

무거운 헤일로를 가진 구형 은하의 역학 모형

천문석^{1†}, 고훈성¹, 손영종²

¹연세대학교 천문우주학과

²연세대학교 자외선우주망원경연구단

DYNAMICAL MODELS OF SPHERICAL GALAXIES WITH MASSIVE HALO

Chun, Mun-Suk^{1†}, Ko, Hun-Sung¹, and Sohn, Young-Jong²

¹Dept. of Astronomy, Yonsei University, Seoul 120-749, Korea

²Center for Space Astrophysics, Yonsei University, Seoul 120-749, Korea

E-mail: mschun@galaxy.yonsei.ac.kr

(Received October 14, 2002; Accepted February 16, 2003)

요약

Schwarzschild의 선형 계획법을 사용하여 평형상태에서의 구형은하를 기술하는 비 충돌 볼츠만 방정식의 일반적인 해를 얻었다. 이 계산으로부터 de Vaucouleurs의 광도 법칙을 만족하고 무거운 헤일로를 포함하는 등방성 구형은하의 존재를 확인할 수 있었다. 타원은하에서 속도 분산 곡선이 편평하거나 서서히 증가하는 현상은 암흑물질에 의한 질량대 광도비의 증가로 해석할 수 있다. 이런 경우 암흑물질의 밀도 분포는 core 반경이 은하의 유효반경보다 훨씬 작은 값을 갖는다는 사실을 확인할 수 있었다.

ABSTRACT

Using the Schwarzschild's linear programming technique, we obtained the general solutions of the collisionless Boltzmann equation describing the spherical galaxy in dynamical equilibrium. From this calculation we have confirmed the existence of isotropic spherical galaxies obeying a de Vaucouleurs' law which includes a dark halo. The flattening profile of the velocity dispersion curve seen in the elliptical galaxies can be explained as the increase of mass to light ratio in this dark matter. The space density distribution of this dark matter shows that the core radius of the dark matter is smaller than the effective radius of the galaxy.

Key words: spherical galaxy, dark matter, dark halo

1. 서 론

암흑 물질의 존재에 대한 문제는 1933년 Zwicky가 Coma 은하단에서 비리얼 정리를 이용하여 얻은 질량대 광도비(이하 M/L)가 아주 높게 구해져서, 이를 해석하는 과정에서 이 현상이 암흑 물질에 의한 것으로 문제를 제기한 이래(Binney & Tremaine 1987), 현재까지 missing mass 문제에 대해 여러 관측적인 증거들이 제시되어 왔으며 또한 이론적 연구도 진행되어 왔다. 이에 따라 예상되는 암

[†]corresponding author

흑 물질의 존재와 성질에 관한 연구들은 우주의 궁극적인 모습을 이해하는데 중요한 정보를 제공한다.

