1}{2} \{q\}^T \int_{R_1}^{R_2} [\bar{A}]^T K_f [A] dA [C^{-1}] \{q\}$$

$$[k_{FFci}] = [C^{-1}]^T [\bar{k}_{FFci}] [C^{-1}] \dots \dots \dots (22)$$

여기서,

$$[\bar{k}_{FFci}] = \int_{R_1}^{R_2} [A]^T K_f [A] dA$$

$dA = r\beta dr$ ,  $K_f$ : 지반반력 계수

원판 요소의 최종 완전된 강성행렬은 다음 식 (23)과 같이 된다.

$$K_{ci} = k_{Bci} + k_{FFci} \dots \dots \dots (23)$$

### 3. 원추형요소 강성행렬

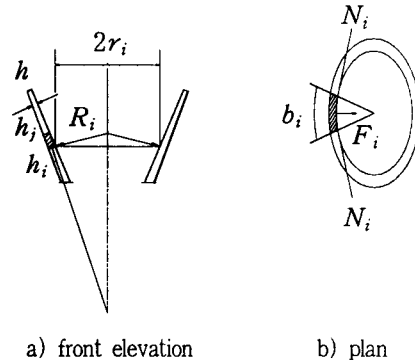


Fig. 7 Conical shell structure

Fig. 7에서 휨에 의한 탄성 에너지에 대한 다음 식 (24)이 성립된다.

$$U_{Bco} = \frac{1}{2} \int \{ [B][a] \}^T D [B] [C^{-1}] \{q\} dx$$

$$U_{Bco} = \frac{1}{2} \int [ [B][C^{-1}] \{q\} ]^T D [B] [C^{-1}] \{q\} dx$$

$$U_{Bco} = \frac{1}{2} \{q\}^T [C^{-1}]^T \left[ \int [B]^T D [B] dx \right] [C^{-1}] \{q\} \dots \dots \dots (24)$$

여기서,

$$[\bar{k}_{Bco}] = \int [B]^T D [B] dx$$

$b_i = b_0 x$ ,  $r_i = x \sin \alpha$  일 때 쉘 강성계수는 식 (25)와 같이 주어진다.

$$D = \frac{E h^3 b_0 x}{12 \cos^3 \alpha} \dots \dots \dots (25)$$

원추형 축대칭 유사탄성지반보의 휨강성 행렬(4×4)은 다음 식 (26)과 같다.

$$[k_{Bco}] = [C^{-1}]^T [\bar{k}_{Bco}] [C^{-1}] \dots \dots \dots (26)$$

또한, 탄성지반강성 계수( $k_{Fco}$ )는 다음 식 (27)이 된다.

$$U_{Fco} = \frac{1}{2} \int \nu^T k' \nu dx$$

$$U_{Fco} = \frac{1}{2} \{q\}^T [[C^{-1}]]^T [\bar{k}_{Fco}] [C^{-1}] \{q\}$$

$$[k_{Fco}] = [C^{-1}] [\bar{k}_{Fco}] [C^{-1}] \dots \dots \dots (27)$$

여기서,

$$\bar{k}_{Fco} = \int_0^L [A]^T \left( \frac{1}{x} \frac{b_o E h}{\sin^2 \alpha \cos \alpha} \right) [A] dx$$

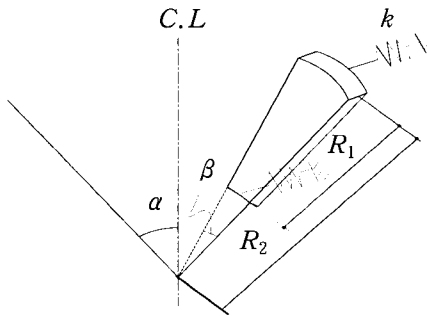


Fig. 8 Foundation modulus conical shell

Fig. 8과 같이 지반 위에 놓여져 일을 경우에는 탄성지반반력 강성행렬( $k_{FFco}$ )는 식 (28)과 같이 된다.

