韓國經營科學會誌
第28卷 第1號
2003年 3月

대기행렬시스템의 쌍대관계에 대한 해석 및 확장*

채경철** · 여모세** · 김남기*** · 안창원****

An Interpretation and Extensions of Duality Relations among Queueing Systems*

Kyung-Chul Chae** · Mo-Se Yeo** · Nam-Ki Kim*** · Chang-Won Ahn****

■ Abstract ■

Using the concept of closed queueing network, we present a consistent way of interpreting existing duality relations among queueing systems. Also, using embedded Markov chains, we present a few new duality relations for the queueing systems with negative customers.

Keyword : Duality, Queues, M/G/1/K, GI/M/1/K, N-Policy, F-Policy, Generalized Vacations, Negative Customer

1. 서 론

대기행렬이론에서 흥미로운 주제로 꼽히는 것으로 쌍대관계(duality)가 있다. 예를 들어, M/M/1/m/m 시스템과 M/M/m/m 시스템 간에는 쌍대관계가 성립하므로(2절 참조), 어느 한쪽에 대한 성능척도를 얻으면 자동적으로 다른 쪽의 성능척도도 얻어진다.

위의 예는 교과서 수준의 기본적인 예이다[1]. 이보다 복잡한 예는 비교적 최근에 많이 소개되고

논문접수일 : 2003년 1월 20일 논문게재확정일 : 2003년 2월 24일
* 이 논문은 2002년도 학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음(KRF-2002-070-C00021).
본 논문의 내용이 명확하게 전달되도록 세심한 지적을 해주신 심사위원 두 분께 감사드립니다.
** 한국과학기술원 산업공학과
*** Royal Military College of Canada
**** 한국전자통신연구원 운영체제 연구팀

있는데[2, 5, 6, 8, 10, 12, 13], 이들이 대기행렬의 쌍대관계에 대한 원조로 꼽는 문헌은 1960년대에 출판된 Prabhu의 책[14]이다.

본 연구의 목적은 다음과 같다. 첫째로, 기존에 소개된 쌍대관계들을 이해하기 쉽게 체계적으로 해석함으로서 이들을 대기행렬 또는 확률모형 과목에서도 다룰 수 있게 한다. 둘째로, 이러한 체계적인 해석에 근거하여 새로운 쌍대관계를 제시한다.

아울러, 위의 두 가지 목적을 수행하는 과정에서 아래의 두 가지 질문에 대한 대답을 부산물로 얻는다. 첫째는 선형계획법(linear programming)에서 모든 원(primal)문제에 대해서 쌍대문제가 존재하듯이 과연 대기행렬에서도 모든 원시스템에 대해서 쌍대시스템이 존재하는가이고, 둘째는 대기행렬의 쌍대관계에 대한 원조 문헌이 논문이 아니라 책인 이유와 이후 약 25년간 쌍대관계에 대한 연구가 뜸했던 이유는 무엇인가이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 M/M/1/m/m 시스템과 M/M/m/m 시스템 간의 쌍대관계를 설명하고, 이 쌍대관계의 확장을 3절과 4절에서 논의하는데 이는 각각 GI/M/1/m/m 시스템과 M/G/m/m 시스템 간의 쌍대관계와 M/G/1/m/m 시스템과 GI/M/m/m 시스템 간의 쌍대관계이다. 5절에서는 G_1/G_2/1/K/N 정책 시스템과 $\widetilde{G_2}$ / $\widetilde{G_1}$ /1/K/F 정책 시스템간의 쌍대관계를 논의하고, 6절에서는 쌍대관계의 본질 및 역사를 논의한다. 7절에서는 음고객(negative customer)관련 쌍대관계 두 가지를 새로이 제시하며, 8절에서는 결론을 내리고 추후연구과제를 논의한다.

2. M/M/1/m/m 시스템과 M/M/m/m 시스템

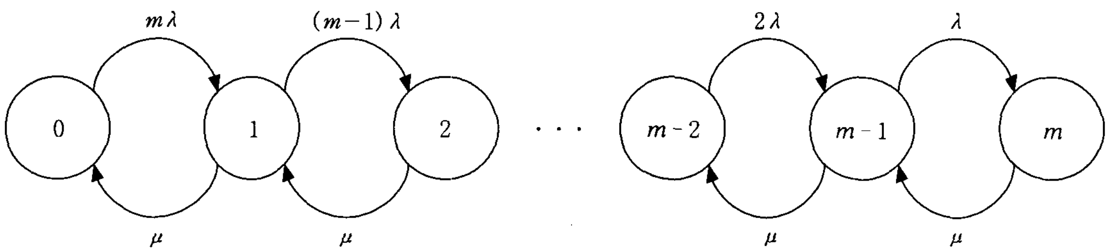
2.1 M/M/1/m/m 시스템

기계수리(machine repair) 시스템이라고 불리우는 M/M/1/m/m 시스템에서 m은 기계의 수인데, 각각의 기계가 고장날 때까지의 가동시간은 서로 독립이며 평균이 λ^{-1}인 지수분포를 따른다[1]. 고장난 기계는 수리소로 보내지는데, 수리소에는 1명의 수리공이 있고 기계 1대씩을 수리하는데 걸리는 시간들은 서로 독립이며 평균이 μ^{-1}인 지수분포를 따른다(또한, 가동시간과 수리시간은 서로 독립이다).

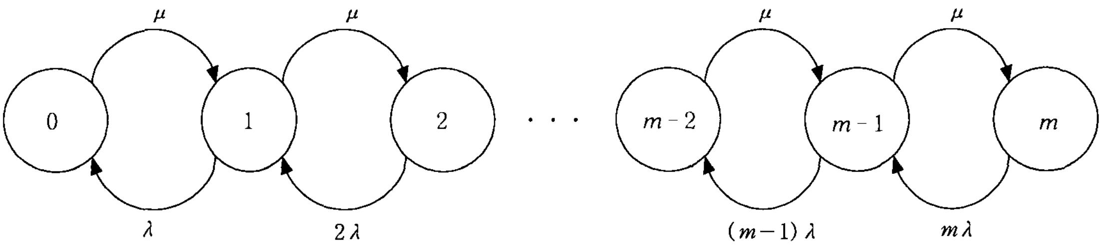
t시점에 수리소에 있는 기계의 수를 $N(t)$라 하면 $\{N(t),\ t \geq 0\}$은 연속시간 마코프연쇄(Markov chain)이고 상태전이 다이아그램(state transition diagram)은 [그림 1]과 같다.

2.2 M/M/m/m 시스템

얼랑손실(Erlang loss) 시스템이라고 불리우는 M/M/m/m 시스템에서 첫 m은 서버(server)의 수이고 두 번째 m은 시스템의 용량(capacity)이다[1]. 따라서, 시스템내에 m명의 고객이 있으면 모든 서버가 바쁘고 그때 도착하는 고객은 차단(block)된다. 고객의 도착과정은 도착률이 μ인 포아송과정(Poisson process)이고, 고객당 서비스시간들은 서로 독립이고(도착과정과도 독립이며) 평균이 λ^{-1}



[그림 1] M/M/1/m/m 시스템의 상태전이 다이아그램



[그림 2] M/M/m/m 시스템의 상태전이 다이아그램

인 지수분포를 따른다.