대부분의 나선은하들에서 21cm 파장 영역으로 관측한 회전 속도 곡선(e.g., Rubin et al. 1980)은 은하 중심으로부터의 거리가 증가함에도 불구하고 회전 속도가 거의 변하지 않음을 보이고 있다. 이 경우 만약 암흑 물질이 구대칭적으로 분포한다면 밀도 분포는 r^{-2} 으로 변하고 거리에 따른 누적 질량은 선형적으로 증가한다. Kent(1986)는 은하를 원반부, 핵 팽창부, 그리고 혜일로로 나누고 관측되는 회전 속도 곡선에 맞추어 혜일로의 구조를 결정하려는 시도를 하였다. 그러나 타원은하들의 경우 상대적으로 높은 광도를 가지는 은하들이 작은 회전 속도를 가지며(Illingworth 1977), 투영된 단축 주위로의 미세한 운동(Schechter & Gunn 1979)이 검출된다. 이러한 사실들은 이 계의 편평도가 자전에 의한 것이 아니고 third integral에 의한 속도 분산의 비 등방성에 기인되는 것으로 해석되어 속도 분산이 중요한 운동학적 자료로 떠 올랐다(Binney 1976). 타원은하에서 성간 가스의 함량이 나선은하 보다 부족하다는 사실을 Mathews & Baker(1971)는 초신성의 영향을 받은 은하풍 이론으로 설명하였으나, 근래 X-선 관측들에서 종족 II 별들이 갖는 큰 속도 분산 때문에 이 별들에 의해 생겨난 성간 물질이 $10^7 K$ 의 뜨거운 가스로 발견됨으로써 무거운 혜일로에 대한 문제가 새로이 대두되었다. 이러한 증거들로부터 나선은하와 유사하게 타원은하에 대해서도 속도 분산 값이 은하 중심으로부터의 거리에 따라 감소하지 않는다는 사실은 암흑 물질에 의한 M/L 의 증가로 설명하려는 시도가 cD은하(Carter et al. 1985)와 정상 타원은하(Davies 1981)에서 있었다. 은하군에 대해서는 Gott & Turner(1976)과 Kirshner(1977)가 역학적 근거로부터 이 계도 missing mass 문제를 공유한다는 사실을 밝혀 내었다. 그리고 이중 은하(binary galaxy)에서도 Turner(1976)가 통계적 방법을 사용하여 무거운 혜일로가 존재함을 시사하였다.

타원은하의 은하 중심으로부터 먼 거리 까지 분포하는 성간 물질에서 암흑 물질의 존재를 알 수 있는 방법으로는 X-선을 방출하는 뜨거운 가스의 정역학적 평형 상태를 이용하는 방법, 나선은하와 유사하게 중성 수소의 회전 속도 곡선을 이용하는 방법, 그리고 바깥 부분에서 캡질(shell) 구조를 가지고 있는 은하에서 얻을 수 있는 포텐셜에 의한 방법 등이 있다. 나선은하에서는 회전속도 곡선의 형태가 은하의 바깥영역에서 편평한 경향을 보여 암흑 물질의 존재를 나타내지만, 타원은하는 이의 존재를 나타낼만한 가스나 원반을 일반적으로 가지지 않는다. 그러나 최근 열 복사에서 나타나는 X-선을 방출하는 뜨거운 가스가 타원은하에도 일반적으로 나타나는 것이 알려진 이후(Forman et al. 1985, Trinchieri & Fabbiano 1985), X-선 코로나가 은하의 총 중력 포텐셜을 결정하는 지시자로 사용되기 때문에 정 역학적 평형상태에서의 뜨거운 가스의 분포가 은하 전체의 질량분포를 나타낼 수 있다. 정역학적 방정식에 근거한 타원은하의 질량은 온도 분포에 큰 영향을 받는데, Fabricant & Gorenstein(1983)은 온도 분포가 잘 관측되는 M87에 대해 $10^{13} M_{\odot}$ 의 총 질량을 얻었다. 이로부터 은하 전체에 대한 M/L 이 150정도로 계산된 반면, 국부 M/L 이 500 이상임을 계산하여 암흑 물질이 은하 전체 질량의 대부분을 차지한다는 추정을 하였다. Stewart et al.(1984)는 M87의 암흑 물질의 core 반경이 50kpc 보다 작기 때문에 Virgo 은하단의 core 반경(약 250kpc)에 포함되며, 관측되는 영역에서 또 다른 밝은 은하가 없기 때문에 암흑 물질이 M87의 주성분임을 주장하였다.

cD은하에 비해 상대적으로 낮은 X-선 복사를 방출하고 있는 정상 타원은하에 대한 Sarazin & Whiten(1988)의 연구결과에 의하면 단위 체적당(cm^3) 뜨거운 가스의 밀도가 10^{-2} 보다 크게 나타