$$U_{FFco} = \frac{1}{2} [q]^T [C^{-1}]^T \int_{R1}^{R2} [A] k b \beta dx [A] C^{-1} [q]$$

$$k_{FFco} = [C^{-1}]^T [\bar{k}_{FFco}] [C^{-1}] \dots \dots \dots (28)$$

여기서,

$$[\bar{k}_{FFco}] = \int_{R1}^{R2} [A]^T k b \beta dx [A] dx$$

$k$  : 지반반력 계수

최종 완전된 강성행렬은 다음 식 (29)와 같이 된다.

$$K_{co} = k_{Bco} + k_{Fco} + k_{FFco} \dots \dots \dots (29)$$

#### IV. 프로그램의 검증

##### 1. 해석 모델

유사 탄성지반보에 의한 복합 쉘 해석 프로그램의 검증을 위해 지반반력 계수 및 탄성계수는 각각  $k = 10,000 \text{ tf/m}^3$ ,  $E = 2,500,000 \text{ tf/m}^3$  사용하였다. 또한, 구조물의 형상은 Fig. 9과 같고 수압만을 고려하였으며 본 논문에서 제시한 유사탄성지반보의 개념을 통한 해석과 유한요소 프로그램 SAP2000의 결과치를 비교, 분석하였다.

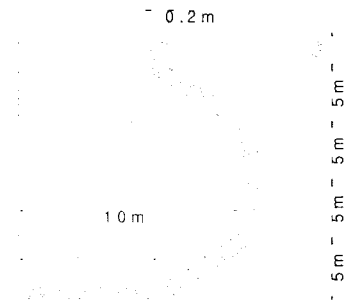


Fig. 9 Shell structure on elastic foundation

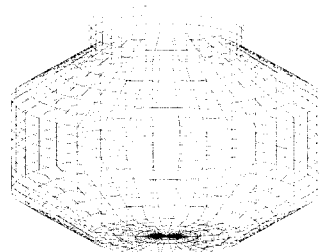


Fig. 10 Simple finite element

Table 1 Analysis results of shell structure

Node	Displacement $\delta$ ( $\times 10^{-3}$ m)				Moment ( $\times 10^{-2}$ t·m)	
	SAP 2000	This paper	SAP 2000	This paper	SAP 2000	This paper
	Vertical	Vertical	Radial	Radial		
1	-2.095	-2.097	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-2.095	-2.097	0.000	0.000	0.010	0.010
3	-2.095	-2.097	0.000	0.000	-0.010	-0.010
4	-2.095	-2.097	0.000	0.000	-0.160	-0.160
5	-2.058	-2.059	0.000	0.000	0.040	0.040
6	-2.059	-2.060	0.000	0.000	1.190	1.210
7	-2.069	-2.069	0.002	0.002	0.620	0.630
8	-2.073	-2.074	0.002	0.002	-7.220	-7.240
9	-2.006	-2.006	0.009	0.010	-15.530	-15.550
10	-2.003	-2.003	0.040	0.042	-8.210	-8.220
11	-1.997	-1.998	0.080	0.081	-0.910	-0.920
12	-1.987	-1.989	0.120	0.122	-1.090	-1.090
13	-1.972	-1.972	0.164	0.165	-0.470	-0.480
14	-1.953	-1.953	0.207	0.207	-3.865	-3.871
15	-1.929	-1.931	0.253	0.255	-3.820	-3.820
16	-1.900	-1.900	0.301	0.303	10.920	10.930
17	-1.867	-1.869	0.332	0.334	49.730	49.760
18	-1.834	-1.841	0.306	0.309	70.960	70.990
19	-1.807	-1.809	0.228	0.230	-87.520	-87.890
20	-1.748	-1.748	0.222	0.223	16.020	16.340
21	-1.721	-1.723	0.216	0.216	8.320	8.420
22	-1.583	-1.586	0.195	0.197	6.760	6.720
23	-1.269	-1.269	0.139	0.139	84.390	84.580
24	-0.658	-0.658	0.002	0.002	-177.58	-178.34
25	-0.805	-0.806	0.002	0.002	70.490	70.650
26	-0.791	-0.792	0.001	0.001	34.980	34.990
27	-0.527	-0.528	0.001	0.001	-5.210	-5.220
28	-0.309	-0.310	0.000	0.000	-104.84	-104.86

