韓國經營科學會誌
第28卷 第1號
2003年　3月

1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오 가중치의 탐색에 관한 연구*

류 춘 호**

An Algorithm to Optimize Portfolio Weights for the First Degree Stochastic Dominance*

Choonho Ryu**

■ Abstract ■

Unlike the mean-variance approach, the stochastic dominance approach is to form a portfolio that first-degree stochastically dominates a predetermined benchmark portfolio, e.g. KOSPI. Analytically defining the first derivative of the objective function, an optimal algorithm of nonlinear programming was developed to search a set of optimal weights systematically and tested with promising results against real data sets from Korean stock market.

Keyword : Stochastic Dominance, Portfolio Selection, Nonlinear Programming

1. 서 론

투자자들은 높은 수익과 낮은 위험을 갖는 투자를 원하고, 이러한 노력의 일환으로 합리적인 투자자들은 한 종류의 자산에만 투자하기보다는 여러 종류의 자산에 분산투자함으로써 투자에 따른 위험을 감소시키려고 한다. 문제는 어떻게 분산투자하는 것이 가장 바람직한 투자인가를 찾아내는 일(포트폴리오 선택문제)인데, 가장 대표적으로 사용되고 있는 포트폴리오 구성 방법으로는 '평균-분산(mean-variance) 기준'에 의한 포트폴리오 구성 방법이 있다. 평균-분산 기준에 따르면, 투자자들

논문접수일 : 2002년 11월 13일　논문게재확정일 : 2003년 2월 19일
* 이 논문은 2001학년도 홍익대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.
** 홍익대학교 경영학부 부교수

이 느끼는 위험이 곧 포트폴리오 수익률의 표준편차라는 가정 하에, 포트폴리오의 기대수익이 높을수록 그리고 표준편차는 낮을수록 더 우수한 포트폴리오가 된다.

이러한 평균-분산 기준은 실제 확률분포가 정규분포와 같이 평균과 분산만으로 특징지워지는 경우, 또는 투자자들이 확률분포의 평균과 분산 이외의 다른 특성들에 관해서는 관심이 없는 경우 투자자들의 행동을 잘 설명할 수 있게 된다. 그러나 자산수익률이 정규분포를 갖지 않고 투자자들의 효용함수에 첨도(kurtosis) 등과 같은 평균-분산 이외의 확률분포 특성들이 영향을 미치는 경우, 평균과 분산만으로는 실제 투자자들의 행동을 설명할 수 없게 된다. 예를 들어 매우 드물게 일어나는 시장폭락 가능성을 투자자들이 염려할 경우, 투자자들이 느끼는 위험을 자산수익률의 표준편차만으로 설명하는 것은 부적절할 수 있다. 이러한 '평균-분산 기준'이 갖고 있는 문제를 보완할 수 있는 방법으로서 '확률적 지배(stochastic dominance)' 개념을 사용한 포트폴리오의 구성이 제시되었다. Levy (1992)는 이에 대한 연구들을 일목요연하게 정리하여 보여주고 있다.

확률적 지배기준이 갖는 가장 큰 장점은 확률적 지배기준은 효용함수에 대한 최소한의 가정만을 필요로 하기 때문에 확률변수들간의 순서에 관한 명확한 해석을 할 수 있다는 점이다. 또한 확률적 지배기준은 확률분포를 전체적으로 고려한다는 점에서 평균-분산 모형보다 더 일반적이라 할 수 있다. 예를 들어 평균-분산 모형에서 무시되는 왜곡도(skewness)나 첨도(kurtosis)가 실제 투자자가 느끼는 위험에 많은 영향을 줄 수도 있는데, 실제로 이러한 확률분포의 모든 특성들은 확률적 지배 관계에 영향을 미친다. 또한 드물게 나타나는 시장폭락과 같은 현상이 표준편차에 미치는 영향보다 확률적 지배 관계에 미치는 영향이 훨씬 크게 된다.

이렇게 주식시장에서 투자종목을 선택하는 것과 같은 불확실성 하의 의사결정에서는 다른 대안들보다 항상 우월한 결과를 주는 대안을 선택하는 것이 본질적으로 불가능하다. 그렇기 때문에 이러한 경우에는 확률적으로 우월한 결과를 주는 대안을 선택하는 것이 관심의 대상이 되는데, 이러한 대안을 확률적 지배(stochastic dominance)를 하는 대안이라고 한다. 이 경우 위험을 분산시키기 위하여 여러 주식에 나눠서 투자를 하는 포트폴리오를 구성하게 되는데, 어떻게 포트폴리오를 구성하는 것(즉, 어떠한 비율(가중치)로 투자를 하는 것)이 기대수익을 가장 높일 수 있는 지가 투자자의 지대한 관심을 끌게 된다. 기간별 평균수익률의 시계열을 확률분포로 간주할 때, 최소한 전체평균수익률(예 : 한국종합주가지수)보다 확률적으로 우월한 포트폴리오를 구성하는 각 종목의 가중치를 체계적으로 구할 수 있다면, 장기적으로 볼 때 상당히 우수한 투자전략을 세우는데 있어서 중요한 참고자료가 될 수 있다.

이러한 문제는 포트폴리오 관리자에게도 관심의 대상이 되지만, 최적화의 방법론이 독특하다는 점에서 경영과학자에게도 흥미있는 문제가 아닐 수 없다. 즉, 최적화의 대상이 되는 함수(목적함수)가 최소최대(minimax)의 형태이면서도 함수값의 개선 방향을 알려주는 1차 도함수(first derivative/ gradient)를 분석적(analytic)인 방법으로 구할 수가 없고, 반드시 실증분포(empirical distribution)가 주어진 상황에서만이 정의될 수 있다는 점이 여타의 최적화문제와는 상당히 다른 모습을 보여주고 있다고 하겠다. 더욱이 본 연구에서 다루고자 하는 '1차 확률지배'의 경우에는 1차 도함수마저 항상 존재하는 것도 아니고 그나마 존재하는 곳에서조차도 대부분 0이어서 함수값의 개선에 아무런 정보를 제공하지 못하고 있다는 점에서 더욱 연구해볼 만한 가치가 있다고 하겠다.