나고 있으며, 거리에 따라 $r^{-1.5}$ 로 감소하는 밀도분포를 보인다. 또한 총 가스 질량은 $10^9 \sim 10^{10} M_\odot$ 정도로 은하의 총 질량에 대해 그 상대적 비가 2% 정도에 지나지 않는다. 이 가스 부족 현상을 설명하기 위해 cooling flow 모델이 제시되었으며, 이 모델에 의하면 별들의 질량 손실에 의해 생성되는 물질들이 은하의 중심부로 낙하하면서 복사 방출에 의해 냉각되어 새로운 별들로 생성되어 암흑 물질의 형태로 존재하기 때문에 가스 부족현상이 나타난다(Nulsen et al. 1984, White & Chevalier 1984). Forman et al.(1985)는 정상 타원은하의 온도를 $1.2 \times 10^7 K$ 의 일정한 온도 분포로 가정하고 13개 은하들에 대한 질량과 M/L 을 얻었는데, 이 결과에 의하면 M/L 비가 평균 40 정도로 정상 타원은하에서도 무거운 헤일로가 존재함을 알 수 있다.

타원은하에 존재하는 중성 수소는 나선은하에서와는 달리 가스가 풍부한 다른 은하들로부터 포획된 것으로 보이는 여러 관측적 증거들이 있다. Gottsman & Hawarden(1986)에 의하면 NGC 5084에서는 중성 수소가 은하의 본체에서 멀리 떨어진 외곽부에서 고리의 형태로 분포함을 관측하였고, van Gorkom et al.(1986)은 가스의 구조가 조석 꼬리(tidal tail)를 연상시키는 휘어진 형태로 관측되고 특히 가스의 각운동량이 별들의 각운동량 보다 훨씬 커서 그 기원이 별들과는 무관한 외적 환경 때문에 나타나는 현상으로 설명하였다. NGC 4278에 대해서는 중성수소 관측으로부터 얻어진 회전속도 곡선(Raimond et al. 1981)이 나선은하와 비슷하게 편평한 형태를 보이기 때문에 비록 중성 수소가 붕심 부근에서 관측되지는 않지만 바깥 부분에서는 암흑 물질의 분포가 등온적임을 알 수 있다. 한편 Knapp et al.(1985)는 단지 10 ~ 15%의 타원은하 만이 $10^9 M_\odot$ 정도의 가스를 함유하고 있음을 확인하였다. 이러한 사실은 중성수소의 존재가 타원은하에서 일반적인 현상은 아님을 말해 준다.

Hernquist & Quinn(1987a,b)은 NGC 3923의 겹질 구조를 타원은하와 동경방향으로 접근하는 원반 은하의 병합에 의한 phase wrapping 현상으로부터 형성되는 것으로 설명하였다. 이 겹질 구조로부터 구할 수 있는 포텐셜로부터 계산된 은하의 암흑 물질은 core 반경이 은하 유효 반경의 3배가 되고 등온적으로 분포되어 있으며 별 질량의 40배가 되는 양으로 추정하였다.

일반적으로 타원은하의 이완시간은 우주의 나이보다 크므로 현재 은하들은 개별들의 충돌에 의한 영향은 무시할 수 있고 전체 별들의 포텐셜에 의한 중력효과를 받는 비 충돌계로 볼수 있다. 이러한 계에 대한 기술은 비 충돌 볼쓰만 방정식의 해인 분포함수로부터 모든 정보를 얻을 수 있다. 평형상태 구형 은하를 표현하는 역학적 모형중 일반적인 방법은 해석적 방법(integral based method)으로서, King의 방법, Eddington의 역변환 방법, 그리고 유체 동역학 방정식 이용법 등이 있다. 이러한 해석적 방법은 일반적으로 구 대칭 은하의 isolating integral인 에너지와 각운동량의 크기를 독립 변수로 갖는 간단한 분포함수 형태를 가정하고 이 함수를 모든 속도에 대해 적분하여 구한 밀도 분포에서 포텐셜을 구한다.

