

EDF 기대손실에 기초한 로버스트 공정능력지수*

임태진 · 송현석

송실대학교 산업·정보시스템공학과

A Robust Process Capability Index based on EDF Expected Loss

Lim, Tae-Jin · Song, Hyun-Suk

Dept. of Industrial Information System Engineering, Soongsil University

Key Words : EDF, PCI, reflected normal loss function

Abstract

This paper presents a robust process capability index(PCI) based on the expected loss derived from the empirical distribution function(EDF). We propose the EDF expected loss in order to develop a PCI that does not depend on the underlying process distribution. The EDF expected loss depends only on the sample data, so the PCI based on it is robust and it does not require complex calculations. The inverted normal loss function(INLF) is employed in order to overcome the drawback of the quadratic loss which may increase unboundedly outside the specification limits. A comprehensive simulation study was performed under various process distributions, in order to compare the accuracy and the precision of the proposed PCI with those of the PCI based on the expected loss derived from the normal distribution. The proposed PCI turned out to be more accurate than the normal PCI in most cases, especially when the process distribution has high kurtosis or skewness. It is expected that the proposed PCI can be utilized in real processes where the true distribution family may not be known.

1. 서론

산업이 빠르게 발달되고 소비자의 요구가 다양해짐에 따라 개별 제품에 대한 품질 보

증보다는 공정 자체에 대한 품질의 척도로서 공정능력지수(PCI)의 사용이 증대되고 있다. PCI는 공정의 산포를 잘 반영하면서 계산이 용이하여 제조 분야는 물론 모든 프로세스에

* 본 연구는 2002년도 송실대학교 교내연구비 지원에 의하여 수행되었음.

폭넓게 적용됨에 따라 현재 다양한 형태로의 개발이 진행 중이다.

공정능력분석의 목적은 공정의 산출물이 규격한계를 얼마나 잘 만족하는가를 평가하기 위함이다. 이러한 요구에 맞춰 PCI는 공정의 특성을 평가할 목적으로 개발되어왔다.

가장 먼저 등장한 제1세대 PCI C_p [4]는 공정의 산포에만 근거하여 공정의 능력을 평가함으로써 공정 평균의 치우침을 고려하지 않았다. 이러한 단점을 개선하기 위하여 제2세대 PCI인 C_{pk} [5]가 개발되었으나, 이 지수 또한 목표치에 대한 공정의 산포를 정확히 반영할 수 없으므로 이러한 단점을 효과적으로 보완하는 제3세대 PCI인 C_{pm} [3]이 개발되었다.

이러한 PCI들은 각각의 특성을 고려하여 실제 제조 현장에서 사용되어왔으나, 단품질의 산포만을 고려한 지수이기 때문에 고객의 입장에서 경제적 손실을 고려한 평가가 이루어지기 어려웠다. 이러한 요구에 의해 Taguchi의 이차 손실함수를 이용한 PCI C_{pm}^+ [2]가 개발되어 비용적 측면까지 고려한 공정평가가 가능하게 되었다.

그러나 Taguchi의 이차 손실함수 또한 규격한계에 관계없이 이차 함수를 적용한다는 단점이 있어, Spiring[6]은 이를 보강하기 위한 역정규 손실함수(Inverted Normal Loss Function : INLF)를 개발하였다. 이에 따라 현실적으로 규격한계에 따른 최대 손실 적용이 가능하게 되었다.

이후 Spiring 등[7]은 INLF를 보다 일반화하여 역분포함수를 사용한 기대손실을 제안하였다. 그러나 정규분포 외에는 함수식이 복잡하여 기대손실을 계산하기가 어렵고, 공정의 분포형태를 모르는 상황에서는 적용하

기 곤란한 단점이 있다.

실제 제조공정들은 그 유형이나 특성들이 매우 다양하고, 이러한 다양성에 맞춰 경제적인 산출이나 손실 역시 다양하게 발생될 것이다. 따라서 다양한 공정 분포에 대하여 사용할 수 있는 기대손실 및 이에 기초한 PCI의 개발이 요구된다.

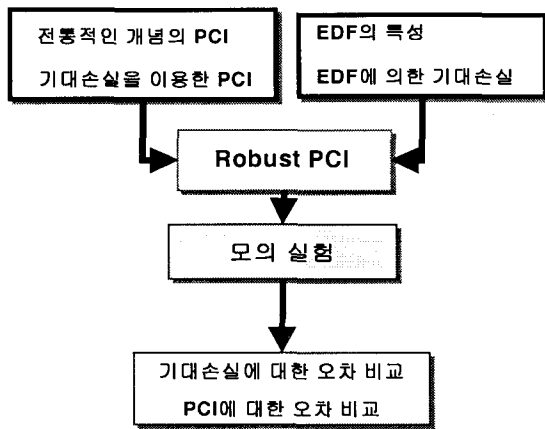
전통적인 PCI 대부분이 공정의 특성치가 정규분포를 따른다는 가정 하에 개발됨으로써, 이러한 가정이 맞지 않을 경우 심각한 오류를 범할 수 있다. 이에 따라 비정규분포 상황 하에서의 PCI들이 연구되기도 하였으나, 특정한 분포를 가정함으로써 가정이 위배되는 경우에 발생하는 오류를 피할 수 없다.

최근에 정영배 등[1]은 INLF를 이용한 PCI를 제안하였다. 제안된 PCI는 기존의 이차손실함수에 근거한 C_{pm}^+ 보다 공정 표준편차의 변화에 대해서 민감하게 반응하는 것으로 나타났다. 그러나 공정의 분포가 정규분포가 아닌 경우에 발생할 수 있는 상황에 대한 연구는 아직까지 없었으며, 그러한 경우에 적합한 PCI에 대한 연구 또한 전무한 상황이다.

본 연구에서는 공정 특성치의 분포에 영향을 받지 않고, 계산이 용이하며, 사전에 공정의 분포를 파악하기 어려운 상황에서 사용 가능한 PCI를 제안하고 그 특성을 밝히고자 한다. 착안점은 기대손실을 구할 때, 가정된 공정 분포함수에 대하여 이를 계산하지 않고, 관측 데이터로부터 구한 선형적분포함수(EDF)를 사용하여 계산함으로써, 공정 분포에 대한 가정의 영향을 받지 않도록 한 것이다.