T개의 시점에 대한 n개의 주식들의 수익률이 주어져 있다고 할 때, n개의 주식으로 포트폴리오를 구성하려고 한다고 하자. 주식 i의 시점 t에서의 시점 $t-1$ 대비 수익률을 x_{it}라고 하고, 주식 i에 부여하는 가중치를 ω_i라고 한 후, 각 시점 t에 대해서 n개의 주식들의 수익률의 가중합계(포트폴리

오)를 X_t라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

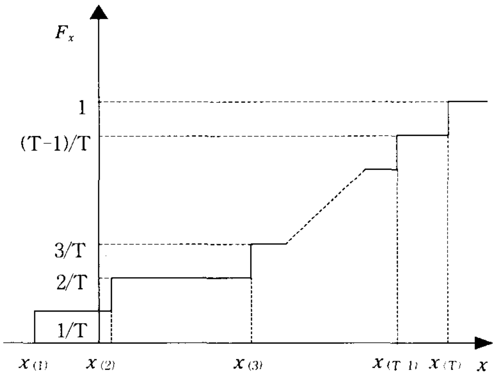
$$X_t = \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{it}, \quad \text{where} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1, \ \omega_i \in R \ \ \forall i. \tag{1}$$

여기서 R은 실수를 의미한다. 이렇게 만든 T개의 X_t를 표본으로 간주하고 각각의 표본에 1/T의 확률을 똑같이 부여해서 실증분포(empirical distribution)를 만들어 낼 수가 있으며, 이것으로부터 X_t의 누적분포함수(cumulative distribution function) $F_x(\cdot)$를 구할 수가 있다. 이렇게 되면 $F_x(\cdot)$의 모양은 [그림 1]에서 보는 것처럼, 왼쪽 연속인 계단함수(step function)가 된다. T개의 시점에 대한 KOSPI(Korea cOmposite Stock Price Index; 한국종합주가지수)의 수익률 K_t에 대해서도 이와 같이 실증분포를 만들고 그로부터 누적분포함수 $F_k(\cdot)$를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_x(y) &= \Pr\{X_t \le y\} = \frac{p}{T}, \\ &\quad \text{where } X_{(p)} \le y < X_{(p+1)}, \\ F_k(y) &= \Pr\{K_t \le y\} = \frac{q}{T}, \\ &\quad \text{where } K_{(q)} \le y < K_{(q+1)}. \end{aligned} \tag{2}$$

[그림 1]에서 $X_{(t)}$는 X_t의 순서통계량(order statistics)으로서 크기가 작은 것부터 큰 순서대로 배열했을 때 t번째의 X_t를 의미하게 된다. 즉, $X_{(1)}$은 아래의 관계를 만족하도록 X_t를 배열했을 때의 첫 번째 X_t, 즉 X_t중 가장 작은 것을 의미한다.

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(T)} \tag{3}$$



[그림 1] 누적분포함수 $F_x(\cdot)$

2. 확률적 지배

주식과 같은 '불확실한 자산(risky asset)'을 선택함에 있어서, 자산 A보다 자산 B를 선호하게 되는 조건이 무엇인지를 알아보기 위해서, 우선 두 종류의 '확률적 지배(stochastic dominance)'에 대해서 간단히 살펴보기로 한다(Hadar & Russel, 1969 ; Huang & Litzenberger, 1988 ; McNamara. 1998).

'모든 사람'이 자산 B보다 자산 A를 선호하거나 똑같다고 여길 경우, 자산 A가 자산 B를 '1차 확률적으로 지배(first degree stochastic dominance; FSD)'한다고 말한다. 즉, 자산 A의 수익률이 어느 수준에 대해서든 그 수준보다 높을 확률이 자산 B의 그 확률보다 크거나 같을 때를 말한다. $F_a(\cdot)$와 $F_b(\cdot)$를 각각 자산 A와 B에 대한 수익률의 누적분포함수(cumulative distribution function)라고 하고 h를 수익률이라고 하면, 자산 A가 자산 B를 1차 확률적으로 지배할 경우 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$F_b(h) \ge F_a(h) \quad \forall h, \text{ 또는} \quad \max_h \{F_a(h) - F_b(h)\} = 0. \tag{4}$$

여기에는 인간의 욕구가 불포만적(nonsatiable)이라는 가정이 필요하게 되는데, 이것은 효용함수(utility function)가 단조증가(monotonically increasing)하며, 1차 도함수(the first derivative)가 언제나 0보다 크다는 것을 의미한다. 이러한 1차 확률적 지배는 위험에 대한 투자자의 성향이 전혀

반영이 되어 있지 않다. 즉, 위험을 선호하는(risk-taking) 사람이든 위험을 싫어하는(risk-averting) 사람이든 1차 확률적 지배에 있는 자산을 선택하게 된다. 이것은 효용함수의 1차 도함수가 0보다 크기만 하면 되고, 2차 도함수가 0보다 크든(위험을 선호하는 사람) 작든(위험을 회피하는 사람) 상관이 없다.

'위험을 싫어하는 사람들 모두'가 자산 B보다 자산 A를 선호할 경우, 자산 A가 자산 B를 '2차 확률적으로 지배(second degree stochastic dominance ; SSD)'한다고 말하며, 자산 A가 자산 B를 2차 확률적으로 지배할 경우 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{h} F_b(y)dy \geq \int_{-\infty}^{h} F_a(y)dy \quad \forall h, \text{ 또는}$$

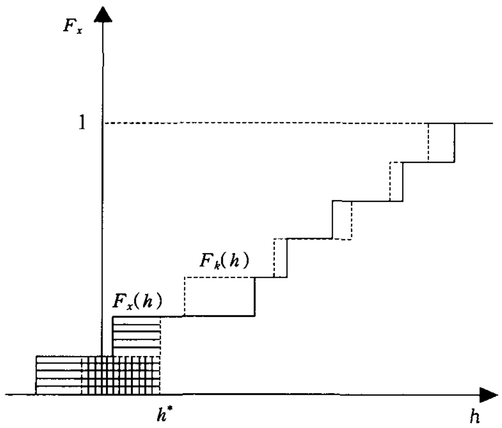
$$\max_{h} \int_{-\infty}^{h} \{F_a(y) - F_b(y)\} dy = 0. \tag{5}$$

여기에는 인간의 욕구가 불포만적이라는 가정과 위험을 싫어한다는 가정이 모두 필요하게 되는데, 이는 효용함수의 1차 도함수가 언제나 0보다 크고, 2차 도함수가 항상 0보다 작다는 것을 의미한다. 이러한 경우 자산 B가 자산 A보다 더 위험하다(more risky)고 말하며, 위험을 싫어하는 사람들은 자산 A를, 위험을 선호하는 사람들은 자산 B를 선택하려고 한다.