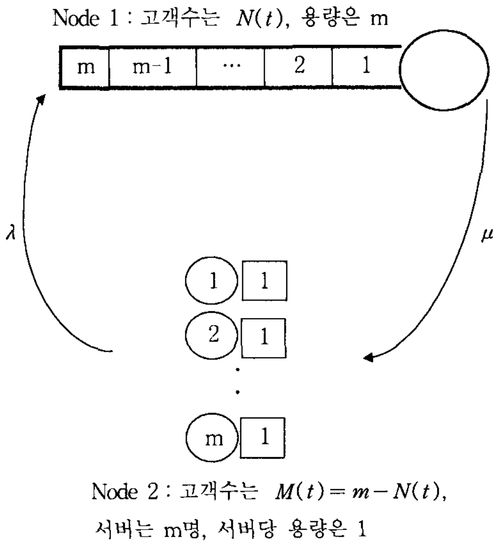
t시점에 시스템 내에 있는 고객의 수를 $M(t)$ 라 하면 $\{M(t),\ t \geq 0\}$은 연속시간 마코프연쇄이고 상태전이다이아그램은 [그림 2]와 같다.

2.3 M/M/1/m/m 시스템과 M/M/m/m 시스템 간의 쌍대관계

[그림 1]과 [그림 2]를 비교하면 M/M/1/m/m 시스템의 " $N(t)$"가 M/M/m/m 시스템의 " $m-M(t)$"와 확률적으로 일치(stochastically equivalent)함을 쉽게 파악할 수 있다. 따라서, $N(t)$에 대한 안정상태(steady-state)확률분포를 얻으면 자동적으로 $M(t)$에 대한 안정상태확률분포도 얻는다. 또한, 평균고객수도 어느 한쪽의 결과로부터 자동적으로 다른 쪽의 결과를 얻으며, 이로부터 Little의 법칙을 통해서 평균대기시간도 얻을 수 있다.

이러한 쌍대관계에 대한 이해를 높히고 아울러 3절과 4절에서의 확장을 용이하게 하기 위해서 폐쇄형네트워크(closed queueing network)로 상황을 묘사하면 [그림 3]과 같다[1].

[그림 3]의 폐쇄형네트워크에서는 총 m명의 고객이 두개의 대기행렬시스템을 교대로 방문하면서 서비스를 받는다. 편의상, M/M/1/m/m 시스템과 M/M/m/m 시스템을 각각 노드(node) 1과 노드 2라 하자. 먼저, 노드 1의 관점에서 논의한다. 노드 1에서 서비스를 받은 고객은 노드 2로 가는데, 노드 2에는 서버가 충분히 많아서 기다리지 않고 바로 서비스를 받기 시작하므로 이 고객이 노드 1을 떠난 시점으로부터 다시 노드 1에 도착할 때까지 걸리는 시간은 노드 2의 서비스시간과 같다. 따라서, 노드 2의 서비스시간이 평균이 λ^{-1}인 지수분포를 따른다고 하면 이는 수리된 기계의 가동시간의 분포와 일치한다.



[그림 3] 기계수리시스템과 얼랑손실시스템 간의 폐쇄형네트워크 관계

다음, 노드 2의 관점에서 논한다. 노드 1 서버의 바쁜기간(busy period) 동안에는 노드 1을 떠나서 노드 2에 도착하는 고객들의 도착간(interarrival) 시간은 노드 1의 서비스시간과 같다. 따라서, 노드 1의 서비스시간이 평균이 μ^{-1}인 iid 지수분포를 따른다고 하면 이는 노드 2의 도착과정이 도착률이 μ인 포아송과정임을 의미한다. 반면에, 노드 1 서버의 유휴기간(idle period)은 m명의 고객이 모

두 노드 2에서 서비스를 받고 있는 기간이다. 따라서, 이 기간 동안에 노드 1을 떠나서 노드 2에 도착하는 고객은 없다. 그렇지만, 가상적으로 고객들이 여전히 도착률이 μ인 포아송과정으로 노드 2에 도착한다고 하더라도 이는 노드 2의 고객수에 영향을 미치지 않는데 그 이유는 노드 2에 m명의 고객이 있을 때 추가로 도착하는 고객들은 모두 차단되기 때문이다(비고 : 노드 1과 노드 2가 폐쇄형 네트워크를 이룰 때에는 "$M(t) = m - N(t)$"가 성립하지만 서로 떨어져 있는 원래의 두 시스템에서는 $M(t)$와 "$m - N(t)$"는 확률적으로 일치함. 즉, 확률분포가 동일함).

3. GI/M/1/m/m 시스템과 M/G/m/m 시스템 간의 쌍대관계

기계수리 시스템에서 수리된 기계들의 가동시간이 (평균이 λ^{-1}인) iid 분포를 따르되 지수분포가 아닌 일반(general)분포인 경우가 GI/M/1/m/m 시스템이고, 얼랑손실 시스템에서 서비스시간이(평균이 λ^{-1}인) iid 분포를 따르되 지수분포가 아닌 일반분포인 경우가 M/G/m/m 시스템이다.

Kimura[10]가 수학적으로 증명한 이들 시스템 간의 쌍대관계를 [그림 3]으로 간단히 설명한다. 노드1에서 서비스를 받은 고객은 노드 2로 가는데, 노드2에는 서버가 충분히 많아서 기다리지 않고 바로 서비스를 받기 시작하므로 이 고객이 노드 1을 떠난 후 다시 노드 1에 도착할 때까지의 시간은 노드 2의 서비스시간과 같다. 따라서, 노드 2의 서비스시간이 평균이 λ^{-1}인 iid 일반분포를 따른다고 하면 이는 수리된 기계의 가동시간의 분포와 일치한다. 그리고, 노드 2에 고객이 도착하는 과정이 도착률이 μ인 포아송과정인 이유는 2.3절에서와 동일한데, 이는 GI/M/1/m/m 시스템의 이탈(departure)과정이 M/M/1/m/m 시스템의 이탈과정과 최소한 바쁜기간 동안에는 같기 때문이다.

한 가지 유의할 점은 다음과 같다. M/G/m/m 시스템에서 서비스를 받고 떠나는 고객과 차단되어서 서비스를 받지 못하고 떠나는 고객을 합친 이탈과정은 안정상태에서 포아송과정이라고 알려져 있다. 그러나, 서비스를 받고 떠나는 고객만 고려하면 이탈과정이 포아송과정이 아니므로 노드 1의 도착과정도 포아송과정과 무관하다.

4. M/G/1/m/m 시스템과 GI/M/m/m 시스템

4.1 시스템의 정의와 기존연구의 요약

기계수리 시스템에서 수리시간이(평균이 μ^{-1}인) iid 분포를 따르되 지수분포가 아닌 일반분포를 따르는 경우가 M/G/1/m/m 시스템이고, 얼랑손실시스템에서 고객들의 도착간시간이(평균이 μ^{-1}인) iid 분포를 따르되 지수분포가 아닌 일반분포를 따르는 경우가 GI/M/m/m 시스템이다.