프로그램의 검증을 위하여 반경방향 36개, 수직 방향 28개의 요소로 나누어 해석하였다. Table 1에서 해석 결과치를 보면 절두 원추형 쉘과 원통형 쉘의 접합부에서 급격히 증가되고, 원판과 절두 원추형 쉘, 원통 쉘과 절두 원추형 쉘의 접합부 사이에서는 부호가 교차하는데 이는 일반적인 원통형 쉘 구조에 대한 결과들과 잘 일치하고 있다. 절두 원추형 쉘의 하단부에 부의 휨 모멘트가 집중됨을 알 수 있으며, 반경방향 변위는 원형 쉘의 높이의

1/3 부근에 최대가 발생됨을 알 수 있다.

전반적인 차이는 1% 이내로 유한요소 프로그램 SAP2000의 해와 거의 일치함을 나타내고 있다. 또한, 절점 18과 절점 24부분에서 차이가 3~5% 정도 발생하였는데 이는 탄성지반 위에 놓인 절두 원추형 쉘은 원통형 쉘의 변환으로부터 유도된 Hetényi<sup>1)</sup>와 Ghali<sup>2)</sup>의 원추형 쉘 이론의 오차에 의한 것으로 판단된다.

### V. 변단면 쉘구조물의 해석 및 결과분석

본절에서는 Fig. 11 a) 등단면과 b), c) 변단면 최대 휨 모멘트와 응력을 비교, 분석하였다.

Fig. 12에서 최대 휨모멘트는 원통형과 절두형 단면이 만난 점에서 변단면 b), c) 일때가 등단면 a)일 때보다 33~41% 증가하는 것으로 나타났고 대체적으로 등단면 보다 최대 휨모멘트의 결과치가 크게 나타나 있다. 하지만, Fig. 13, Fig. 14에서