KOSPI를 2차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하게 하는 가중치의 선택은 두 누적확률함수 아래 면적의 최대차이를 최소화하는 것이 될 수 있다. 즉, 포트폴리오의 누적분포함수의 아래 면적에서 KOSPI의 누적분포함수의 아래 면적을 뺀 차이의 최대값을 가장 작도록 하는 가중치를 선택하는 것이 된다. 이 최소값이 0인 경우에 한해서 KOSPI를 2차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성할 수가 있는데, 만일 이 최소값이 0보다 크다면 현재 고려하고 있는 n개의 자산들로는 2차 확률적 지배를 하는 포트폴리오를 구성할 수가 없다고 결론을 내릴 수가 있다. 2차 확률적 지배를 하는 가중치를 구하는 문제는 아래와 같이 정식화할 수 있다.

$$
\begin{array}{lll}
 & \underset{\omega}{\text{Minimize}} \ \max_{h} \int_{-\infty}^{h} \{F_x(y) - F_k(y)\} dy & \\
(\mathrm{P}_2) \quad \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 & (6) \\
 & \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n. &
\end{array}
$$

여기서 가중치인 ω_i는 음수가 될 수도 있는데, 그것은 공매(空賣; short sale)의 경우로서 남의 주식을 빌려서 팔고 나중에 현금이 아닌 그 주식으로 다시 갚는 경우를 말한다(Sharpe *et al.*, 1995). 예를 들어 세 개의 주식 A, B, C에 대한 가중치가 (-0.1, 0.3, 0.8)이라고 하면, 투자액의 10%에 해당하는 만큼의 주식 A를 나중에 동일 주식으로 다시 갚기로 하고 빌려서 팔고, 투자액의 30%로 주식 B를 사고 80%로 주식 C를 산다는 의미가 된다. 비록 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$가 계단함수 형태를 갖는다 하더라도, 두 함수의 아래 면적의 최대차이는 매끄러운 곡면함수(curve function) 모양이 된다([그림 2] 참조). 즉, ω가 조금만 변하더라도 두 함수의 값이 같은 구간을 제외하고는 아래 면적의 차이가 변하기 때문에 함수 값이 달라지게 된다. 이 목적함수는 연속적인 1차 도함수가 존재하기는 하지만 아직 볼록함수임이 증명된 것은 아니므로 1차 도함



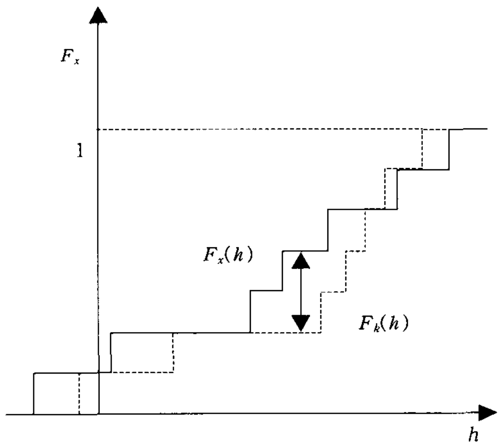
[그림 2] 2차 확률적 지배에 대한 최적화

수가 0이 되는 점에서 국지적(local)이 아닌 전체적(global)인 최소값을 가진다는 보장을 할 수는 없다. 그러나 이 함수가 이론적으로 가질 수 있는 가장 작은 값이 0이기 때문에, 도함수기법을 적용해서 구한 최종해의 함수 값이 0인 경우는 전체적인 최소값이라고 말할 수가 있다. 문제는 이러한 1차 도함수를 어떻게 ω_i로 나타낼 수 있느냐가 된다.

KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하게 하는 가중치의 선택은 두 누적확률함수간의 최대차이를 최소화하는 것이 될 수 있다(식 (4) 참조). 즉, 포트폴리오의 누적분포함수에서 KOSPI의 누적분포함수를 뺀 차이의 최대값을 가장 작도록 하는 가중치를 선택하는 것이 된다. 이 최소값이 0인 경우에 한해서 KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성할 수 있게 된다. 만일 이 최소값이 0보다 크다면 현재 고려하고 있는 n개의 자산들로는 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오를 구성할 수가 없다. 1차 확률적 지배를 하는 가중치를 구하는 문제는 아래와 같이 정식화할 수 있다.

$$
\begin{array}{lll}
 & \underset{\omega}{\text{Minimize}} & \underset{h}{\max}\,\{F_x(h)-F_k(h)\} \\
(\mathrm{P}_1) & \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1 \\
 & & \omega_i \in R,\quad i=1,2,\cdots,n.
\end{array}
\tag{7}
$$

$F_x(h)$와 $F_k(h)$의 값은 1/T의 배수로 이루어져 있기 때문에 두 함수값의 차이도 1/T의 배수로 이루어져서 ([그림 1] 참조), 각 함수의 모양 또한 [그림 3]으로부터 알 수 있듯이 계단함수(step function) 형태를 갖게 된다. 즉, ω의 미세한 변화에도 두 함수의 차이는 변화하지 않고 그대로인 경우가 대부분이다. 최적가중치를 찾는 알고리듬을 만들고자 할 때, 1차 도함수가 대부분 0이어서 함수의 증가방향을 나타내 주기를 기대하기가 어려운 것은 물론 언제나 존재하는 것도 아니기 때문에 '도함수기법(gradient method)'의 이용이 사실상 불가능하다.