결과부터 언급하면 다음과 같다. 폐쇄형네트워크로 표현했을 때, M/G/1/m/m 시스템의 $N(t)$와 GI/M/m/m 시스템의 $M(t)$간에 "$M(t) = m - N(t),\ t \geq 0$"관계는 성립하지 않는다. 그렇지만, 이들 시스템을 특별한 내재(embedded) 시점 $\tau_1, \tau_2, \cdots$에 관찰하면 "$M(\tau_i) = m - N(\tau_i),\ i = 1, 2, \cdots$" 관계가 성립한다(4.2절과 7절 참조). 또한, GI/M/m/m 시스템의 도착과정을 약간 변형시킨 $\widetilde{GI}$/M/m/m 시스템의 고객수를 $\widetilde{M(t)}$라 하면 "$\widetilde{M(t)} = m - N(t),\ t \geq 0$" 관계가 성립한다(4.3절 참조). 전자의 경우에 대해서는 Kimura[10]가 Takács의 책[15]을 인용하였으며, 후자의 경우는 (저자가 알기로는) 본 연구에서 처음으로 소개되는 내용이다.

흥미로운 점은 Takács의 책[15]이 Prabhu의 책[14]보다 3년 먼저 출판되었으나 쌍대관계라는 용어를 사용하지 않았기 때문에 Takács의 책 대신에 Prabhu의 책이 대기행렬의 쌍대관계에 대한 원조문헌으로 꼽히고 있다는 점이다.

4.2 M/G/1/m+1/m+1 시스템과 GI/M/m/m 시스템의 쌍대관계

Takács[15]가 발견한 쌍대관계에 대한 해석은 다음과 같다. [그림 3]에서 노드 1은 M/G/1/m+1/m+1 시스템이고 노드 2는 GI/M/m/m 시스템이라 하자. 그리고, 총 m명이 아니라 "m+1"명의 고객이 두 시스템을 교대로 방문한다고 하자. 단, 노드 1을 이탈한 고객이 노드 2에서 차단되는 경우에는 노드 2에서의 서비스를 포기하고 다시 노드 1으로 간다고 가정한다.

두 시스템의 고객수를 관찰하는 내재점은 고객들이 노드 1을 떠난 직후이면서 노드 2에 도착하기 직전인 시점으로 정의한다. (비고 : 두 시스템을 별개로 분석할 때에 사용하는 내재점 역시 전자는 이탈(직후)시점이고 후자는 도착(직전)시점임.) 그러면, 어느 내재점에 노드 1에 있는 고객수가 N일 때 노드 2에 있는 고객수는 " $m-N$"인데, 그 이유는 노드 1을 떠났지만 아직 노드 2에 도착하지 않은 고객이 제외되었기 때문이다.

이러한 폐쇄형네트워크의 특징은 노드 1의 서버에게는 유휴기간이 없이 바쁜기간만 지속된다는 점인데, 그 이유는 다음과 같다. 총 " $m+1$"명의 고객 중에서 1명은 노드 1에 그리고 m명은 노드 2에 있다고 하자. 만약, 노드 1의 서비스가 끝나기 전에 노드 2에서 진행중인 m개의 서비스 중에서 하나가 먼저 끝난다면 노드 1의 바쁜기간은 계속된다. 반면에, 노드 1에 1명 있는 고객의 서비스가 먼저 끝나는 경우에는 이 고객은 노드 2에서 차단되기 때문에 다시 노드 1으로 간다. 따라서, 노드 1의 서버의 관점으로는 바쁜기간이 하나 끝나더라도 이후 유휴기간을 거치지 않고 바로 다음 바쁜기간이 시작되는 것이다(비고 : 노드 1은 순수한 M/G/1/m+1/m+1 시스템이 아니라 남겨진 고객수가 0이 되면 이탈 고객이 다시 서비스를 받아야 하는 특이한 시스템임).

노드 1의 서버가 항상 바쁘기 때문에 iid 일반분포를 따르는 노드 1의 서비스시간이 동일한 iid 일반분포를 따르는 노드 2의 도착간시간과 일치한다.

4.3 M/G/1/m/m 시스템과 $\widetilde{GI}$/M/m/m 시스템의 쌍대관계

[그림 3]에서 노드 1은 M/G/1/m/m 시스템이라 하고, 원래의 가정대로 총 m명의 고객이 노드 1과 노드 2를 교대로 방문한다고 하자. 노드 1 서버의 바쁜기간 동안에는 iid 일반분포를 따르는 노드 1의 서비스시간이 동일한 iid 일반분포를 따르는 노드 2의 도착간시간이 된다. 따라서, 노드 1의 서버가 바쁜 동안에는 노드 2의 도착과정을 "GI"로 표현할 수 있다. 그러나, 노드 1의 서버의 유휴기간 동안에는 노드 2의 도착과정이 달라지기 때문에 두 경우의 도착과정을 합친것을 " $\widetilde{GI}$ "로 표현하기로 하자. 구체적으로, 노드 2에 "m-1"명의 고객이 있을 때 추가로 1명이 도착해서 m명이 되는 시점으로부터 다음 고객이 도착될 때까지 걸리는 시간은 서로 독립인 두 확률변수의 합인데, 첫째는 노드 2에서 진행중인 m개의 서비스 중에서 하나가 끝날 때까지 걸리는 시간으로서 평균이 $(m\lambda)^{-1}$인 지수분포를 따르고, 둘째는 노드 1의 서비스시간이다(비고 : 노드 2에 m명이 있을 때 노드 1에는 0명이 있으므로 노드 2의 m명 중 1명이 노드 1에 가면 이 고객은 기다리지 않고 바로 서비스를 받기 시작한다). (비고 : GI/M/m/m 시스템에서는 고객수가 m명이 되는 시점에서 다음 도착까지의 도착간격이 "지수분포시간+G분포시간"이 아니라 "지수분포시간+G분포의 잔여서비스시간"이다.)

5. $G_1/G_2/1/K/N$ 정책 시스템과 $\widetilde{G_2}/\widetilde{G_1}/1/K/F$ 정책 시스템의 쌍대관계

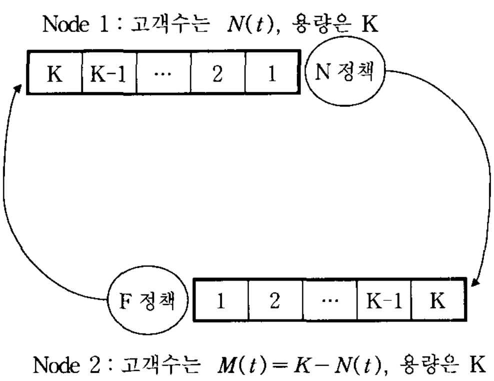
5.1 쌍대관계에 대한 일반적 논의

2~4절에 걸쳐서 논의한 기계수리 시스템과 얼

량손실 시스템 간의 쌍대관계에 비해서 적용범위가 훨씬 넓은 쌍대관계가 G_1/G_2/1/K/N 정책 시스템과 $\widetilde{G}_2/\widetilde{G}_1$/1/K/F 정책 시스템의 쌍대관계이다[8]. 이 쌍대관계를 본 절에서 일반적인 틀 안에서 개략적으로 논의한 다음 5.2절에서는 특수한 경우들에 대해서 구체적으로 논의한다. 그리고, 5.3절에서는 기존연구와의 관계를 논의한다.