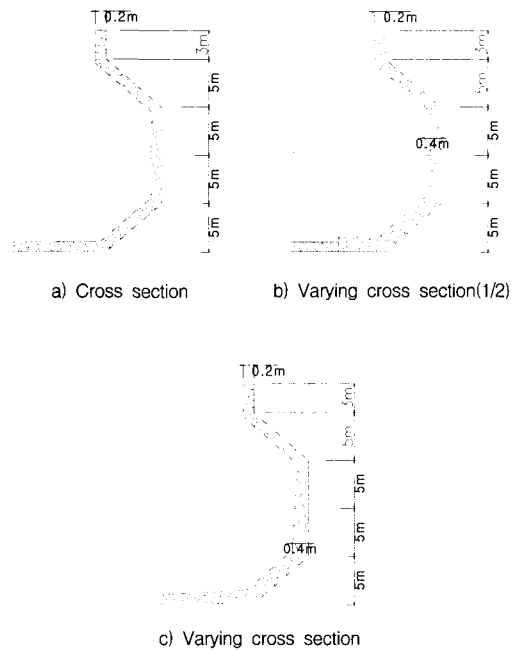


Fig. 11 Cross section of structure

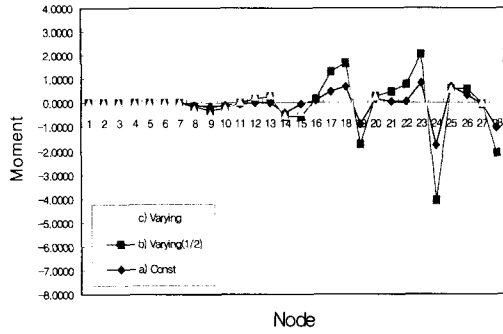


Fig. 12 Distributions of bending moment

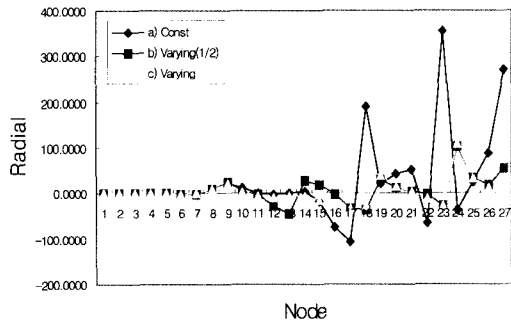


Fig. 13 Distributions of radian direction stress

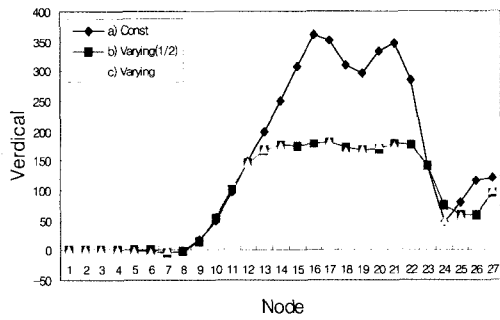


Fig. 14 Distributions of vertical direction stress

반경방향 응력 및 수직방향 응력은 원통형과 절두형 단면이 만난 점에서 변단면 b), c)일 때가 단면 a)일 때보다 0.7~10배 정도 작게 나타났고 대체적으로 등단면 보다 반경방향 응력의 결과치가 작게 나타나 있다.

## VI. 탄성지반에 따른 월구조물의 해석 및 결과분석

본절에서는 Fig. 11에서 탄성지반계수를  $k = 10,000 \text{ tf/m}^3$ ,  $k = 30,000 \text{ tf/m}^3$ ,  $k = 50,000 \text{ tf/m}^3$ 로 변화시켜 최대 휨 모멘트를 비교, 분석하였다.

Fig. 16에서 최대 휨모멘트는 원통형과 절두형 단면이 만난 점에서 b)에서 a)일 때보다 20% 증가하는 것으로 나타냈고 절두형 단면과 원판형 단면이 만나는 점에서는 b)는 a)일 때보다 5% 증가하는 것으로 나타났으며, c)는 b)일 때보다 2% 증

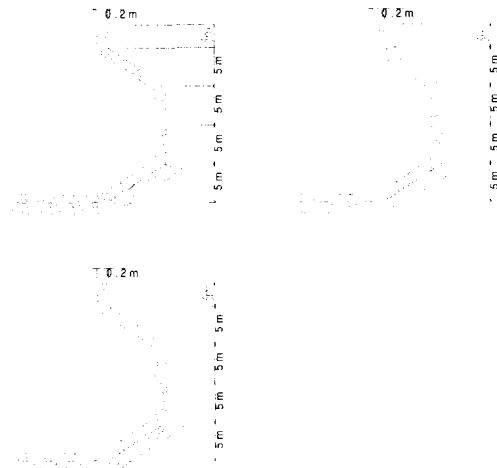


Fig. 15 Cross section of structure on elastic foundations

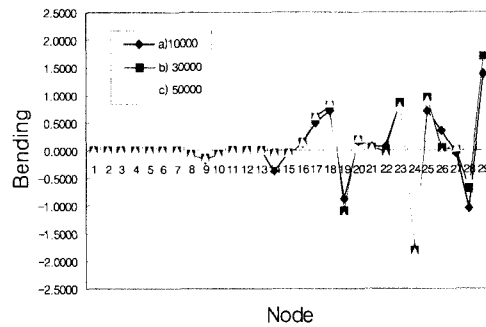


Fig. 16 Distributions of bending moment



가 하는 것으로 나타나 있다.

따라서, 축대칭 복합 쉘 구조에서 지반상의 문제는 우선 지반의 성질이 암반에서부터 점토에 이르기까지 광범위하고 하중이 균등할지라도 저판하의 접지압 분포가 균등하지 않다. 또한, 자연 지반은 흙 입자의 모양, 크기, 흙의 구조, 응력이력, 투수성 등에 따라서 역학적 거동이 대단히 복잡해서 현실적인 해석을 위하여 지반이 탄성적으로 거동한다고 가정함으로써 자연상태의 지반조건을 만족하지는 않겠지만 유용한 정보를 얻을 수 있다. 그래서, 기초와 지반의 상호작용문제를 해결하기 위해 지반을 탄성체로 가정한다는 역학적 모델인 Winkler 지반을 채택하여 지반과 기층의 상호작용문제를 간략화 할 수 있다.