[그림 3] 1차 확률적 지배에 대한 최적화(P_1)

1차 확률적 지배는 2차 확률적 지배보다 좀더 강한 조건을 가지고 있어서, 자산 A가 자산 B를 1차 확률적으로 지배하고 있다면 자산 A는 자산 B를 2차 확률적으로도 지배하게 된다. 그러나 이 역은 성립하지 않는다. 자산 A가 자산 B를 1차 확률적으로 지배하고 있는 경우에는 위험을 선호하는 사람이든 위험을 싫어하는 사람이든 똑같이 자산 A를 선택하지만, 2차 확률적으로 지배하고 있는 경우에는 위험을 선호하는 사람과 위험을 싫어하는 사람의 선택이 서로 달라서, 위험을 선호하는 사람은 자산 B를 선택하고, 위험을 싫어하는 사람은 자산 A를 선택하게 된다.

류춘호, 신성환(1997)은 투자 대상이 되는 변수들의 실증분포로부터 특정 벤치마크 변수(KOSPI)를 '2차 확률적으로 지배'하는 포트폴리오를 구성하는 방법을 비선형계획법(nonlinear programming)으로 정식화해서 작은 규모의 예제에 적용해 봄으로써 그 가능성을 제시하였으며, 류춘호(1999)는 2차 확률적 지배를 고려할 경우 최적화의 대상이 되는 비선형 목적함수(nonlinear objective function)의 수학적 특성을 분석하여 전체최적성(global optimality)과 국부최적성(local optimality)을 검토하고, 이 알고리즘을 한국 및 미국의 주식시장으로부터의 실제 자료에 적용하여 그 효율성을 시험하였다. McNamara(1998)도 2차 확률적 지배 개념을

이용한 포트폴리오 구성을 고려하였지만, S&P500과 같은 시장지수와 무위험(risk-free)자산의 합성치를 2차 확률적으로 지배하면서 앞으로의 예상수익률이 최대가 되도록 하는 포트폴리오를 구성하기 위하여 이 문제를 선형계획법(linear programming)으로 정식화한 후 표본추출을 반복해 가는 모의실험(simulation)을 통해서 포트폴리오를 구성하였다는 점에서 앞의 연구와는 다소 차이가 있다고 하겠다.

본 연구에서는 위의 두 연구가 최적화방법론 상의 어려움으로 접어두었던 '1차 확률적 지배'를 하는 포트폴리오의 구성에 대해서 살펴보고자 한다. 이는 앞에서 살펴보았듯이 '2차 확률적 지배'보다도 훨씬 강한 조건이고, 통상적인 '확률적 지배(stochastic dominance)'가 1차 확률적 지배를 의미하며, 위험에 대한 성향이 위험회피적이든 위험선호적이든 모든 사람이 다 선택한다는 점에서 더욱 매력이 있는 반면에 그만큼 최적가중치를 구하기가 어렵다는 점에서 연구의 의의가 있다고 하겠다.

3. 최적화방법론

KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하게 하는 가중치의 선택은, (P_1)에서 볼 수 있듯이, 두 누적분포함수(c.d.f. ; cumulative distribution function)의 최대차이를 최소화하는 것이 될 수 있다. 즉, 포트폴리오의 누적분포함수 값에서 KOSPI의 누적분포함수 값을 뺀 차이의 최대값을 가장 작도록 하는 가중치를 선택하는 것이 된다. 이 최소값이 0인 경우에 한해서 KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성할 수가 있다.

그러나 앞에서 지적했듯이, $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$ 모두가 1/T의 배수를 값으로 갖고 (P_1)의 목적함수도 1/T의 배수를 값으로 갖게 되고, 따라서 ω의 미세한 변화에도 두 함수의 차이는 변화하지 않고 그대로인 경우가 대부분이므로 아직 최적해에 도달하지 않았어도 1차 도함수가 0인 경우가 존재할 수 있기 때문에 최적화의 어려움이 존재한다.

여기서 ω의 미세한 변화에 따라 (P_1)의 목적함수값이 변화할 수 있도록 하기 위하여, 1차 확률적 지배를 하는 가중치를 구하는 문제를 아래와 같이 정식화할 수 있다.

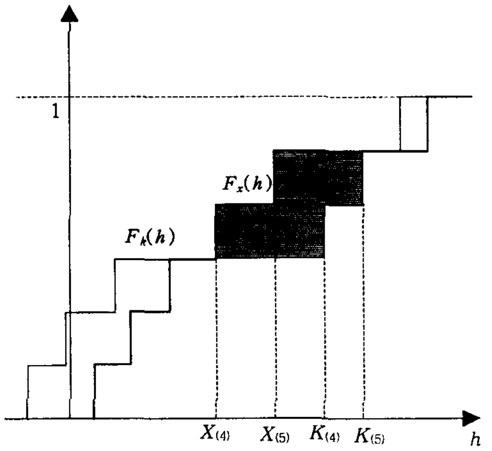
$$\begin{array}{lll} & \underset{\omega}{\text{Minimize}} & \int_{-\infty}^{\infty} \{F_x(y) - F_k(y)\}^+ \, dy \\ (P_1{}') & \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\ & & \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \end{array} \tag{8}$$

여기서 $\{f(x)\}^+$는 어떤 함수 $f(x)$의 (+)부분만을 의미하므로 이 $f(x)$값이 (-)이면 $\{f(x)\}^+$는 0의 값을 갖는다.

문제 ($P_1{}'$)은 문제 (P_1)과 동일한 것은 아니지만, 둘 다 목적함수값을 0으로 하는 ω_i가 존재한다면 곧 그 ω_i가 1차 확률적 지배를 하는 최적가중치가 된다는 점에서 (P_1) 대신 ($P_1{}'$)을 풀어도 상관이 없다고 하겠다. 특히 (P_1)은 1차 도함수가 존재하지 않거나 존재하더라도 최저점이 아닌 곳에서도 0을 가질 수 있기 때문에 최적해를 찾는데 어려움이 많은 반면에, ($P_1{}'$)은 ω_i의 미세한 변화에도 그 값이 변하기 때문에 1차 도함수가 존재하고 이는 곧 최적가중치를 찾아갈 수 있는 중요한 정보를 제공하기 때문에 (P_1)에 비해서 현실적인 강점이 있다고 하겠다.