두 시스템의 공통점은 서버가 1명인 점과 용량이 K인 점이다. 그리고, 차이점은 일반분포를 따르는 도착간시간과 서비스시간이 서로 뒤바뀌(면서 4.3절에서와 같이 약간 변형되)는 점과, 한쪽은 N 정책이고 다른 쪽은 F 정책이라는 점이다.

[그림 4]에서 N 정책 시스템을 노드 1이라 하고 F 정책 시스템을 노드 2라 하자. N 정책은 다음과 같이 시행한다[1]. 노드 1 서버의 바쁜기간이 끝나고 유휴기간이 시작되면 서버는 서비스를 중단했다가 도착한 고객수가 N이 되는 순간 (N ≤K) 다시 서비스를 개시하여 다음 바쁜기간이 시작된다. 그리고, 이 바쁜기간은 시스템 내의 고객수가 0이 될 때까지 지속된다. 반면에, 비교적 생소한 F 정책은 다음과 같이 시행한다[8]. 노드 2에 "K - 1"명의 고객이 있을 때 추가로 1명이 도착해서 용량이 꽉차는 순간부터(서비스는 계속 제공하되) 이후 고객수가 F명이 될 때까지(F ≤K-1) 더 이상의 고객



[그림 4] G_1/G_2/1/K/N 정책 시스템과 $\widetilde{G}_2/\widetilde{G}_1$/1/K/F 정책 시스템의 폐쇄형네트워크 관계

을 받아들이지 않는다. 즉, 고객수가 K명이 되는 순간부터 "K-F"명이 서비스받고 나갈 때까지 도착하는 고객을 차단하는 것이다.

노드 1과 노드 2간의 쌍대관계는 다음과 같다. 첫째, "N = K-F"관계가 성립한다. 둘째로, [그림 4]의 폐쇄형네트워크에서 총 K명의 고객이 두 개의 노드를 교대로 방문한다고 하면 노드 1의 고객수 $N(t)$와 노드 2의 고객수 $M(t)$ 간에는" $M(t) = K - N(t)$" 관계가 성립한다.

$N(t)$가 1 이상이고 "K - 1"이하인 동안에는 두 노드의 서버가 모두 바쁘다. 그러다가, $N(t)$가 0이 되고 $M(t)$가 K가 되는 순간 N 정책과 F 정책이 동시에 발효된다. 이후 $M(t)$가 F명이 될 때까지 노드 2는 고객을 받아들이지 않은 채 서비스만 계속 제공하여 "K - F"명을 내보내는데 이동안 노드 1의 서버는 서비스를 중단한채 "N = K - F"명이 도착할 때까지 기다리는 것이다. 그리고는 발효되었던 N 정책과 F 정책을 중단하는데 이때 노드 1에서는 바쁜기간이 시작되고 노드 2에서는 바쁜기간이 계속된다.

5.2 특수한 경우에 대한 구체적 논의

Karaesmen & Gupta[8]는 G_1/G_2/1/K/N 정책 시스템과 $\widetilde{G}_2/\widetilde{G}_1$/1/K/F 정책 시스템의 쌍대관계에 대한 예제로 다음의 두 가지를 들었다.

첫째는 M/G/1/K/N 정책 시스템과 $\widetilde{GI}$/M/1/K/F 정책 시스템의 쌍대관계인데, 이는 " $G_1 = \widetilde{G}_1 =$" M, $G_2 = G$, $\widetilde{G}_2 = \widetilde{GI}$ 인 특수한 경우이다. $\widetilde{G}_2$를 GI 대신에 $\widetilde{GI}$ 로 표현하는 이유는 4.3절에서와 유사하다. 노드 1 서버의 바쁜기간 동안에는 노드 2에 도착하는 고객들의 도착간시간이 노드 1의 서비스시간과 일치하므로 이는 iid 일반분포를 따른다. 그러나, 노드 2에 "K - 1"명이 있을 때 추가로 1명 도착해서 용량이 꽉차는 순간부터 다시 1명 도착할 때까지 걸리는 시간은 노드 1의 서비스 시간이 아니라 두 개의 확률변수의 합인데, 첫째는 노드 2

에서 고객 N명을 서비스하는데 걸리는 시간으로써 이는 평균이 "N/λ"이고 분산이 "N/λ^2"인 얼랑 분포를 따르며, 둘째는 노드 1의 서비스시간이다. 반면에, "G_1= M"일 때 $\widetilde{G}_1$ 역시 M이 되는데, 이는 지수분포의 무기억속성에 기인한 것이다.

둘째는 $\widetilde{GI}$/M/1/K/N 정책 시스템과 M/G/1/K/F 정책 시스템의 쌍대관계인데, 이는 "$G_1 = \widetilde{GI}$, $\widetilde{G}_1 = G$, $G_2 = \widetilde{G}_2$ = M"인 특수한 경우이다. G_1을 GI 대신에 $\widetilde{GI}$로 표현하는 이유는 다음과 같다. 노드 2 서버의 바쁜기간 동안에는 노드 1에 도착하는 고객들의 도착간시간이 노드 2의 서비스시간과 일치하므로 이는 iid 일반분포를 따른다. 그러나, 노드 1에 "K - 1"명이 있을 때 추가로 1명 도착해서 용량이 꽉차는 순간부터 다시 1명이 도착할 때까지 걸리는 시간은 두 개의 확률변수의 합인데, 첫째는 노드 1의 서비스시간이고 둘째는 노드 2의 서비스시간이다. 반면에, "G_2 = M"일 때 $\widetilde{G}_2$ 역시 M이 되는 이유는 앞의 예에서와 같이 지수분포의 무기억속성에 기인한 것이다.

미처 언급하지 않았지만 2~4절에서 논한 쌍대관계에서도 도착과정이 M인 시스템의 쌍대시스템의 서비스과정은 $\widetilde{\mathrm{M}}$이 아니라 M이었는데, 이 역시 지수분포의 무기억속성에 기인한 것이다.

5.3 기존연구와의 관계

5.1절에서 G_1/G_2/1/K/N 정책 시스템과 $\widetilde{G}_2/\widetilde{G}_1$/1/K/F 정책 시스템의 쌍대관계는 적용범위가 넓다고 했는데, 사실상 이 관계가 기존의 연구를 거의 다 포함한다고 해도 과언이 아니다.

첫째, Karaesmen & Gupta[8]의 문헌목록에는 Gupta 자신이 1993~1995년에 발표한 7편의 논문이 수록되어 있는데 이러한 일련의 연구결과를 포괄하는 논문이 바로[8]인 것이다.

둘째로, Hlynka & Wang[6]이 밝힌 G_1/G_2/1/K 시스템과 $\widetilde{G}_2/\widetilde{G}_1$/1/K 시스템간의 쌍대관계는 N 정책에서 "N = 1"이고 F 정책에서 "F = K - 1"인 특수한 경우로 간주할 수 있다. 참고로, GI/M/1/K 시스템과 M/$\widetilde{G}$/1/K 시스템간의 쌍대관계는 Gouweleeuw [5]가 밝혔는데, 여기서 "$\widetilde{G}$"는 바쁜기간에 처리하는 고객 중에서 첫고객이 예외적인 서비스를 받는 시스템을 의미한다[1].