## Ⅶ. 결 론

본 논문에서 유사탄성지반보의 개념을 사용하여 복합 쉘 구조물을 해석하여 분석한 결과 아래와 같은 몇가지 결론을 얻었다.

1. 탄성지반 위에 놓인 복합 쉘 구조물을 유사탄성지반보, 지반강성행렬을 이용하여 평면 뼈대구조로 전환하여 해석한 결과에 대해 1~5% 차이를 보였으며 비교적 잘 일치하였다.
2. 지반과 접하는 복합 쉘 구조 아래의 일정 흙 지반을 축대칭 요소로 가정할 수 있을 때 흙지반요소를 고려한 동일한 해석이 가능하고, 다소의 차이들은 본 연구에 사용된 절두 원추형 요소는 Hetényi<sup>1)</sup>와 Ghali<sup>2)</sup>의 원추형 쉘 이론으로부터 유도된 것인데 이 Hetényi와 Ghali의 원추형 쉘은 원통형 쉘의 변환으로 간주된 탄성지반 위의 보로부터 유도되었기 때문이다.
3. 변단면 해석시 최대휨모멘트는 증가하지만 그에 따른 반경방향 응력과 연직방향 응력은 감소하였다.
4. 지반 조건의 상태는 이론의 전개 및 설계에 반드시 고려되어야 될 것으로 판단된다.

## 감사의 글

본 연구는 경남대학교 2002년도 학술연구비에 의하여 지원되었음.

## References

1. Hetenyi, M. 1946. Beams on elastic foundation, *University of Michigan*, U. S. A : 30-33.
2. Ghali, A. 1979. Circular storage tanks and silos. John Willy and Sons, New York, N. Y. : 15-54.
3. Tin Loi, F., Pulmano, V. A., and Thambiratnam, D. 1990. B. E. F analogy for axisymmetrically loaded cylindrical shells, *Computer and Structures*, 34(2) : 281-285.
4. Pulmano, V. A, Tin Loi, F., and Thambiratnam, D., 1988. A simple analysis of cylindrical shell with Varying Wall Thickness Under axisymmetric loading, *Proceeding of International Conference on trends in Structural Engineering*, Manila, Philippines.
5. Nam, M. H., Pulmano, V. A., and Tin Loi, F. 1989. A simple analysis of axisymmetrically loaded circular cylindrical tanks resting on elastic foundation, *Structural Engineering and Construction*, A. I. T. Thailand 9-15
6. Thevendram, V. 1986. A numerical approach to the analysis of circular cylindrical water tanks, *Computer and Structures*, (23): 379-383
7. Rockey, K. C., Evans, H. R., Griffiths, D. W. and Nethercot, D. A. 1975. The finite element method. 131-176. Crosby Lockwood Staples, London
8. Yang, T. Y. 1970. Flexible plate finite element on elastic foundation. *Journal of the Structure Division ASCE*, 96(10) : 2083-2101
9. Stephen, P. Timoshenko, S. woinsky-Krieger. 1959. The theory of plate and

- Shells. 562-608. McGraw-Hill
10. Nam, M. H. 1992. The analysis on the structure with varying cross sectional area by the finite element method. *Journal of Research Institute of Industrial Technology* 8
  11. Popov Egor. P., Penzien Joseph, and Lu Zung-AN.1964. finite element solution for axisymmetrical shells" *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE.* (90) 5
  12. Grafton Peter. E., and Strome Donald R.1963. Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method. *Journal of AIAA* (1)10
  13. Cho, H. Y. 1982. A finite element analysis concrete cylindrical pile on the elastic foundation. *Research Review of Pusan National Univ.* 4: 295-307