비록 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$가 계단함수 형태를 갖는다 하더라도, $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간에서 두 함수의 아래 면적의 차이는 매끄러운 곡면함수(curve function) 모양이 된다([그림 4] 참조). 즉, ω가 조금만 변하더라도 두 함수의 값이 같은 구간을 제외하고는 아래 면적의 차이가 변하기 때문에 함수 값이 달라지게 된다. 이 목적함수는 연속적인 1차 도함수가 존재하기는 하지만 아직 볼록함수임이 증명된 것은 아니므로 1차 도함수가 0이 되는 점에서 국지적(local)이 아닌 전체적(global)인 최소값을 가진다는 보장을 할 수는 없다. 그러나 이 함수가 이론적으로 가질 수 있는 가장 작은 값이 0이기 때

문에, 도함수기법을 적용해서 구한 최종해의 함수값이 0인 경우는 전체적인 최소값이라고 말할 수가 있으며, 이 경우 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오를 구성할 수가 있다. 문제는 이러한 1차 도함수를 어떻게 ω_i로 나타낼 수 있으며, 그것을 이용해서 목적함수인 $g(\omega)$를 최소로 하는 ω_i를 어떻게 찾아내느냐가 된다.



[그림 4] 1차 확률적 지배에 대한 최적화(P_1')

표본의 수는 시점 t의 수인 T이고, $g(\omega)$는 X와 K의 누적분포함수를 다루고 있으므로, 최대 2T개의 값에서만 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$ 중 어느 하나의 함수값에 변화가 생기고 거기에서 1/T만큼 함수값이 상승하기 때문에, 2T개의 값이 서로 다르다면 $g(\omega)$를 구하기 위해서는 최대 2T개의 값만 확인하면 충분하다.

<정리 1>

(1) $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간은 반드시 $X_{(t)}$로 시작해서 $K_{(t)}$로 끝난다.

(2) $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간에 속해 있는 $X_{(t)}$의 첨자집합과 $K_{(t)}$의 첨자집 합은 동일하다.

증명 : (1) $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간이 시작되기 위해서는 $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$와 같은 높이에 있다가 $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 커져야 한다. 즉, 그 부분에서는 $X_{(t)}$가 연이어 나오는 동안 $K_{(t)}$는 나타나지 말아야 한다. 그러므로 $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간은 $X_{(t)}$로 시작되어야 한다. 아울러 이 구간이 끝나기 위해서는 $F_k(\cdot)$가 $F_x(\cdot)$보다 아래에 있다가 $F_k(\cdot)$가 $F_x(\cdot)$와 같아져야 한다. 즉, 그 부분에서는 $K_{(t)}$가 연이어 나오는 동안 $X_{(t)}$는 나타나지 말아야 한다. 그러므로 $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간은 $K_{(t)}$로 끝나야 한다.

(2) $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간은 $X_{(p)}$로 시작해서 $K_{(q)}$로 끝난다고 가정하자. 이 구간은 $X_{(p)}$로 시작되므로 $X_{(p)}$보다 조금 작은 값에서는 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$의 높이, 즉 값이 같다는 의미이며, 이는 곧 그때까지 나타난 $X_{(t)}$와 $K_{(t)}$의 최대첨자가 모두 $(p-1)$임을 의미한다. 이 구간은 $K_{(q)}$로 끝나므로 $K_{(q)}$보다 조금 큰 값에서는 $F_x(\cdot)$와 $F_k(\cdot)$의 높이, 즉 값이 같다는 의미이며, 이는 곧 그때까지 나타난 $X_{(t)}$와 $K_{(t)}$의 최대첨자가 모두 q임을 의미한다. 그러므로 이 구간에 나타난 $X_{(t)}$와 $K_{(t)}$의 첨자집합은 둘 다 $\{p, p+1, \cdots, q-1, q\}$가 된다. ★

그렇다면 $g(\omega)$는 어떤 형태를 가지는지 살펴보기로 하자. 예를 들어, [그림 4]에서 빗금친 부분을 두 개의 사각형으로 나눈 후 아래와 위의 사각형을 각각 $X_{(t)}$와 $K_{(t)}$의 함수로 나타내면 $g(\omega)$를 아래와 같이 표시할 수 있으며,

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{4}{T}(K_{(4)}-X_{(4)}) - \frac{3}{T}(K_{(4)}-X_{(4)}) \\ &\quad + \frac{5}{T}(K_{(5)}-X_{(5)}) - \frac{4}{T}(K_{(5)}-X_{(5)}) \\ &= \frac{1}{T}\{(4-3)K_{(4)} + (5-4)K_{(5)} \\ &\quad - (4-3)X_{(4)} - (5-4)X_{(5)}\} \\ &= \frac{1}{T}(K_{(4)} + K_{(5)} - X_{(4)} - X_{(5)}) \end{aligned} \tag{9}$$

이것은 $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간 내에 속해 있는 $K_{(t)}$값의 합에서 $X_{(t)}$값의 합을 뺀 것을 T로 나

눈 값이 된다.

이것을 일반화하기 위해서, $F_x(\cdot)$가 $F_k(\cdot)$보다 큰 구간이 r개 존재하고, j번째 구간에 속해 있는 $X_{(t)}$의 첨자의 집합을 N_j라고 하면(같은 구간에 속해 있는 $K_{(t)}$의 첨자의 집합도 역시 N_j가 됨), $g(\omega)$는 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$g(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{r} \sum_{t \in N_j} (K_{(t)} - X_{(t)}) \quad (10)$$

문제 (P_1')의 실행가능영역(feasible region)은 n차원 상의 초평면(hyperplane)이므로, 목적함수인 $g(\omega)$의 감소방향은 1차 도함수를 구해서 이 초평면에 투영시킨 것이 된다. 그러나 문제 (P_1')의 제약식이 등식이기 때문에 아래와 같이 ω_n을 치환하면,

$$\omega_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i. \quad (11)$$

문제 (P_1')은 제약식이 존재하지 않는 '무제약 최적화(unconstrained optimization)'의 문제로 바뀌게 되고, X_t도 아래와 같이 바꿔 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{it} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i x_{it} + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i) x_{nt} \\ &= x_{nt} + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (x_{it} - x_{nt}), \\ &\quad \text{where } \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned} \quad (12)$$

문제는 $g(\omega)$의 1차 도함수를 어떻게 x_{it}로 표시할 수 있느냐이다.