셋째로, 시스템의 용량 K가 ∞인 특수한 경우는 Niu & Cooper[13]가 발표한 쌍대관계와 일치한다고 할 수 있는데, 이 경우에 유의할 점은 다음과 같다. 총 K명의 고객이 두 시스템을 교대로 방문하므로 "$N(t)+M(t)=K$"인데, K가 ∞이면 $N(t)$와 $M(t)$ 중 최소한 하나는 ∞이다. 따라서, 노드 1과 노드 2 중 최소한 하나는 불안정(unstable)한데, 이에 대한 논의는 6절에서 계속한다.

6. 쌍대관계의 본질 및 역사

본 연구에서는 대기행렬시스템간에 성립하는 쌍대관계를 [그림 3]과 [그림 4]의 폐쇄형네트워크로 설명하고 있는데, 이는 Karaesmen & Gupta[8]가 사용한 방법이다. 다른 방법으로는 Hlynka & Wang [6]이 사용한 역할교대(role inversion) 방법이 있기는 하지만 기타 대부분의 저자가 사용한 방법은 대기행렬시스템을 묘사하는 추계적과정(stochastic process)에 대한 시간역과정(time-reversed process)을 활용하는 방법이다.

서론에서 제기한 질문에 대한 저자의 견해는 다음과 같다. 첫째로, 모든 대기행렬시스템에 대해서 이와 쌍대관계가 있는 대기행렬시스템이 존재하리라 사료된다. 폐쇄형네트워크 내에서 총 K명의 고객이 두 시스템 A와 B를 교대로 방문한다고 하자. 그리고, 시스템 A는 잘 정의된 대기행렬시스템이라고 하자. 그러면, B는 A에 대한 쌍대시스템이라는 것이 저자의 견해이다. 다만, 시스템 B가 잘 정의된 대기행렬시스템이 아닐 수도 있고 또는 응용가능성이 희박할 수도 있을 따름이다.

아울러, 앞에서 쌍대관계를 설명하는 방법으로

세 가지를 들었는데, 이들도 본질적으로는 모두 동일한 방법이라는 점이 저자의 견해이다. Hlynka & Wang[6]의 역할교대 방법에서는 실질(real)고객 대신에 가상(virtual)고객을 따지는데, 시스템 A의 대기장소 K개 중에서 실질고객이 있는(없는) 자리에 가상고객이 없다(있다)고 하는 것이니까 결국 시스템 A에 있는(없는) 고객을 시스템 B에 없다(있다)고 하는 것과 마찬가지이다. 그리고, 실질고객은 시스템 A의 입구로 들어와서 출구로 나가는 반면에 가상고객은 시스템 A의 출구로 들어와서 입구로 나간다고 하는데 이는 사실상 시스템 A(를 묘사하는 추계적과정)에 대한 시간역과정을 따지는 것과 같으며 결국 이는 쌍대관계에 있는 시스템 B의 추계적과정을 따지는 셈이된다.

Hlynka & Wang[6]의 방법도 궁극적으로는 시간역과정을 활용하는 방법인데도 이를 별도로 분류하는 이유는 다음과 같다. Hlynka & Wang[6] 이전에는 시스템의 용량 K가 ∞인 경우에 대한 연구가 주종을 이루었다. 앞절에서 언급했듯이, K가 ∞인 경우에는 잘 정의된 시스템 A에 대해서 쌍대관계에 있는 시스템 B는 불안정하다. 즉, 시스템 B의 안정상태 고객수는 ∞이거나 또는 안정상태라는 것을 정의할 수 없다[1]. 따라서, 시스템 A의 시간역과정으로 시스템 B를 묘사하기는 했으나 이를 실감나게 설명하기 위해서 가시적인 가상고객을 동원할 수는 없었던 것이다.

두 번째 질문에 대한 저자의 견해는 다음과 같다. 먼저, 대기행렬시스템의 쌍대관계에 대한 원조문헌이 논문이 아니라 책인 이유는 다음과 같다. 원조문헌으로 Prabhu의 책[14]을 인용할 때 (1년 먼저 초판이 출판된) Feller의 책[3]을 함께 인용하는 논문도 있다[6]. 그런데, Feller[3]에 의하면 쌍대관계라는 용어는 1차원 랜덤보행과정(random walk process)의 특수한 속성을 표현할 때 이미 쓰이고 있었다. 그러므로, Prabhu[14]가 M/G/1 시스템의 대기시간 분포를 활용하여 GI/M/1 시스템의 대기시간 분포를 구하면서 사용한 쌍대관계라는 용어는 대기행렬 이론의 용어라기보다 랜덤보행과정(을 특수한 경우로 포함하는 추계적과정)의 용어라고 할 수 있는데, 이를 뒷받침하는 근거는 다음과 같다. 첫째, Prabhu가 활용한 것은 M/G/1 시스템의 고객수 분포가 아니라 대기시간의 분포이며, 대기시간의 분포는 랜덤보행과정과 밀접한 관계가 있다(이호우[1] 11장의 Lindley 방정식 참조). 둘째로, Prabhu의 책보다 3년 먼저 출판된 Takács의 책[15]에 GI/M/m/m 시스템의 고객수 분포를 활용하여 M/G/1/m+1/m+1 시스템의 고객수 분포를 얻는 방법이 있으나(4.1절 참고), 이는 랜덤보행과정의 쌍대관계와 직접적인 관계가 없어서인지 쌍대관계라는 용어를 사용하지 않았다. 그리고, GI/M/1 시스템의 대기시간 분포를 M/G/1 시스템의 대기시간으로부터 얻을 수 있다는 사실을 발견한 정도의 업적이나 GI/M/m/m 시스템의 고객수 분포로부터 M/G/1/m+1/m+1 시스템의 고객수 분포를 얻는 정도의 업적은 논문감이라기보다 책에 실을만한 주제라고 여겼을 가능성이 크다.

다음, Prabhu 이후 약 25년간 쌍대관계에 대한 연구가 뜸했던 이유에 대한 저자의 견해는 다음과 같다. Prabhu의 책을 인용할 때 Kleinrock의 책[11]을 함께 인용하는 논문도 있다[5]. Kleinrock은 쌍대관계라는 용어를 사용하면서 Feller의 책[3]을 인용했으며 또한 고객수의 분포가 아니라 대기시간의 분포를 얻을 때 쌍대관계를 활용했으므로 이 경우 역시 대기행렬 이론의 용어라기보다 추계적과정의 용어라 할 수 있다. 그러나, Kleinrock의 책이 출판된 1970년대 중반에는 이미 대기행렬 이론이 하나의 고유분야로 틀이 잡혔으며 또한 최근까지도 애용되는 이 책이 끼친 영향에 의해서 Kleinrock이 사용한 쌍대관계라는 용어가 서서히 대기행렬 이론의 용어로 바뀌게 된다.