본 연구의 구성은 <그림 1>과 같다. 2장에서는 기대손실을 이용한 PCI의 특성을 고

찰한다. 3장에서는 EDF의 특성을 활용하여 공정 특성치의 분포에 대해 로버스트(robust)한 기대손실 및 이에 기초한 PCI를 제안한다. 개발된 기대손실과 PCI의 검증을 위하여 먼저 각 공정 분포 유형에 따른 기대손실 및 PCI의 참값을 계산하고, 4장에서는 모의실험을 통하여 기존의 정규분포를 가정한 기대손실과 이에 기초한 PCI와 정확성 및 정밀성을 비교·분석한다.



<그림 1> 연구의 구성

2. 기대손실을 이용한 PCI

2.1 이차 기대손실함수를 이용한 PCI

전통적인 PCI들은 공정의 산포를 근거로 하여 공정능력을 평가하는 척도로서 개발되었다. 이후 품질 변동에 따른 경제적 손실까지 고려하기 위하여 기대손실함수를 분모로 하는 PCI가 제시되었다. 가장 보편화된 Taguchi의 이차손실함수는 품질 특성치가 목표치와 일치할 때는 손실이 발생하지 않으며 점차 멀어질수록 손실이 크게 발생한다는

가정 하에서 이차식으로 근사화한 것이다. 손실함수를 $L(x, T)_i$ 라 하고 그 기대치를 $E[L(x, T)]_i$ 라 하면, 품질의 특성치가 망목 특성일 때 각각 식(1)과 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$L(x, T)_i = k(x - T)^2 \tag{1}$$

$$E[L(x, T)]_i = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2] \tag{2}$$

단, $k = \frac{A}{\Delta}$ 이며 A 는 품질 특성치가 가질 수 있는 최대 손실이고, Δ 는 최대 손실 A 가 첫 번째로 발생하는 시점에서의 목표치로부터 떨어진 정도(거리)를 말한다.

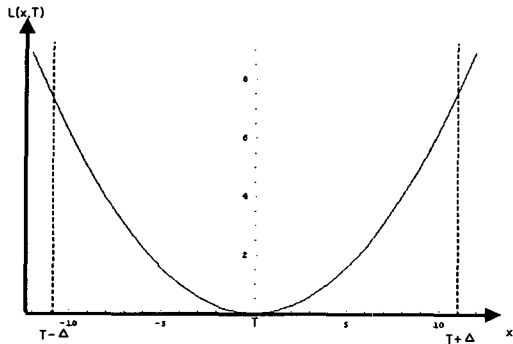
Taguchi 이차손실함수의 기대손실을 이용하여 Boyles[2]는 식(3)과 같이 PCI C_{pm}^+ 를 제안하였다.

$$C_{pm}^+ = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x, T)]_i}} \tag{3}$$

2.2 역정규 기대손실함수를 이용한 PCI

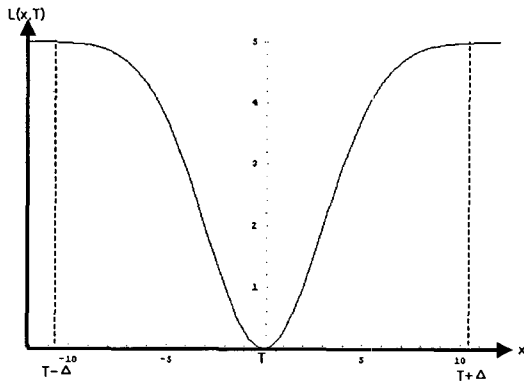
Taguchi의 이차손실함수는 공정이 정규분포인 경우에만 잘 설명이 되고 <그림 2>에서와 같이 품질의 특성치가 규격을 벗어났을 때에도 손실이 계속 증가하는 것으로 해석되는 단점이 있다.

Spring[6]은 이런 단점을 보완하여 정규분포에 대한 확률밀도함수의 역함수를 이용한 역정규 손실함수를 제안하였다. 이는 기존의 이차 손실함수에 비해 목표치로부터 품질의 변동에 따른 손실을 보다 합리적으로 설명할 수 있고 응용의 폭도 넓힐 수 있는 장점이 있다.



<그림 2> Taguchi의 이차 손실함수

<그림 3>에서와 같이 INLF는 항상 양수 값을 갖고, 목표치에서 가장 최소값을 갖으며, 목표치에서 멀어질수록 공정의 분산은 커지고 그에 따른 손실도 증가하므로 손실의 일반적인 특성에 잘 부합된다. 또한 Taguchi의 이차손실함수와는 달리 규격을 벗어날 때 최대손실 이상의 값을 갖지 않는다.



<그림 3> 역정규 손실함수

Spiring 등[7]은 INLF를 일반화하여 역분포함수 형태의 손실함수를 제안하였는데, 이를 정리하면 다음과 같다. 공정 품질특성치

분포의 p.d.f.를 $f(x)$ 라 하고, 손실함수에 이용되는 분포를 $g(x, T)$ 라 하면, $g(x, T)$ 의 역함수 형태를 갖는 손실함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$L(x, T) = A \left(1 - \frac{g(x, T)}{m} \right) \quad \forall x \in \Omega \quad (4)$$

단,

m : 함수 $g(x, T)$ 가 최대도 도달할 수 있는 값,

A : 손실함수가 가지는 최대 손실,

Ω : x 값이 갖는 범위, $(-\infty, \infty)$

등이다.

INLF에서는 식(5)와 같이 목표치 T 를 중심으로 한 정규분포를 사용한다.

$$g(x, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \text{Exp} \left\{ -\frac{(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \quad (5)$$

$$-\infty < x < \infty$$

단,

$$\gamma : \text{형상모수}, \quad \gamma = \frac{\Delta}{4},$$

Δ : 최대 손실 A 가 첫 번째로 발생하는 시점에서의 목표치로부터 떨어진 정도 등이다.