우선 $g(\omega)$를 x_{it}로 표시해보면, 아래와 같다.

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{r} \sum_{t \in N_j} (K_{(t)} - X_{(t)}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{r} \sum_{t \in N_j} \{K_{(t)} \\ &\quad - (x_{n(t)} + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (x_{i(t)} - x_{n(t)})\} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 주의할 것은 $x_{i(t)}$는 x_{it} 자체의 순서통계량이 아니라 X_t의 순서통계량인 $X_{(t)}$를 구성하는 x_{it}를 의미한다는 점이다. 즉, $x_{i(t)}$는 아래의 식을 만족해야 한다.

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{i(1)} \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{i(2)} \leq \cdots \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_{i(T)}. \quad (14)$$

결과적으로 문제 (P_1')은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} &\underset{\omega}{\text{Minimize}} \ \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{r} \sum_{t \in N_j} \{K_{(t)} - (x_{n(t)} \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (x_{i(t)} - x_{n(t)})\} \\ (P_1') \quad &\text{s.t.} \quad \omega_i \in R, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 목적함수의 ω_i에 대한 일차 도함수를 구하는 데에는 세 번째 항을 제외한 다른 모든 항을 상수로 취급할 수 있으므로, 일차 도함수는 아래와 같게 된다.

$$\begin{aligned} \nabla g_i(\omega) &= \frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega_i} \\ &= -\frac{1}{T} \sum_{j=1}^{r} \sum_{t \in N_j} (x_{i(t)} - x_{n(t)}), \quad (16) \\ &\quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

문제 (P_1')이 $g(\omega)$를 최소로 하는 것이 목적이고 일차 도함수는 함수의 증가방향을 나타내므로, 개선 방향은 일차 도함수의 반대방향이 된다.

여기에 도함수기법(gradient method)(Minoux (1986) 참조)을 적용하면 되는데, 이 기법은 일차 도함수를 이용하여 축차적으로 다음 해를 구하게 된다. ω^{old}에서의 일차 도함수를 $\nabla g(\omega^{\text{old}})$라고 하면 새로운 점 ω^{new}는 아래와 같이 쉽게 구할 수가 있다.

$$\omega^{\text{new}} = \omega^{\text{old}} - \lambda \frac{g(\omega^{\text{old}})}{\|\nabla g(\omega^{\text{old}})\|^2} \cdot \nabla g(\omega^{\text{old}}) \quad (17)$$

여기서 λ의 값을 특정값(보통은 1~2)으로 고정

시켜 놓고서, 알고리즘을 적용하여 $g(\omega)$의 값이 0이면 최적해에 도달한 것이 된다. 그러나 $g(\omega)$의 값이 0이 아닌 경우에는 이대로는 최소값으로 수렴하지 않으므로, 일정 회수를 반복해도 $g(\omega)$의 값이 작아지지 않을 경우는 λ의 값을 점점 줄여가면서 최소값을 찾아가도록 조정을 한다.

여기서 목적함수 $g(\omega)$가 볼록함수(convex function)라면, 최종적으로 얻은 최소값이 전체적 최소값(global minimum)이 되겠지만, 그렇지 않을 경우는 국지적 최소값(local minimum)에 불과하다고 할 수밖에 없는데, 목적함수의 모양은 [그림 6]에서 알 수 있듯이 볼록함수가 아니다. 그러므로 도함수기법을 적용해서 얻은 최소값은 전체적 최소값이라는 보장을 받을 수가 없다.

그러나 다행스러운 것은 목적함수의 이론적인 최소값이 0이기 때문에, 비록 목적함수가 볼록이지 않더라도 알고리즘을 적용한 결과 최종적인 목적함수값이 0이라면 이는 곧 전체적 최소값이라고 할 수 있으며, 이 경우에 한해서 포트폴리오가 KOSPI를 1차 확률적으로 지배한다고 말할 수가 있다.

4. 예제(Numerical Example)

위의 알고리즘이 어떻게 움직이고 어느 정도 효과적인지를 살펴보기 위하여, 소규모 자료에 적용해 보고자 한다. <표 1>은 실제 자료의 일부만을 예시한 것인데, A에서 C까지 세 회사 주식의 5주 동안의 수익률과 주식시장 전체(KOSPI)의 평균수익률을 보여주고 있다.

〈표 1〉 기간별 수익률

기 간	A	B	C	KOSPI
1	0.0206	0.1807	-0.0049	-0.0240
2	0.1119	-0.0816	0.0100	-0.0225
3	0.0029	0.0022	-0.0009	0.0235
4	0.0119	-0.0197	0.0396	0.0207
5	-0.0601	0.0111	0.0000	-0.0067

우선 각 기간의 확률은 1/5로 동일하므로 KOSPI의 확률밀도함수(probability density function)인 $f_k(\cdot)$는 모든 기간에 대해서 1/5로 동일하다. 그러므로 KOSPI의 누적분포함수(cumulative distribution function)인 $F_k(\cdot)$는 KOSPI의 수익률을 크기의 역순으로 나열한 후 각각에 대해 1/5씩 증가해가는 모양이 된다. 포트폴리오의 경우도 임의의 가중치에 대해서 각 기간별 대상 회사의 가중평균 수익률을 구해서 KOSPI의 경우와 같이 $f_x(\cdot)$와 $F_x(\cdot)$를 구할 수가 있다.