해석적인 모형과는 달리 Schwarzshild(1979)는 분포함수에서의 third integral 때문에 나타나는 어려움을 해결하기 위해 특수한 질량 분포를 가정하였다. 그는 이 질량 분포에서 구한 포텐셜 내에서 별들이 궤도 운동을 한다고 가정하고 이들의 궤도 운동으로부터 은하의 분포함수를 구하였다. 또한 별들이 그리는 특이한 궤도들로부터 third integral의 존재를 알아내었다. 특히 가정한 triaxial 포텐셜에서 얻은 수치해로부터 triaxial 은하가 실제로 존재함을 알아내었다. Helligman & Schwarzshild(1979)는 이 포텐셜에서 가능한 궤도 중 중간축 주위를 회전하는 튜브 궤도는 존재하지 않음을 밝혔다.

한편 축대칭은하에 대해서 Richstone(1980, 1982, 1984)은 타원 은하중 E6에 해당하는 편평도를

가지고 로그 포텐셜을 가정하여 구한 해로부터 내부구조를 연구하였다. 특히 가능한 궤도 중 box 궤도가 대부분을 차지하며 타원은하에서의 낮은 회전 속도가 순 각운동량이 거의 없는 이들 궤도에 기인한다고 주장하였다. Levison & Richstone(1985a,b)는 로그 포텐셜에 허블의 광도 법칙을 주었을 때 M/L 이 변화하는 dark 해일로를 가정하여 얻은 결과가 해일로를 가정하지 않은 결과와 매우 유사하여 관측시 얻어지는 운동학적 자료만으로는 암흑 물질의 존재를 알 수 없다는 추론을 하였다. 또 Levison & Richstone(1987)은 각각 oblate와 prolate에 가까운 triaxial 모형의 해로부터 유사한 궤도의 종류를 얻었고 Schwarzschild(1982)는 회전축 주위로의 느린 몸체 회전을 가정하여 평형해의 존재를 확인하였으며 Vietri(1986)은 우리은하의 팽창부에 대해 회전하는 triaxial 모형을 만들었다.

Richstone & Tremaine(1984)는 Schwarzschild 방법을 이용한 구대칭은하의 일반 모형에서 은하의 일정 지점에서 구한 M/L 값은 오차가 크며 따라서 그 지점에서 관측한 속도 분산 값으로 정한 M/L 값 결정에 문제가 있음을 지적하였다. Richstone & Tremaine(1985)는 일반 모형을 M87에 적용하여 관측된 광도 곡선과 속도 분산 곡선으로부터 은하내 거리에 따른 일정한 M/L 을 구하였다. 이는 Duncan & Wheeler(1980)가 주장한 비등방 모형과 비슷한 결과이며 Sargent et al.(1978)의 블랙홀 이론을 부정하는 것이 된다.

이 논문에서는 타원은하에서 보이는 속도분산 곡선의 형태를 속도분산 성분의 비 등방성으로 해석하지 않고 등방성 구 대칭은하가 포함하는 구대칭 분포 dark 해일로에 기인하는 것으로 보았다. 이런 가정하에 Schwarzschild 방법을 이용하여 역학적 평형 상태에서 이계의 존재성을 확인하고 그 해로부터 얻어낸 속도분산 곡선을 분석하여 그 경향을 알아보고자 한다. 2장에서 이 모형에서 사용한 Schwarzschild 방법의 알고리즘을 나타내었고, 이에 필요한 입력자료는 3장에 제시하였다. 그리고 4장에서 모형계산에 대한 결과와 분석을 실었고 5장과 6장에서 이에 대한 토의와 결론을 제시하였다.

2. 사용한 은하의 역학 모형과 방법

몸체회전이 없고 모든 성질이 구대칭적인 역학적 평형상태의 구형은하에 대한 비충돌 불쓰만 방정식의 가장 일반적인 해를 구하는 알고리즘을 Richstone & Tremaine(1984)이 Schwarzschild의 선형 계획법(linear programming)을 사용하여 개발하였다. 이 방법은 각기 다른 에너지와 각운동량을 가지는 가능한 여러 궤도들을 선택하여 구형 포텐셜 내에서 궤도 운동을 시켜 얻어낸 별의 분포로부터 해를 얻는 방법이다.