품질특성치 x 가 목표치 T 와 일치할 때

$$g(x, T) \text{의 값이 최대가 되므로 } m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}$$

이고 이를 식(4)에 대입하면 INLF는 식(6)과 같이 정의된다.

$$L(x, T) = A \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \text{Exp} \left\{ \frac{-(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} / \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \right) \right]$$

$$= A \left(1 - \text{Exp} \left\{ \frac{-(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \right) \quad (6)$$

공정 품질특성치가 평균 μ , 표준편차 σ 인 정규분포를 따른다면, 기대손실은 식(7)과 같이 계산된다[6].

$$E[L(x, T)]_I = A \left[1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2}} \text{Exp} \left\{ \frac{-1}{2} \left(\frac{\mu - T}{\sigma^2 + \gamma^2} \right) \right\} \right] \quad (7)$$

정영배 등[1]은 이를 이용하여 다음과 같은 PCI를 제안하였다.

$$C_{PI} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x, T)]_I}} \quad (8)$$

3. EDF를 이용한 PCI

3.1 EDF의 기본 개념

X_1, X_2, \dots, X_n 을 분포함수 $F(x)$ 로부터의 확률표본이라 하면, EDF는 식(9)와 같이 정의된다.

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) \quad (9)$$

즉, $F_n(x)$ 는 전체 표본크기에 대한 x 를 넘지 않는 관측값의 개수의 비율을 의미한다.

EDF는 모집단 분포함수 $F(x)$ 에 대한 비모수적 최우추정량(Nonparametric Maximum Likelihood Estimator : NPMLE)으로서, 다음과 같은 바람직한 특성을 갖는다.

① 불편성 : $E[F_n(x)] = F(x)$

② 일치성 :

$$\text{Var}[F_n(x)] = \frac{1}{n} F(x)[1 - F(x)] \rightarrow 0$$

MLE의 불변(invariance) 원리에 의하면 모수 $\theta = \Psi(F(x))$ 에 대한 추정량 $\hat{\theta} = \Psi(F_n(x))$ 또한 불편성과 일치성을 갖는다. 따라서 NPMLE의 특성을 이용하여 EDF로부터 관심 있는 모수를 대입추정량(plug-in estimator)을 통하여 쉽게 추정할 수 있다.

3.2 EDF를 이용한 기대손실과 PCI

정규분포의 가정 하에서 기대손실을 도출하고 이 기대손실을 기초로 하여 개발된 PCI는 가정이 맞지 않을 경우 공정의 실제 능력을 올바르게 평가하지 못할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 공정 특성치의 분포에 대한 가정에 영향을 받지 않도록 EDF를 통하여 도출된 기대손실에 기초한 PCI를 제안한다.

공정의 분포에 대해 로버스트한 PCI를 유도하기 위해 식(4) 형태의 손실함수에 대해 EDF를 이용하여 기대손실을 구하면 식(10)과 같다.

$$\begin{aligned} E[L(x, T)] &= A \left[1 - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, T) dF_n(x) \right] \\ &= A \left(1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m g(x_i, T) \frac{1}{n} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

공정 품질특성이 망목특성을 갖는다면, 역정규 손실함수가 적합하므로[1], 식(5)를 식(10)에 대입하여 다음과 같이 기대손실을 계산할 수 있다.

$$E[L(x, T)] = \int_{-\infty}^{\infty} A \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \text{Exp} \left\{ \frac{-(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} / \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} \right) \right] dF_n(x)$$

$$= A \left(1 - \sum_{i=1}^n \text{Exp} \left\{ \frac{-(x_i - T)^2}{2\gamma^2} \right\} \frac{1}{n} \right)$$

이와 같이 EDF를 공정의 분포로 하여 INLF로부터 계산된 기대손실과 PCI를 식 (11), (12)과 같이 $E[L(x, T)]_n$ 와 C_{pn} 으로 정의한다.

$$E[L(x, T)]_n = A \left(1 - \sum_{i=1}^n \text{Exp} \left\{ \frac{-(x_i - T)^2}{2\gamma^2} \right\} \frac{1}{n} \right) \quad (11)$$

$$C_{pn} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(x, T)]_n}} \quad (12)$$

3.3 다양한 공정분포에 대한 기대손실

제안된 PCI의 특성을 분석하기 위해 다양한 공정분포에 대하여 기대손실과 PCI의 참값을 구할 필요가 있다. 이때의 참값을 $E[L(x, T)]$ 라하고 이에 기초한 PCI를 C_p^* 라 명명한다.

일양분포, 정규분포, 카이제곱분포, 스튜던트 t 분포, 지수분포 등에 대하여 기대손실을 유도한다. 단, 모든 분포의 평균은 μ , 표준편차는 σ 로 통일하여 계산한다.

3.3.1 일양분포

공정의 분포가 일양분포일 때 밀도함수와 기대값 및 분산은 아래와 같다.

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)},$$

$$E[X] = \frac{b+a}{2} = \mu, \quad V[X] = \frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2$$

따라서 $a = \mu - \sqrt{3}\sigma$, $b = \mu + \sqrt{3}\sigma$ 이며, 기대손실의 참값은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$E[L(x, T)] = \int_a^b$$

$$A \left(1 - \text{Exp} \left\{ \frac{-(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \right) \left(\frac{1}{b-a} \right) dx \\ = A \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2\pi}\gamma}{b-a} \right) \left\{ \phi \left(\frac{b-T}{\gamma} \right) - \phi \left(\frac{a-T}{\gamma} \right) \right\} \right]$$

3.3.2 정규분포

공정의 분포가 정규분포일 때 밀도함수와 기대값 및 분산은 아래와 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Exp} \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$$

$$E[X] = \mu, \quad V[X] = \sigma^2$$

이는 Spiring[7] 및 정영배 등[1]이 가정한 경우로서, 기대손실은 식(7)과 같다.

3.3.3 카이제곱분포

공정의 분포가 카이제곱분포일 때 기대값 및 분산은 아래와 같다.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} \text{Exp} \left\{ -\frac{x}{2} \right\} dx$$

$$\text{단, } \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} \text{Exp} \{-x\} dx$$

$$E[X] = n, \quad V[X] = 2n$$

아래와 같이 평균이 μ 이고, 표준편차가 σ 인 카이제곱분포로 변환한다.