$g(\omega)$의 모양을 살펴보기 위해서 세 회사의 주식으로 포트폴리오를 구성할 경우를 고려해 보자. 이때의 가중치를 각각 ω_1, ω_2, ω_3라고 하면 $\omega_3 = 1-\omega_1-\omega_2$로 치환할 수가 있고, ω_1과 ω_2만 결정하면 충분하므로, $g(\omega)$는 (ω_1, ω_2) 평면상에 나타낼 수가 있다. [그림 5]는 $g(\omega)$의 함수모양을, 그리고 [그림 6]은 등고선으로 표시된 $g(\omega)$를 나타내고 있는데, $g(\omega)$는 볼록(convex)이 아님을 분명히 보여주고 있다.

$*$ UB = ∞,

K_t = (-0.0240, -0.0225, 0.0235, 0.0207, -0.0067),

$K_{(t)}$ = (-0.0240, -0.0225, -0.0067, 0.0207, 0.0235)

1. $\omega^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0)$ = (0.0, 0.0). 즉, ω_3^0 = 1.0

X_t = (-0.0049, 0.0100, -0.0009, 0.0396, 0.0000)

$X_{(t)}$ = (-0.0049, -0.0009, 0.0000, 0.0100, 0.0396)

$g(\omega^0)$ = 0.002134,

$\nabla g(\omega^0)$ = (-0.02038, 0.01832)

UB = min { UB, $g(\omega^0)$ }

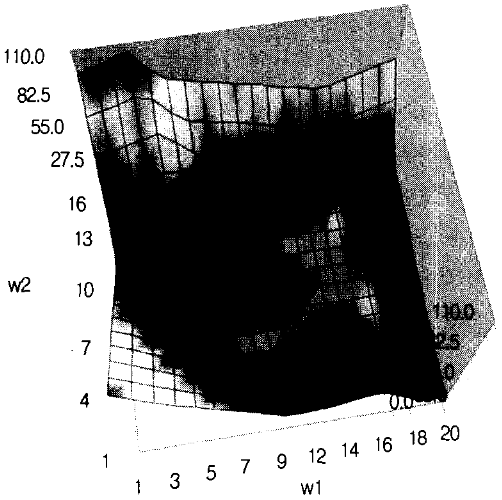
= min { ∞, 0.002134 } = 0.002134

$$\omega^1 = \omega^0 - \frac{g(\omega^0)}{\|\nabla g(\omega^0)\|^2} \cdot \nabla g(\omega^0)$$

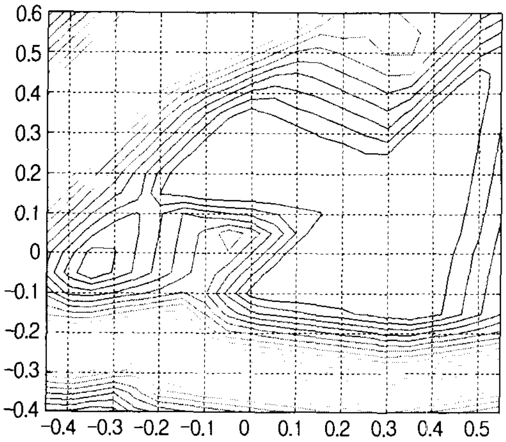
= (0.0, 0.0) - (0.002134/0.000751)

$*$ (-0.02038, 0.01832)

= (0.05791324, -0.05205939).



[그림 5] $g(\omega)$의 함수모양



[그림 6] 등고선으로 표시된 $g(\omega)$

2. $\omega^1 = (\omega_1^1, \omega_2^1) = (0.05791324,\ -0.05205939)$.

   즉, $\omega_3^1 = 0.9941462$.

   $X_t = (-0.0131, 0.0207, -0.0041, 0.0411, -0.0008)$

   $X_{(t)} = (-0.0131, -0.0041, -0.0008, 0.0207, 0.0411)$

   $g(\omega^1) = 0.4 \times 10^{-9}$,

   $\nabla g(\omega^1) = (-0.02038,\ 0.01832)$

   $UB = \min\{\ UB,\ g(\omega^1)\ \}$

   $= \min\{\ 0.0595,\ 0.4 \times 10^{-9}\ \} = 0.4 \times 10^{-9}$

$$\omega^2 = \omega^1 - \frac{g(\omega^1)}{\|\nabla g(\omega^1)\|^2} \cdot \nabla g(\omega^1)$$

$$= (0.05791324,\ -0.05205939) - (0.4 \times 10^{-9} / 0.000751) * (-0.02038,\ 0.01832)$$

$$= (0.05791325,\ -0.05205940).$$

3. $\omega^2 = (\omega_1^2, \omega_2^2) = (0.05791325,\ -0.05205940)$.

   즉, $\omega_3^2 = 0.9941462$.

   $X_t = (-0.0131, 0.0207, -0.0041, 0.0411, -0.0008)$

   $X_{(t)} = (-0.0131, -0.0041, -0.0008, 0.0207, 0.0411)$

   $g(\omega^2) = 0.0000000000$

그러므로 현재의 $\omega = (\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2) = (0.05791325, -0.0520594, 0.9941462)$가 최적해가 되고, 목적함수값이 0.0이므로 현재의 최적해로 이루어진 포트폴리오는 KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 자산이 된다.

5. 계산 결과

위의 예제에서는 세 회사의 5주간의 자료를 가지고 아주 작은 문제를 예로 들었지만, 현실적으로 주식투자현장에서는 최대의 경우 약 30개 정도 회사의 5년간(260주)의 자료를 처리할 수 있어야 된다고 한다. 프로그램 언어는 IBM PC용 Compaq FORTRAN을 이용하였으며, 데스크 탑 PC에서 수행하였다. 한국의 주식시장으로부터 종목별로 우량하다고 여겨지는 기업들을 골라서 총 100개 기업의 5년간의 실제 주식수익률 자료를 얻어서, 이들 중 임의로 30개 회사를 선택해서 260주 동안의 주식수익률 자료에 대해서 알고리즘을 적용해 보면서 그 효율성을 알아보았다. 최적해에 도달하기까지 의 반복(iteration) 회수(최대 500회)와 최종적인 $g(\omega)$의 값, 그리고 CPU 시간(초)을 조사하였다. <표 2>는 이와 같은 작업을 30회에 걸쳐서 반복한 결과를 보여주고 있다.