이후 1980년대 말에 와서 Niu & Cooper[12]가 논문제목에 쌍대관계라는 용어를 처음으로(저명한 학술지 중에서는 처음이라 할 수 있음) 사용했는데, 이들의 업적은 쌍대관계를 대기행렬 이론의 고유한 개념으로 정착시킨 것이다. 그리고는 1990년대 이후에 쌍대관계에 관한 논문이 많이 나오고 있는

데[2, 5, 6, 8, 10, 13], 관심사가 대기시간으로부터 고객수로 옮겨지는 점이 특징이다.

7. 음고객 관련 내재점 쌍대관계

7.1 내재점 쌍대관계

음고객 관련 내재점 쌍대관계 두 가지를 (7.2절과 7.3절에서) 제시하기에 앞서서 편의상 쌍대관계의 정의를 다음과 같이 새로 내린다. 시스템 A의 고객수분포를 얻으면 자동적으로 시스템 B의 고객수분포도 얻어지는 경우 A와 B의 관계를 쌍대관계라 하자. 이러한 관계는 6절에서 논한 쌍대관계의 본질과 부합하지 않을 수도 있지만, 그렇더라도 이론적인 가치만 떨어질 뿐 실용적인 가치는 여전하다(이렇게 새로 정의한 쌍대관계도 폐쇄형네트워크로 설명할 수 있음을 7.4절에서 보인다).

2절에서 다룬 쌍대관계는 교과서 수준이라고 서론에서 언급했는데, 그 이유는 [그림 1]과 [그림 2]의 비교만으로 두 시스템간의 쌍대관계를 쉽게 파악할 수 있기 때문이다. 물론 이 경우 [그림 1]로부터 고객수분포를 얻으면 [그림 2]에 대한 고객수분포도 자동적으로 얻는다. 이제 교과서 수준의 또 다른 쌍대관계를 소개한다.

M/G/1/K+1 시스템에서 서비스받은 고객이 이탈한 직후의 시점 τ_i를($i=1,2,\cdots$) 내재점으로 사용하고 이때 시스템에 남아 있는 고객수를 $N(\tau_i)$라 하면, $\{N(\tau_i),\ i\geq 1\}$은 이산시간 마코프연쇄이고 상태전이행렬은 [그림 5]와 같다[1]. [그림 5]에서 a_i는 서비스시간 S동안에 i명의 고객이 도착할 확률이고($i\geq 0$), a_i'은 S 시간 동안에 i명 이상이 도착할 확률이다.

또한, GI/M/1/K 시스템에서 고객이 도착하기 직전 시점 τ_i를($i\geq 0$) 내재점으로 정의하고, 이때 시스템에 있는 고객수를 $M(\tau_i)$라 하면 $\{M(\tau_i),\ i\geq 1\}$은 이산시간 마코프연쇄이고 상태전이행렬은 [그림 6]과 같다[1]. [그림 6]에서 s_i는 고객의 도착간시간 A 동안 서버가 고객 i명을 서비스해서 이탈시킬 확률이고, s_i'은 A시간 동안 서버가 i명을 이탈시키고도 시간이 남을 확률이다.

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{K-2} & a_{K-1} & a_K' \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{K-2} & a_{K-1} & a_K' \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{K-3} & a_{K-2} & a_{K-1}' \\ & & & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_0 & a_1 & a_2' \\ & & & & & a_0 & a_1' \end{bmatrix}$$

[그림 5] M/G/1/K+1 시스템의 내재점 마코프연쇄의 상태전이행렬

$$\begin{bmatrix} s_1' & s_0 & & & & & \\ s_2' & s_1 & s_0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & & \\ s_{K-1}' & s_{K-2} & s_{K-3} & \cdots & s_1 & s_0 & \\ s_K' & s_{K-1} & s_{K-2} & \cdots & s_2 & s_1 & s_0 \\ s_K' & s_{K-1} & s_{K-2} & \cdots & s_2 & s_1 & s_0 \end{bmatrix}$$

[그림 6] GI/M/1/K 시스템의 내재점 마코프연쇄의 상태전이행렬

[그림 5]와 [그림 6]을 비교하면 다음을 쉽게 파악할 수 있다. [그림 5]의 a_i와 a_i'을 각각 s_i와 s_i'으로 대체하고 상태(state)를 역순으로 뒤집으면 [그림 6]을 얻는다. 따라서, M/G/1/K+1 시스템에서 고객이 서비스받고 이탈한 직후에 남아있는 고객수의 안정상태 확률분포에서 a_i와 a_i'을 각각 s_i와 s_i'으로 대체하면 자동적으로 GI/M/1/K 시스템에서 고객이 도착하기 직전에 남아있는 빈자리의 수(즉, K에서 고객수를 뺀값)가 되는 것이다.

참고로, Gouweleeuw[5]도 이와 같은 비교를 했으나, [그림 5]에 대응하는 그림으로써 [그림 6] 대신 GI/M/1/K+1 시스템의 상태전이행렬을 사용했기 때문에 두 그림의 비교만으로 대응관계를 파악

하기는 상대적으로 어렵다.

7.2 M/G/1/K+1/N 정책 시스템과 GI/M/1/K/음고객 시스템의 내재점 쌍대관계

5.2절에서 M/G/1/K/N 정책 시스템과 쌍대관계에 있는 시스템은 $\widetilde{GI}$/M/1/K/F 정책 시스템이라고 했다. 그러나, M/G/1/K+1/N 정책 시스템을 서비스받은 고객이 이탈한 직후에 관찰하면 이와 내재점 쌍대관계가 있는 시스템은 GI/M/1/K/음고객 시스템이 됨을 보인다.

M/G/1/K+1/N 정책 시스템의 이탈(직후) 시점내재 마코프연쇄의 상태전이행렬은 [그림 7]과 같다. 그리고, [그림 7]의 a_i와 a_i'에 대한 정의는 [그림 5]에서와 같다.

$$\begin{bmatrix}
 & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{K-N-1} & a_{K-N} & a'_{K-N+1} \\
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N & \cdots & a_{K-2} & a_{K-1} & a'_K \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} & \cdots & a_{K-3} & a_{K-2} & a'_{K-1} \\
 & & a_0 & \cdots & a_{N-3} & a_{N-2} & \cdots & a_{K-4} & a_{K-3} & a'_{K-2} \\
 & & & \cdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & a_0 & a_1 & a'_2 \\
 & & & & & & & & a_0 & a'_1
\end{bmatrix}$$

[그림 7] M/G/1/K+1/N 정책 시스템의 내재점 마코프연쇄의 상태전이행렬

[그림 7]을 [그림 5]와 비교하면 첫번 행(row)만 다르고 나머지 부분은 같은데, 첫 행이 달라진 이유는 N 정책 때문이다. 서비스받고 이탈하는 고객이 0명을 남겨서 유휴기간이 시작되었다고 하자. 그러면, 그 다음에 서비스받고 이탈하는 고객은 바쁜기간 시작시의 N명 중에서 제일 먼저 서비스를 받은 고객이다. 이 고객이 서비스를 받는 동안에 n명이 도착했다고 하자($n \geq 0$). " $n \leq (K+1)-$ $-N$"인 경우에는 이들 n명은 차단되지 않고 모두 입장하므로 이탈시에 남기는 고객수는 N명 중에서 뒤에 남는 "N - 1"명과 새로 도착한 n명의 합이다. 그리고, " $n > (K+1)-N$"인 경우에는 이들 n명 중에서 " $(K+1)-N$"명만 입장하고 나머지는 차단되는데, 이 경우 이탈시에 남기는 고객수는 K명이다.