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-n}{\sqrt{2n}},$$

$$x = \left(\frac{x-n}{\sqrt{2n}} \right) \sigma + \mu,$$

$$\therefore x = \left(x' - \mu + \frac{n\sigma}{\sqrt{2n}} \right) \frac{\sqrt{2n}}{\sigma}$$

따라서 기대손실은 아래와 같다.

$$E[L(x, T)] = \int_{\mu - \frac{n\sigma}{\sqrt{2n}}}^{\infty} A \left(1 - \text{Exp} \left\{ \frac{-(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \right) \times \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \left((x - \mu + \frac{n\sigma}{\sqrt{2}}) \frac{\sqrt{2n}}{n\sigma} \right)^{\frac{n}{2}-1} \text{Exp} \left\{ -\frac{(x - \mu + \frac{n\sigma}{\sqrt{2}}) \frac{\sqrt{2n}}{n\sigma}}{2} \right\} \right) dx$$

3.3.4 스튜던트 t분포

공정의 분포가 스튜던트 t 분포일 때 밀도함수와 기댓값 및 분산은 아래와 같다.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$E[X] = 0, \quad V[X] = \frac{n}{n-2}$$

평균이 μ , 표준편차가 σ 인 분포로 변환하면,

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = \sqrt{\frac{x}{\frac{n}{n-2}}}$$

$$x' = \sqrt{\frac{x \times \sigma}{\frac{n}{n-2}}} + \mu$$

$$\therefore x = (x' - \mu) \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma \sqrt{n-2}}$$

따라서 기대손실은 다음과 같다.

$$E[L] = \int_{-\infty}^{\infty} A \left(1 - \exp \left\{ \frac{-(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \right) \times \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{\left((x - \mu) \frac{\sqrt{n}}{\sigma \sqrt{n-2}} \right)^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \right) dx$$

3.3.5 지수분포

공정의 분포가 지수분포일 때 기댓값 및 분산은 아래와 같다.

$$f(x) = \lambda \text{Exp}(-\lambda x),$$

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

아래와 같이 평균이 μ 이고, 표준편차가 σ 인 지수분포로 변환한다.

$$\frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 1/\lambda}{1/\lambda}$$

$$x' = \left(\frac{x - 1/\lambda}{1/\lambda} \right) \sigma + \mu,$$

$$\therefore x = (x' - \mu + \sigma) \lambda$$

따라서 기대손실은 다음과 같다.

$$E[L(x, T)] = \int_{\mu - \sigma}^{\infty} A \left(1 - \text{Exp} \left\{ \frac{-(x-T)^2}{2\gamma^2} \right\} \right) \lambda e^{-\lambda(x - \mu + \sigma)} dx$$

3.4 비대칭 손실함수의 기대손실

손실함수가 <그림 4>와 같이 비대칭일 경우 정규분포에 근거한 기대손실을 계산하기는 어려우나, EDF를 사용하면 쉽게 기대손실을 구할 수 있다.

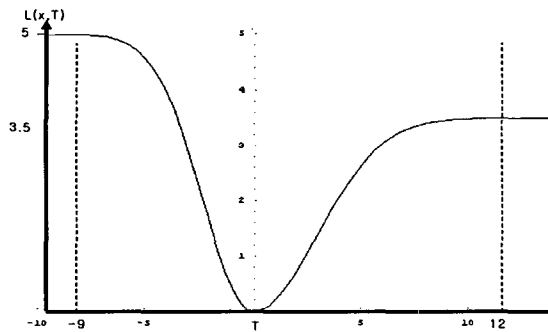
공정 $f(x)$ 에 대한 손실함수가 비대칭일 경우의 기대손실은 아래와 같다.

$$E[L(x, T)] = \int_{-\infty}^T A_1 \left(1 - \text{Exp} \left(-\frac{(x-T)^2}{2\gamma_1^2} \right) \right) f(x) dx + \int_T^{\infty} A_2 \left(1 - \text{Exp} \left(-\frac{(x-T)^2}{2\gamma_2^2} \right) \right) f(x) dx$$

따라서 EDF를 이용한 기대손실은 아래와 같이 계산된다.

$$E[L(x, T)]_n = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^T A_1 \left(1 - \text{Exp} \left(\frac{-(x_i - T)^2}{\gamma_1^2} \right) \right) + \sum_{j=T+1}^n A_2 \left(1 - \text{Exp} \left(\frac{-(x_j - T)^2}{\gamma_2^2} \right) \right) \right]$$

단, $(x_i \leq T, x_j > T, i=1, 2, \dots, T, j=T+1, T+2, \dots, n)$



<그림 4> 비대칭 손실함수

4. 모의실험

다양한 공정분포 하에서, 본 논문에서 제안한 기대손실 $E[L(x, T)]_n$ 및 PCI C_{pn} 을 정규분포 가정 하에서 유도된 기대손실 $E[L(x, T)]_{[6]}$ 및 PCI $C_{pl}[1]$ 와 비교하고자 한다.

편의상 다음과 같이 기호를 축약한다.

$E[L]$: 각 공정분포에 해당하는 기대손실의 참값(= $E[L(x, T)]$)

C_p^+ : 각 공정분포에 해당하는 PCI의 참값

$E[L]_I$: 공정 분포를 정규분포로 가정했을 때의 기대손실, $E[L(x, T)]_z$

C_{pl} : 공정의 분포를 정규분포로 가정했을 때의 PCI

$E[L]_n$: EDF 기대손실, $E[L(x, T)]_n$

C_{pn} : EDF를 이용한 PCI

표에서 표준오차 및 상대오차는 다음을 의미한다.

표준오차 : 각 추정치에 대한 표준편차

상대오차 $\times 100$: $\{(참값 - 추정치)/참값\} \times 100$

4.1 모의실험 절차

각 공정분포에 대한 비교 모의실험 절차는 다음과 같다.