30회의 시도 중 8회는 최종값이 0.0이므로 이때의 최적해인 ω_i에 따라서 KOSPI를 1차 확률적 지배하는 포트폴리오를 구성할 수 있는 경우이며, 나

머지 22회는 최종값이 0.0이 아니므로 최종적인 ω_i로는 1차 확률적 지배 포트폴리오를 구성할 수가 없다. 이 경우 $g(\omega)$가 볼록이 아니므로 최종값이 국지적 최소값(local minimum)이 되며, 전체적 최소값(global minimum)이 0.0인지 여부는 여기서는 알수가 없다.

〈표 2〉 알고리즘의 적용 결과

문제	반복회수	$g(\omega)$	CPU(초)
1	500	0.00000799	4.50
2	500	0.00004301	4.40
3	500	0.00005364	4.45
4	500	0.00023886	4.33
5	500	0.00016954	4.45
6	500	0.00026151	4.34
7	500	0.00009581	4.45
8	500	0.00004762	4.39
9	285	0.00000000	2.47
10	500	0.00045302	4.40
11	500	0.00025928	4.39
12	500	0.00012618	4.29
13	500	0.00000027	4.39
14	84	0.00000000	0.72
15	500	0.00013543	4.34
16	500	0.00007451	4.50
17	500	0.00011243	4.28
18	248	0.00000000	2.26
19	57	0.00000000	0.55
20	500	0.00001557	4.34
21	148	0.00000000	1.32
22	500	0.00028373	4.50
23	500	0.00008159	4.39
24	79	0.00000000	0.72
25	182	0.00000000	1.60
26	500	0.00039427	4.51
27	500	0.00004433	4.45
28	500	0.00017802	4.51
29	196	0.00000000	1.70
30	500	0.00045817	4.45

주) IBM PC, Pentium III, 800MHz, 128MB RAM

그러나 1차 확률적 지배는 2차 확률적 지배보다 훨씬 더 강한 조건이므로, KOSPI를 1차 확률적 지배하는 포트폴리오를 구성할 수 있는 투자대상 주식(여기서는 30개 회사의 주식)을 고를 가능성이 2차 확률적 지배의 경우보다 상대적으로 낮다는 점을 고려해 볼 때, 8/30의 비율은 기대했던 것보다 낮지 않았으며, 일단 최종값이 0.0인 경우는 CPU 시간이 2~3초 이내에 최종값에 도달하는 걸 보면 이 알고리즘은 효율성이 있는 것으로 여겨진다. 아직 여러 가지 경우에 대한 실험결과 없이 이 결과만으로는 알고리즘이 잘 작동하고 있다는 섣부른 결론을 내리기는 어렵지만, 상당히 고무적인 결과라고 하겠다.

6. 결론 및 향후 연구방향

이상에서 우리는 변수들의 실증분포(empirical distribution)로부터 KOSPI를 1차 확률적으로 지배하는 포트폴리오를 구성하는 방법을 모색하였는데, 목적함수가 볼록함수가 아님에도 불구하고 도함수 기법을 적용하여, 고무적인 결과를 얻었다. 특히 처음 제시되었던 미분 불가능한 함수를 미분 가능한 함수로 다시 정의해서 그 일차 도함수를 분석적으로 구할 수 있었다는 것이 조그만 소득이라고 하겠다.

그리고 주식투자 분야에는 물론이고, 변수들의 실증분포를 가지고 1차 확률적 지배(통상적인 확률적 지배)를 하는 가중치를 구하고자 하는 곳에도 이 알고리즘이 적용될 수 있을 것이라는 점에서 그 활용가능성도 기대해 볼 수 있다고 하겠다. 그러나 이 알고리즘을 다른 분야에 적용하기 위해서는 적용 상황에 따라서 여러 가지 고려해야 할 점들이 다를 수가 있기 때문에 본 연구에서 제시된 알고리즘의 일부를 수정할 필요가 있을 수도 있다.

향후 연구 방향으로는, 1차 확률적 지배를 하는 포트폴리오 중에서 투자자에게 최대의 기대수익을 주는 포트폴리오를 탐색해 보고자 하며, 알고리즘 측면에서 다양한 자료에 대해서 이 알고리즘을 실

험해 보면서 초기해의 선정, 스텝사이즈의 감소 등에 대한 개선을 모색해 보고, 이러한 최적가중치에 의해 구성되는 포트폴리오가 갖는 여러 가지 통계적 특성들을 살펴보고자 한다. 그리고 가중치가 음인 경우는 양인 경우보다 현실적으로 실행이 쉽지가 않기 때문에, 이 알고리즘이 모든 가중치가 양이라는 제약 하에서는 어떻게 수정되어야 하는지도 검토의 대상이다.

참 고 문 헌

[1] 류춘호, "2차 확률적 지배를 하는 가중치의 탐색에 관한 연구 : 주식투자의 경우를 중심으로", 「경영학연구」, 한국경영학회, 제28권, 제1호(1999), pp.223-239.

[2] 류춘호, 신성환, "최적 포트폴리오 구성에 관한 연구", 「경영연구」, 홍익대학교 경영연구소, 22(1997), pp.363-378.

[3] Hadar, J. & W. Russel, "Rules for Ordering Uncertain Prospects," *American Economic Review*, Vol.59(1969), pp.25-34.

[4] Huang, C. & R.H. Litzenberger, *Foundations for Financial Economics*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, Inc., 1988.

[5] Levy, H., "Stochastic Dominance and Expected Utility : Survey and Analysis," *Management Science*, Vol.38, No.4(1992), pp. 555-591.

[6] McNamara, J.R., "Portfolio Selection Using Stochastic Dominance Criteria," *Decision Sciences*, Vol.29, No.4(1998), pp.785-801.

[7] Minoux, M., *Mathematical Programming : Theory and Algorithms*, New York, NY, John Wiley & Sons, Ltd., 1986.

[8] Sharpe, W.F., G.J. Alexander, & J.V. Bailey, *Investments*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, Inc., 1995.