[그림 7]의 a_i와 a_i'을 각각 [그림 6]에서 정의한 s_i와 s_i'으로 대체하고, 상태를 역순으로 뒤집으면 [그림 8]을 얻는다.

$$\begin{bmatrix}
s'_1 & s_0 & & & & & & & & \\
s'_2 & s_1 & s_0 & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & & & & & \\
s'_{K-2} & s_{K-3} & s_{K-4} & \cdots & s_{N-2} & s_{N-3} & \cdots & s_0 & & \\
s'_{K-1} & s_{K-2} & s_{K-3} & \cdots & s_{N-1} & s_{N-2} & \cdots & s_1 & s_0 & \\
s'_K & s_{K-1} & s_{K-2} & \cdots & s_N & s_{N-1} & \cdots & s_2 & s_1 & s_0 \\
s'_{K-N+1} & s_{K-N} & s_{K-N-1} & \cdots & s_1 & s_0 & & & &
\end{bmatrix}$$

[그림 8] GI/M/1/K/음고객 시스템의 내재점 마코프연쇄의 상태전이행렬

[그림 8]은 과연 어떤 시스템의 내재점 마코프연쇄의 상태전이행렬인가 알아보자. [그림 8]에서 마지막 행을 제외하면 [그림 6]에서 마지막 행을 제외한 부분과 일치한다. 따라서, 큰 틀은 GI/M/1/K 시스템일 것으로 짐작할 수 있는데, 예외 사항은 도착하는 고객이 보는 고객수가 K명일 때 발생한다. 도착하면서 K명을 보는 고객은 차단되는데 이때 이 고객은 음고객으로 돌변해서 "N - 1"명의 고객을 강제로 퇴장시킨다고 하자. 그러면, 시스템에 남아 있는 고객수는 "K - (N - 1)"으로 줄어든다. 다음 고객이 도착할 때까지 n명이 서비스를 받고 이탈했다고 하자, $0 \leq n \leq K-(N-1)$. 그러면, 다음 고객이 도착하면서 보는 고객수는 "{K - (N - 1)} - n"명이 된다. 그렇지만, 다음 고객이 도착할 때까지 "K - (N - 1)"명을 서비스하고도 시간이 남았다면 도착하면서 보는 고객수는 0명이 된다.

참고로, 음고객에 관한 최근 논문으로는 Yang & Chae[16]를 꼽을 수 있으며, 음고객 시스템의 대표적인 응용 사례는 예정되었던 작업의 취소 또는

기계의 고장으로 인한 작업의 중단이다.

7.3 휴가형 M/G/1/K+1 시스템의 내재점 쌍대시스템

휴가형 M/G/1/K+1 시스템에 대한 최근 연구결과로는 Frey & Takahashi[4]가 있다. 휴가형 시스템은 미리 정해진 정책에 따라서 고객이 있음에도 불구하고 서버가 서비스를 제공하지 않는 기간이 존재하는 시스템들을 통칭하는 용어이다[1]. 예를 들어, 7.2절에서 다룬 M/G/1/K+1/N 정책 시스템도 휴가형 M/G/1/K+1 시스템의 일종인데, 그 이유는 바쁜기간이 끝난 시점으로부터 고객이 N명 도착할 때까지 서비스를 제공하지 않기 때문이다.

7.2절에서 M/G/1/K+1/N 정책 시스템과 내재점 쌍대관계에 있는 시스템은 GI/M/1/K/음고객 시스템임을 보였는데, 여기서 음고객에 대한 정의는 다음과 같다. 도착하면서 K명을 보는 고객은 음고객으로 돌변해서 "N - 1"명의 고객을 강제로 퇴장시킨다. 이때 유의할 점은 다음과 같다. N정책의 정의상 N은 상수이다. 그리고, N은 유휴기간 동안에 도착하는 고객수로 해석할 수 있다.

휴가형 M/G/1/K+1 시스템에서 유휴기간 동안에 도착하는 고객수를 N이라 하면 N은 일반적으로 확률변수이고 (예외는 N 정책) 그 분포는 휴가정책에 따라 달라진다[1]. 결과부터 언급하면 다음과 같다. 휴가형 M/G/1/K+1 시스템의 쌍대시스템은 GI/M/1/K/음고객 시스템인데, 여기서 음고객에 대한 정의는 다음과 같다. 도착하면서 K명을 보는 고객은 음고객으로 돌변하는데 "N ≤K"인 경우에는 "N - 1"명을 강제로 퇴장시키고 "N >K"인 경우에는 K명 전원을 퇴장시킨다. (비고 : 휴가정책의 특수한 경우인 N 정책에서는 N이 확률변수가 아니라 상수인데 N의 값은 K 이하의 값으로 정함.)

이에 대한 설명은 다음과 같다. M/G/1/K+1/N 정책 시스템과 같이, 휴가형 M/G/1/K+1 시스템에서도 [그림 5]의 첫 행만 달라진다. 유휴기간 동안에 n명이 도착할 확률을 i_n이라 하고 n명 이상이 도착할 확률을 i_n'이라 하자. 즉, "$i_n = P(N = n)$"이고 "$i_n' = P(N \geq n)$"이다. 그러면, [그림 5]의 첫 행은 다음과 같이 달라진다.

$$\begin{aligned}&(i_1 a_0,\ i_2 a_0 + i_1 a_1,\ i_3 a_0 + i_2 a_1 + i_1 a_2,\\ &\cdots,\ i_K a_0 + i_{K-1} a_1 + \cdots + i_1 a_{K-1},\\ &i_{K+1}' a_0' + i_K a_1' + \cdots + i_1 a_K')\end{aligned}$$

따라서, 휴가형 M/G/1/K+1 시스템과 내재점 쌍대관계에 있는 시스템의 도착(직전)시점 내재 마코프연쇄의 상태전이행렬이 [그림 6]과 달라지는 부분인 마지막 행은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(i_{K+1}' s_0' + i_K s_1' + \cdots + i_1 s_K',\\ &i_K s_0 + i_{K-1} s_1 + \cdots + i_1 s_{K-1},\ \cdots,\\ &i_3 s_0 + i_2 s_1 + i_1 s_0,\ i_2 s_0 + i_1 s_1,\ i_1 s_0)\end{aligned}$$

[그림 6]에서 마지막 행만 위와 같이 달라졌으므로, 도착하는 고객이 "K - 1"명 이하를 보는 경우에 대해서는 GI/M/1/K 시스템과 동일하다. 그리고, 도착하는 고객이 K명을 보는 경우에 대해서는 다음과 같이 설명할 수 있다. 도착시에 K명을 본 고객은 차단되는데 7.2절에서와 유사하게 이 고객은 음고객으로 돌변해서 고객들을 강제로 이탈시킨다. 그렇지만, 음고객의 종류가 달라서 이번에는 고정된 수의 고객을 이탈시키지 않고 i_n의 확률로 "n - 1"명의 고객을 이탈시킨다. 그리고, i_n'의 의미는 다음과 같다. 고객을 n명 이상 이탈시킬 수 있었으나 고객의 수가 부족해서 "n - 1"명만 이탈시키게 되는 확률이 i_n'이다.