- ① 공정의 분포와 표본의 크기를 정한다.
- ② 각 분포에 해당하는 모수값을 정한다.
- ③ 각 분포에 해당하는 기대손실 및, PCI의 참값 ($E[L], C_p^+$)을 계산한다.
- ④ 각 분포에 해당하는 데이터를 생성한다.
- ⑤ 각 분포에 해당하는 $E[L]_I, E[L]_n, C_{pl}, C_{pn}$ 값을 도출한다.
- ⑥ 표본크기를 바꾸어 위의 실험을 1000회 반복 실행한다.
- ⑦ 1000개의 각 기대손실 및 PCI의 평균값, 편차 및 절대오차를 통하여 각 분포에 더 강건한 PCI를 판별한다.

4.2 모의실험 결과 분석

3장에서 살펴본 다양한 공정분포에 대하여 $\gamma = 2.25$ 인 INLF를 사용하여 표본크기 30과 100에 대하여 목표치를 변화시켜가며 모의실험을 수행하였다.

4.2.1 일양분포

공정의 분포를 평균 50, 표준편차 2인 일양분포라 하면, $a \approx 46.5, b \approx 53.5$ 에 해당한다. 목표치의 변화에 따른 기대손실 및 PCI를 계산한 결과는 각각 <표 1> 및 <표 2>와 같다.

공정의 분포가 일양분포일 때 표본크기 및 목표치에 상관없이 $E[L]_n, C_{pn}$ 이 $E[L]_I, C_{pI}$ 보다 참값 C_p^+ 에 근접함을 알 수 있다. 표준오차는 $E[L]_I, C_{pI}$ 이 더 작은 값을 보였으나 큰 차이는 없었으며, 정확도 면에서 EDF에 근거한 손실함수와 PCI가 월등함을 알 수 있다.

특히 공정평균이 공정의 목표치와 일치하는 경우 정규분포 가정에 근거한 기대손실은 참 값을 과소평가하여 결과적으로 PCI를 약 6% 이상 과대평가하는 경향이 있었다. 반면에 EDF에 근거한 기대손실 및 PCI는 이러한 경향이 적었고, PCI 추정치의 평균 상대오차는 0.26%를 넘지 않고 안정적인 것으로 나타났다.

<표 1> 공정의 분포가 일양분포일 때 목표치에 따른 기대손실 비교

(기대손실, 표준오차) 상대오차 $\times 100\%$

목표치	E[L]	Sample Size (n)	
		30	
		$E[L]_I$	$E[L]_n$
48	2.018	(2.028, 0.247) 0.50%	(2.022, 0.299) 0.22%
48.5	1.778	(1.730, 0.225) 2.70%	(1.782, 0.283) 0.25%
49	1.600	(1.502, 0.186) 6.11%	(1.609, 0.246) 0.54%
49.5	1.491	(1.352, 0.1567) 9.30%	(1.496, 0.225) 0.33%
50	1.454	(1.297, 0.141) 10.79%	(1.450, 0.210) 0.26%
		100	
48	2.018	(2.013, 0.142) 0.23%	(2.017, 0.177) 0.07%
48.5	1.778	(1.717, 0.119) 3.45%	(1.780, 0.153) 0.11%
49	1.600	(1.484, 0.105) 7.23%	(1.602, 0.141) 0.11%
49.5	1.491	(1.338, 0.081) 10.26%	(1.493, 0.117) 0.12%
50	1.454	(1.287, 0.072) 11.47%	(1.456, 0.109) 0.11%

($\gamma=2.25$)

<표 2> 공정의 분포가 일양분포일 때 목표치에 따른 PCI 비교

(PCI, 표준오차) 상대오차 $\times 100\%$

목표치	C_p^+	Sample Size (n)	
		30	
		C_{pI}	C_{pn}
48	2.347	(2.341, 0.150) 0.27%	(2.344, 0.185) 0.13%
48.5	2.500	(2.534, 0.174) 1.37%	(2.497, 0.211) 0.13%
49	2.635	(2.720, 0.175) 3.21%	(2.628, 0.210) 0.26%
49.5	2.730	(2.866, 0.175) 4.99%	(2.725, 0.218) 0.17%
50	2.764	(2.927, 0.166) 5.89%	(2.768, 0.209) 0.15%
		100	
48	2.347	(2.349, 0.084) 0.09%	(2.347, 0.106) 0.01%
48.5	2.500	(2.544, 0.089) 1.77%	(2.498, 0.109) 0.06%
49	2.635	(2.736, 0.098) 3.83%	(2.634, 0.118) 0.05%
49.5	2.730	(2.882, 0.089) 5.55%	(2.728, 0.109) 0.07%
50	2.764	(2.983, 0.083) 6.29%	(2.763, 0.105) 0.04%

($\gamma=2.25, USL - LSL = 20$)

4.2.2 정규분포

공정의 분포를 정규분포라 가정하고, 목표치, 형상모수 및 표준편차를 변화시키면서 실험을 수행한 결과는 <표 3> 및 <표 4>와 같다.

표본이 크지 않은 경우 ($n=30$)에는 공정의 분포가 정규분포일 때에도 거의 모든 경우에 있어서 $E[L]_n, C_{pn}$ 과 $E[L]_I, C_{pI}$ 가 비슷한 정확도를 나타내는 것을 알 수 있다. 이론상 정규분포의 가정 하에서 개발된 $E[L]_I$ 과 C_{pI} 가 $E[L]_n$ 과 C_{pn} 보다 참값 C_p^+ 에 근접할 것으로 예상되었으나, EDF 기대손실 및 PCI도

이에 못지않은 정확도를 나타낸 것이다. 표본이 큰 경우 ($n=100$)에는 예상대로 $E[L]_I$ 와 C_{pl} 의 정확도가 더 우수하였으나, $E[L]_n$ 과 C_{pm} 또한 상대오차가 1%를 넘지 않았다. 정밀도 측면에서는 $E[L]_I, C_{pl}$ 가 다소 우수하였으나 큰 차이를 보이지는 않았다. 이러한 결과는 정규분포의 가정이 옳은 경우라 할지라도 EDF PCI를 실제 공정에 적용할 수 있다는 가능성을 보여준다.