2.1 밀도분포와 포텐셜설정

구형은하의 모형을 설정하기 위하여 N개의 껌질을 구분하여 각 껌질의 크기 척도를 Young(1976)이 사용한 공식을 적용하여 로그 척도로

$$\begin{aligned} r_{j-1} < r < r_j \\ r_{j-1} = 0.01 \times 1.21153^{j-1} \end{aligned} \quad (1)$$

와 같이 설정하였다. 관측한 광도분포 곡선에서 일정한 M/L 비를 가정하고 전체 질량에 대한 제한 조건은

$$2\pi \int_0^{\infty} RS(R)dR = 1 \quad (2)$$

로 표현되는데, 으로부터 중심에서 반경에 따른 투영된 표면 밀도 $S(R)$ 을 얻을수 있다. 여기서 전체 질량을 1로 규격화 하였다. 각각의 캡질들의 밀도가 일정한 값을 갖는다고 가정하여 공간밀도의 역 투영값(ρ_j)은

$$\rho(r) = \rho_j, \quad r_{j-1} < r < r_j \quad (3)$$

으로 유도할 수 있다. 그러므로 투영된 반경 r_{j-1} 과 r_j 사이에서의 부분질량(μ_j)을 투영된 표면 밀도($S(R)$)로 부터

$$\mu_j = 2\pi \int_{r_{j-1}}^{r_j} R S(R) dR \quad (4)$$

와 같이 구할 수 있다. 최외곽 캡질에서는 질량이 그 캡질 자체에만 영향을 미치므로 밀도에 대한 부분질량은

$$\mu_N = \frac{4\pi}{3} \rho_N (r_N^2 - r_{N-1}^2)^{3/2} \quad (5)$$

와 같이 구하여진다. 최외곽 캡질의 공간밀도를 사용하여 최외곽 캡질이 안쪽 캡질의 질량($j < N$)에 미치는 영향은

$$\frac{4\pi}{3} \rho_N [(r_N^2 - r_j^2)^{3/2} - (r_N^2 - r_{j-1}^2)^{3/2} - (r_{N-1}^2 - r_j^2)^{3/2} + (r_{N-1}^2 - r_{j-1}^2)^{3/2}] \quad (6)$$

으로 구할 수 있다. 이 값을 각 μ_j 에서 감산하면 바깥에서 중심으로의 모든 캡질의 공간 밀도를 구할 수 있다. 얻어진 밀도 분포에서 은하중심으로부터의 질량 분포 관계식은

$$M(r) = M_{j-1} + \frac{4}{3}\pi\rho_j(r_j^3 - r_{j-1}^3) \quad (7)$$

으로 구해진다. 구대칭 극좌표계에서 동경 성분에 대한 Poission 방정식은

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r) \quad (8)$$

으로 표현되는데, 이 식으로부터

$$U(r) = U_{j-1} + \int_{r_{j-1}}^r dr \frac{M(r)}{r^2} \quad (9)$$

구형 포텐셜 $U(r)$ 을 얻을 수 있다. 이 식을 적분하면 중심으로 부터의 임의의 거리에 대한 포텐셜을

$$U(r) = U(r_{j-1}) + M_{j-1} \left(\frac{1}{r_{j-1}} - \frac{1}{r} \right) + \frac{4}{3}\pi\rho_j \left(\frac{1}{2}r^2 + \frac{r_{j-1}^3}{r} - \frac{3}{2}r_{j-1}^2 \right) \quad (10)$$

와 같이 구할 수 있다.