7.4 폐쇄형네트워크 관점의 내재점 쌍대관계

7절에서 내재점 쌍대관계를 본격적으로 논의하기 전에 4.2절에서도 내재점 쌍대관계를 거론했다. 4.2절에서도 M/G/1/m+1/m+1 시스템(노드 1)은 서비스받은 고객이 이탈한 직후에 관찰하고 GI/M/m/m 시스템(노드 2)은 고객이 도착하기 직전에 관

찰했다. 그렇지만, 이들 시스템간의 내재점 쌍대관계는 상태전이행렬로 설명하지 않고 다음과 같은 폐쇄형네트워크로 설명했다. 총 "m+1"명의 고객이 두 시스템을 교대로 방문하는데, 노드 1을 이탈한 고객이 노드 2에서 차단되는 경우에는 노드 2에서의 서비스를 포기하고 다시 노드 1으로 간다고 가정했다. 그리고, 이러한 폐쇄형네트워크의 특징은 노드 1의 서버에게는 유휴기간이 없이 바쁜기간만 지속된다고 했다.

휴가형 M/G/1/K+1 시스템(노드 1)과 GI/M/1/K/음고객 시스템(노드 2)간의 내재점 쌍대관계 역시 다음과 같은 폐쇄형네트워크로 설명할 수 있다. 총 "K+1"명의 고객이 두 시스템을 교대로 방문하는데, 노드 1을 이탈한 고객이 노드 2에서 차단되는 경우에는 노드 2에서의 서비스를 포기하고 다시 노드 1으로 간다는 점은 4.2절의 가정과 같다. 그러나, 차이점은 다음과 같다. 노드 2에서 차단된 고객이 혼자서 노드 1으로 가지 않고 노드 2에 있는 고객 중 일부 또는 전체를 데리고 함께 노드 1으로 간다는 점이다. 예를 들어, 휴가정책의 일종인 N 정책에서는 정확히 "N-1"명을 데리고 함께 노드 1으로 간다. 이러한 폐쇄형네트워크의 특징 역시 노드 1의 서버에게는 유휴기간이 없이 바쁜 기간만 지속된다는 점인데, 물론 하나의 바쁜기간이 끝나고 새로운 바쁜기간이 시작되는 재생성 주기는 존재한다.

8. 결론 및 추후 연구

본 연구에서는 대기행렬시스템간의 쌍대관계에 대한 기존의 연구결과를 폐쇄형네트워크 관점으로 일관성있게 해석하였으며 또한 내재점 마코프연쇄의 상태전이행렬을 사용하여 음고객과 관련된 새로운 쌍대관계를 제시하였다.

아울러 쌍대관계의 본질과 역사에 대한 저자의 견해를 피력하였다. 어떤 잘 정의된 시스템 A가 있으면 이와 쌍대관계에 있는 시스템 B가 반드시 존재한다는 것이 6절에서 피력한 저자의 견해이다. 다만, 시스템 B는 잘 정의된 대기행렬시스템이 아닐 수도 있고 또는 응용 가능성이 희박한 시스템일 수도 있을 따름이다.

잘 정의된 시스템 A에 대한 성능척도가 알려져 있으면 이를 사용하여 시스템 B의 성능척도를 쉽게 얻을 수 있다. 그리고, 시스템 B를 잘 이해하면 이로부터 시스템 A에 대해서 미처 알려지지 않았던 속성을 규명할 수도 있다. 예를 들어, GI/M/1/K/N 정책 시스템과 휴가형 M/G/1/K+1 시스템에 대해서 최근에 발표된 분석결과[4, 9]는 이들 시스템과 각각 쌍대관계에 있는 M/$\widetilde{G}$/1/K/F 정책 시스템과 GI/M/1/K/음고객 시스템의 분석에 활용할 수 있을 것이다.

추후 연구과제는 새로운 쌍대관계를 발굴하여 활용하는 것이다. 특히 시스템의 용량이 유한한 경우에는 두 시스템이 모두 안정적이므로(5.3절과 6절 참조) 원시스템 뿐만 아니라 쌍대시스템도 의미가 있는 시스템일 가능성이 크다. 예를 들어, 휴가형 GI/M/1/K 시스템에 대한 분석결과는 최근에 발표되었으나[7] 이 시스템의 쌍대시스템은 아직 발굴되지 않았다.

참 고 문 헌

[1] 이호우, 「대기행렬이론」, 개정판, 시그마프레스, 1998.

[2] Asmussen, S. and V. Ramaswani, "Probabilistic Interpretations of Some Duality Results for the Matrix Paradigms in Queueing Theory," *Stochastic Models*, Vol.6, No.4 (1990), pp.715-733.

[3] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol.2(second edition)(1971), Wiley, New York.

[4] Frey, A. and Y. Takahashi, "A Note on an M/G/1/N Queue with Vacation Time and Exhaustive Service Discipline," *Operations Research Letters*, Vol.21(1997), pp.95-100.

[5] Gouweleeuw, F.N., "The Loss Probability in an Overloaded Queue Using the Dual Queue," *Operations Research Letters*, Vol. 21(1997), pp.101-106.

[6] Hlynka, M. and T. Wang, "Comments on Duality of Queues with Finite Buffer Size," *Operations Research Letters*, Vol.14(1993), pp.29-33.

[7] Karaesmen, F. and S.M. Gupta, "The Finite Capacity GI/M/1 Queue with Server Vacations," *J. of the Operational Research Society*, Vol.47(1996), pp.817-828.

[8] Karaesmen, F. and S.M. Gupta, "Duality Relations for Queues with Arrival and Service Control," *Computers and Operations Research*, Vol.24, No.6(1997), pp.529-538.

[9] Ke, J.C. and K.H. Wang, "A Recursive Method for the N Policy G/M/1 Queueing System with Finite Capacity," *European J. of Operational Research*, Vol.142(2002), pp. 577-594.

[10] Kimura, T., "Duality between the Erlang Loss System and a Finite Source Queue," *Operations Research Letters*, Vol.13(1993), pp.169-173.

[11] Kleinrock, L., *Queueing Systems*, Theory, Wiley, New York, Vol.1(1975).

[12] Niu, S.C. and R.B. Cooper, "Duality and Other Results for M/G/1 and GI/M/1 Queues, via a New Ballot Theorem," *Mathematics of Operations Research*, Vol.14, No.2(1989), pp.281-293.

[13] Niu, S.C. and R.B. Cooper, "A Duality Relation for Busy Cycles in GI/G/1 Queues," *Queueing Systems*, Vol.8(1991), pp.203-209.

[14] Prabhu, N.U., *Queues and Inventories* : A Study of Their Basic Stochastic Processes, Wiley, New York, 1965.

[15] Takács, L. *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, New York, 1962.

[16] Yang, W.S. and K.C. Chae, "A Note on the GI/M/1 Queue with Poisson Negative Arrivals," *J. of Applied Probability*, Vol. 38, No.4(2001), pp.1081-1085.