<표 3> 공정의 분포가 정규분포일 때 목표치에 따른 기대손실 비교
(기대손실, 표준오차) 상대오차 $\times 100\%$

목표치	$E[L]$	Sample Size (n)	
		30	
		$E[L]_I$	$E[L]_n$
40	4.985	(4.982, 0.013) 0.06%	(4.986, 0.013) 0.02%
42	4.891	(4.882, 0.055) 0.18%	(4.891, 0.058) 0.00%
44	4.487	(4.472, 0.152) 0.33%	(4.477, 0.158) 0.22%
46	3.454	(3.478, 0.263) 0.69%	(3.468, 0.280) 0.41%
48	2.003	(2.026, 0.271) 1.15%	(2.015, 0.290) 0.60%
50	1.263	(1.270, 0.211) 0.55%	(1.271, 0.233) 0.63%
100			
40	4.985	(4.985, 0.006) 0.00%	(4.986, 0.008) 0.02%
42	4.891	(4.888, 0.029) 0.06%	(4.891, 0.032) 0.00%
44	4.487	(4.484, 0.080) 0.07%	(4.485, 0.083) 0.04%
46	3.454	(3.457, 0.142) 0.09%	(3.452, 0.150) 0.06%
48	2.003	(2.000, 0.139) 0.15%	(1.998, 0.155) 0.25%
50	1.263	(1.262, 0.114) 0.08%	(1.268, 0.125) 0.40%

($\mu = 50, \sigma = 2, \gamma = 2.25$)

<표 4> 공정의 분포가 정규분포일 때 목표치에 따른 PCI 비교
(PCI, 표준오차) 상대오차 $\times 100\%$

목표치	C_p^+	Sample Size (n)	
		30	
		C_{pl}	C_{pm}
40	1.493	(1.493, 0.002) 0.00%	(1.493, 0.002) 0.00%
42	1.507	(1.509, 0.009) 0.13%	(1.507, 0.009) 0.00%
44	1.574	(1.576, 0.027) 0.13%	(1.575, 0.028) 0.06%
46	1.794	(1.788, 0.069) 0.33%	(1.7900, 0.074) 0.22%
48	2.355	(2.342, 0.165) 0.55%	(2.348, 0.178) 0.30%
50	2.966	(2.957, 0.263) 0.30%	(2.956, 0.288) 0.34%
100			
40	1.493	(1.493, 0.001) 0.00%	(1.493, 0.001) 0.00%
42	1.507	(1.508, 0.004) 0.07%	(1.507, 0.005) 0.00%
44	1.574	(1.574, 0.014) 0.00%	(1.574, 0.015) 0.00%
46	1.794	(1.793, 0.037) 0.06%	(1.794, 0.039) 0.00%
48	2.355	(2.357, 0.083) 0.08%	(2.358, 0.093) 0.13%
50	2.966	(2.967, 0.136) 0.03%	(2.960, 0.149) 0.20%

($\mu = 50, \sigma = 2, \gamma = 2.25, USL - LSL = 20$)

4.2.3 카이제곱분포 (χ^2)

공정의 분포가 평균 50, 표준편차 2를 갖는 변환된 카이제곱분포를 따른다고 가정하고, 목표치를 변화시키면서 실험을 수행한 결과는 <표 5> 및 <표 6>과 같다. 이때는 공정이 비대칭 분포를 따르므로 목표치가 공정평균보다 큰 경우에 대해서도 실험을 수행하였다.

<표 5> 공정의 분포가 χ^2 분포일 때
 목표치에 따른 기대손실 비교
 (기대손실, 표준오차) 상대오차 $\times 100\%$

목표치	$E[L]$	Sample Size (n)	
		30	
		$E[L]_l$	$E[L]_n$
40	4.997	(4.985, 0.011) 0.24%	(4.997, 0.003) 0.00%
42	4.950	(4.896, 0.040) 1.09%	(4.951, 0.013) 0.02%
44	4.596	(4.512, 0.102) 1.83%	(4.604, 0.079) 0.17%
46	3.387	(3.467, 0.199) 2.36%	(3.406, 0.226) 0.56%
48	1.649	(1.959, 0.344) 18.81%	(1.658, 0.304) 0.57%
50	1.133	(1.235, 0.300) 8.96%	(1.123, 0.210) 0.89%
52	2.275	(2.023, 0.200) 11.08%	(2.251, 0.251) 1.05%
54	3.671	(3.479, 0.311) 5.23%	(3.650, 0.265) 0.57%
56	4.489	(4.501, 0.208) 0.27%	(4.497, 0.180) 0.18%
58	4.829	(4.887, 0.081) 1.21%	(4.840, 0.104) 0.23%
		100	
40	4.997	(4.986, 0.005) 0.22%	(4.997, 0.005) 0.00%
42	4.950	(4.896, 0.023) 1.09%	(4.950, 0.007) 0.00%
44	4.596	(4.501, 0.059) 2.07%	(4.601, 0.045) 0.11%
46	3.387	(3.463, 0.109) 2.25%	(3.400, 0.124) 0.39%
48	1.649	(1.969, 0.188) 19.43%	(1.651, 0.164) 0.09%
50	1.133	(1.235, 0.172) 8.96%	(1.127, 0.117) 0.51%
52	2.275	(2.001, 0.109) 12.04%	(2.248, 0.145) 1.19%
54	3.671	(3.469, 0.171) 5.50%	(3.656, 0.143) 0.41%
56	4.489	(4.497, 0.127) 0.18%	(4.491, 0.103) 0.04%
58	4.829	(4.893, 0.045) 1.32%	(4.839, 0.058) 0.21%

($\mu = 50, \sigma = 2, \gamma = 2.25, n = 4$)

<표 6> 공정의 분포가 χ^2 분포일 때
 목표치에 따른 PCI 비교
 (PCI, 표준오차) 상대오차 $\times 100\%$

목표치	C_p^+	Sample Size (n)	
		30	
		C_{pl}	C_{pm}
40	1.491	(1.493, 0.002) 0.13%	(1.491, 0.000) 0.00%
42	1.498	(1.506, 0.006) 0.53%	(1.498, 0.002) 0.00%
44	1.555	(1.569, 0.018) 0.90%	(1.553, 0.013) 0.13%
46	1.811	(1.790, 0.053) 1.15%	(1.806, 0.061) 0.27%
48	2.596	(2.381, 0.232) 8.26%	(2.588, 0.253) 0.29%
50	3.131	(3.000, 0.382) 4.18%	(3.146, 0.313) 0.47%
52	2.210	(2.340, 0.115) 5.88%	(2.224, 0.126) 0.60%
54	1.740	(1.787, 0.081) 2.70%	(1.745, 0.065) 0.29%
56	1.573	(1.571, 0.038) 0.13%	(1.572, 0.032) 0.06%
58	1.517	(1.508, 0.013) 0.61%	(1.515, 0.017) 0.12%
		100	
40	1.491	(1.493, 0.001) 0.13%	(1.491, 0.000) 0.00%
42	1.498	(1.507, 0.004) 0.60%	(1.498, 0.001) 0.00%
44	1.555	(1.571, 0.010) 1.03%	(1.554, 0.008) 0.06%
46	1.811	(1.791, 0.028) 1.09%	(1.808, 0.033) 0.19%
48	2.596	(2.375, 0.117) 8.50%	(2.595, 0.132) 0.05%
50	3.131	(3.000, 0.214) 4.18%	(3.139, 0.167) 0.28%
52	2.210	(2.357, 0.065) 6.65%	(2.223, 0.073) 0.59%
54	1.740	(1.790, 0.044) 2.87%	(1.743, 0.034) 0.17%
56	1.573	(1.572, 0.022) 0.06%	(1.573, 0.018) 0.00%
58	1.517	(1.507, 0.007) 0.66%	(1.515, 0.009) 0.11%

($\mu = 50, \sigma = 2, \gamma = 2.25, n = 4, USL - LSL = 20$)

결과를 살펴보면 모든 경우에 있어서 EDF 기대손실 및 PCI의 정확도가 더 우수하였다. 특히 목표치가 공정평균보다 1σ 만큼 작은 48인 경우, 정규가정에 근거한 기대손실의 상대오차는 20%에 육박하였으며, 이에 따라 PCI의 상대오차 또한 8%를 상회하였다. 이에 반해 EDF PCI는 거의 모든 경우에 있어서 1% 미만의 상대오차를 보임으로써 실제 사용하는데 무리가 없음을 알 수 있다.

4.2.4 스튜던트 t 분포

공정의 분포를 스튜던트 t 분포라 가정하고, 실험을 수행한다. 이 경우에는 t 분포 고유의 특성을 살리기 위해 공정의 평균을 목표치에 일치시키고 자유도를 변화시켜가며 추이를 관측하였다. 실험 결과는 <표 7> 및 <표 8>과 같다.

<표 7> 공정의 분포가 t 분포일 때 자유도에 따른 각 기대손실 비교

자유도	$E[L]$	Sample Size (n)	
		30	
		$E[L]_l$	$E[L]_u$
3	0.720	(0.917, 0.415) 27.36%	(0.711, 0.191) 1.28%
4	0.638	(0.738, 0.267) 15.63%	(0.631, 0.164) 1.08%
5	0.591	(0.660, 0.204) 11.75%	(0.601, 0.153) 1.68%
6	0.561	(0.604, 0.180) 7.65%	(0.557, 0.144) 0.72%
100	0.438	(0.449, 0.098) 2.46%	(0.441, 0.098) 0.68%
100			
3	0.720	(0.965, 0.277) 34.01%	(0.718, 0.098) 0.31%
4	0.638	(0.748, 0.174) 17.18%	(0.632, 0.087) 0.94%
5	0.591	(0.656, 0.123) 11.07%	(0.589, 0.079) 0.27%
6	0.561	(0.612, 0.109) 9.11%	(0.563, 0.076) 0.33%
100	0.438	(0.442, 0.055) 0.81%	(0.439, 0.056) 0.14%

($T=0, A=5, \gamma=2.25$)

<표 8> 공정의 분포가 t 분포일 때 자유도에 따른 각 PCI 비교

자유도	C_p^+	Sample Size (n)	
		30	
		C_{pl}	C_{pm}
3	3.929	(3.481, 0.782) 11.40%	(3.954, 0.594) 0.63%
4	4.174	(3.881, 0.715) 7.02%	(4.196, 0.596) 0.53%
5	4.337	(4.102, 0.675) 5.42%	(4.299, 0.619) 0.86%
6	4.451	(4.289, 0.684) 3.63%	(4.466, 0.640) 0.35%
100	5.039	(4.976, 0.580) 1.25%	(5.020, 0.589) 0.39%
100			
3	3.929	(3.394, 0.453) 13.63%	(3.935, 0.281) 0.14%
4	4.174	(3.855, 0.415) 7.64%	(4.193, 0.298) 0.45%
5	4.337	(4.114, 0.392) 5.14%	(4.340, 0.297) 0.11%
6	4.451	(4.261, 0.373) 4.28%	(4.443, 0.313) 0.18%
100	5.039	(5.016, 0.317) 0.45%	(5.033, 0.326) 0.12%

($T=0, A=5, \gamma=2.25, USL - LSL = 20$)

자유도가 작을수록 공정의 산포 및 첨도(kurtosis)가 커지며, 이는 목표치를 벗어난 품질특성치의 밀도가 높음을 의미한다. 반면에 자유도가 무한대가 되면 t 분포는 정규분포와 일치한다. 결과를 살펴보면 모든 경우에 있어서 EDF 기대손실 및 PCI의 정확도가 더 우수함을 알 수 있다. 특히 자유도가 작을수록 정규가정에 근거한 기대손실의 상대오차는 증가하여 30%를 상회하였으며, 이에 따라 PCI의 상대오차 또한 12%를 상회하였다. 이에 반해 EDF PCI는 거의 모든 경우에 있어서 1% 미만의 상대오차를 보임으로써 실제 사용하는데 무리가 없음을 알 수 있다. 자유도가 100일 때 t 분포는 정규분포와 구분할 수 없을 정도로 유사한데, 이

경우에 있어서도 EDF 기대손실 및 PCI의 정확도가 확연히 높았다.

4.2.5 지수분포

공정의 분포를 지수분포라 가정하면, 이때의 품질특성치는 작을수록 바람직한 경우가 적합하므로, 손실함수를 INLF의 상위 반만을 사용하였다. 목표치 $T=0$ 으로 놓고, 공정 평균의 역수인 λ 를 변화시키면서 실험을 수행한 결과는 <표 9> 및 <표 10>과 같다.

<표 9> 공정의 분포가 지수분포일 때 λ 에 따른 기대손실 비교

λ	$E[L]$	Sample Size (n)	
		30	
		$E[L]_l$	$E[L]_r$
3	0.103	(0.108, 0.042) 5.08%	(0.104, 0.038) 0.56%
2	0.217	(0.236, 0.090) 8.76%	(0.219, 0.076) 0.92%
1	0.667	(0.780, 0.243) 16.94%	(0.663, 0.174) 0.60%
0.5	1.541	(1.938, 0.390) 25.76%	(1.528, 0.299) 0.84%
0.1	3.811	(4.299, 0.139) 12.81%	(3.799, 0.314) 3.15%
0.05	4.354	(4.661, 0.065) 7.05%	(4.375, 0.256) 0.48%
0.01	4.862	(4.932, 0.133) 1.44%	(4.863, 0.128) 0.02%
100			
3	0.103	(0.108, 0.026) 4.40%	(0.104, 0.024) 0.52%
2	0.217	(0.235, 0.048) 8.29%	(0.218, 0.040) 0.46%
1	0.667	(0.791, 0.136) 18.59%	(0.670, 0.098) 0.45%
0.5	1.541	(1.984, 0.217) 28.75%	(1.541, 0.166) 0.00%
0.1	3.811	(4.317, 0.071) 13.28%	(3.808, 0.169) 0.08%
0.05	4.354	(4.656, 0.035) 6.94%	(4.348, 0.146) 0.14%
0.01	4.862	(4.932, 0.007) 1.44%	(4.861, 0.069) 0.02%

($T=0, \gamma=2.25$)

결과를 살펴보면 모든 경우에 있어서 EDF 기대손실 및 PCI의 정확도가 더 우수함을 알 수 있다. 대칭성이 요구되지 않는 망소특성의 경우에도 정규가정 하의 PCI는 10%를 상회하는 상대오차를 보인 반면, EDF에 근거한 PCI는 1% 미만의 안정적인 정확도를 보였다.

<표 10> 공정의 분포가 지수 분포일 때 λ 에 따른 PCI 비교

λ	C_p^+	Sample Size (n)	
		30	
		C_{PI}	C_{PM}
3	10.376	(10.132, 2.145) 2.35%	(10.357, 2.105) 0.18%
2	7.153	(6.860, 1.445) 4.10%	(7.119, 1.383) 0.48%
1	4.081	(3.775, 0.659) 7.50%	(4.093, 0.604) 0.29%
0.5	2.685	(2.395, 0.274) 10.80%	(2.696, 0.286) 0.41%
0.1	1.707	(1.608, 0.0267) 5.80%	(1.710, 0.073) 0.18%
0.05	1.598	(1.544, 0.011) 3.38%	(1.594, 0.048) 0.25%
0.01	1.512	(1.501, 0.002) 0.73%	(1.512, 0.020) 0.00%
100			
3	10.376	(10.165, 1.095) 2.04%	(10.360, 1.058) 0.16%
2	7.153	(6.882, 0.738) 3.79%	(7.139, 0.691) 0.20%
1	4.081	(3.748, 0.337) 8.16%	(4.072, 0.308) 0.22%
0.5	2.685	(2.366, 0.134) 11.88%	(2.685, 0.148) 0.00%
0.1	1.707	(1.604, 0.013) 6.03%	(1.708, 0.038) 0.06%
0.05	1.598	(1.545, 0.006) 3.32%	(1.599, 0.027) 0.06%
0.01	1.512	(1.501, 0.001) 0.73%	(1.512, 0.011) 0.00%

($T=0, \gamma=2.25, USL - LSL = 20$)

5. 결론

본 연구에서는 EDF를 이용하여 기대손실을 계산하고, 이에 기초한 PCI를 제안하였다. 다양한 상황을 반영한 모의실험을 통하여 새로운 기대손실 $E[L(x, T)]_n$ 과 PCI C_{pm} 이 공정의 분포에 관계없이 정규분포의 가정에 근거한 $E[L(x, T)]_L$, C_{pl} 에 비해 강건(robust)하고, 손실함수가 비대칭인 경우에도 계산이 용이하다는 것을 알 수 있었다.

따라서 공정의 분포를 알 수 없거나 알아내기 힘들 때, 공정의 분포를 정규분포로 가정하여 기대손실을 얻는 것보다는 EDF를 이용한 기대손실에 기초한 PCI를 사용하는 것이 더 적합하다는 것을 알 수 있었다.

추후 연구로는 비대칭 규격에 적합한 손실함수 및 PCI의 개발 및 특성연구, 오염된 공정 분포에 대한 PCI의 특성 연구 등이 기대된다.

pp.162-175.

- [4] Juran, J.M.E. (1974) *Quality Control Handbook*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, N.Y.
- [5] Kane, V.E. (1986), "Process Capability Indices", *Journal of Quality Technology*, Vol.18, No.1, pp.41-52.
- [6] Spiring, F.A. (1993), "The reflected normal loss function", *The Canadian Journal of Statistics*, Vol.21, No.3, pp.321-330.
- [7] Spiring, F.A and, Yeung, A.S. (1998), "A General Class of Loss Functions with Industrial Applications", *Journal of Quality Technology*, Vol. 30, No. 2, pp.152-162.

참고문헌

- [1] 정영배, 문혜진 (2002), "역정규 손실함수를 이용한 공정능력지수에 관한 연구", 「한국품질관리학회지」 Vol.30, No.3, pp. 66-78.
- [2] Boyles, R.A. (1991), "The Taguchi Capability Index", *Journal of Quality Technology*, Vol.23, No.1, pp.17-26.
- [3] Chan, L.K., Cheng, S.W., and Spring, F.A. (1988), "A New Measure of Process Capability : C_{pm} ", *Journal of Quality Technology*, Vol.20, No.3,