2.2 궤도 종류의 선택과 궤도 적분

위에서 구한 구형 포텐셜로 부터 분포함수를 구하기 위해 별들이 이 포텐셜내에서 그릴수 있는 가능한 궤도의 종류를 선택해야한다. 전형적인 궤도는 하나의 궤도면에 속박되어 있는 장미형 궤도로서 π 에서 2π 사이의 방위주기를 가지고 세차운동을 한다. 구 대칭은하의 isolating integral은 에너지와 각운동량의 크기이므로 이 모형에서 사용한 궤도들의 종류는 각 캡질에서 반경이

$$r = \frac{1}{2}(r_{j-1} + r_j) \quad (11)$$

과 같으며, 에너지가 E_{cj} 이고 각운동량이 L_{cj} 인 원운동을 하는 궤도와, 같은 에너지를 가지고 각운동량이 다른 여러 종류의 가능한 궤도를 선택한다. 이때의 총 에너지와 각운동량의 크기는 각각식(12),(13)이다.

$$E_{cj} = U(r_j) + \frac{1}{2} \frac{M(r_j)}{r_j} \quad (12)$$

$$L_{cj} = [r_j M(r_j)]^{1/2} \quad (13)$$

궤도 조합에 의한 별들의 분포를 구하기 위해 각 별이 껍질 내에서 머무는 시간과 각 껍질에서의 속도 분산을 구한다. 해당되는 궤도의 전환점인 근성점과 원성점은 총 에너지와 각운동량과의 관계

$$E_i = U(r) + \frac{L_i^2}{2r^2} \quad (14)$$

의 해로부터 구할 수 있다.

근성점과 원성점이 같은 i 번째 궤도가 껍질 J 안에 있다면 이때 궤도가 다른 j 번째 껍질에 머무는 시간 m_{ij} 와 동경 및 접선 방향에 대한 속도 분산 성분, 즉, $\sigma_{r,ij}, \sigma_{t,ij}$ 는

$$\begin{aligned} m_{ij} &= 1, & j = J \\ &= 0, & j \neq J \\ \sigma_{r,ij} &= 0 \\ \sigma_{t,ij} &= \frac{L_i^2}{2r_j^2} \end{aligned} \quad (15)$$

와 같이 주어진다. 이때 근성점과 원성점이 각기 다른 껍질에 있다면 각 껍질에 머무는 시간은 $\int \frac{dr}{v_r}$ 에 비례한다. 시선 속도를

$$v_{ri}(r) = \left[2 \left(E_i - U(r) - \frac{L_i^2}{2r^2} \right) \right]^{1/2} \quad (16)$$

와 같이 정의하면, 각 전환점 사이에서 i 번째 궤도가 j 번째 궤도에 머무는 시간 m_{ij} 는

$$m_{ij} = \frac{r_j - r_{j-1}}{v_{ri}(r_j)} \quad (17)$$

으로 주어진다. 또한, 원성점에서의 시선속도는 근사적으로

$$\int \frac{dr}{v_{ri}} = 2C_i^{-1} (r_{ai} - r_{JA-1})^{1/2} \quad (18)$$

와 같이 구해진다. 여기서 C_i 는 상수이고, r_{JA} 는 원성점이 위치하고 있는 껍질의 반경이다. 그러므로 원성점과 근성점에서의 m_{ij} 를

$$\begin{aligned} m_{ij}(\text{apocenter}) &= \frac{2(r_{ai} - r_{j-1})}{v_{ri}(r_{j-1})} \\ m_{ij}(\text{pericenter}) &= \frac{2(r_j - r_{pi})}{v_{ri}(r_j)} \end{aligned} \quad (19)$$

와 같이 구할 수 있다. 그리고 원성점과 근성점 사이에서의 각 껍질에서 접선 속도 분산과 원성점과 근성점이 위치하고 있는 껍질에서의 접선 속도 분산은 각각

$$\sigma_{t,ij}^2 = \frac{L_i^2}{2r_j^2} \quad (20)$$

와

$$\begin{aligned}\sigma_{t,ij}^2 &= \frac{2L_i^2}{(r_{j-1} + r_{ai})^2} \\ &= \frac{2L_i^2}{(r_j + r_{pi})^2}\end{aligned}\quad (21)$$

으로 구할 수 있다. 동경속도 분산은 원성점이 있는 껍질 JA에서

$$\sigma_r^2 = \frac{\int v_{ri}^2 dt}{\int dt} = \frac{\int v_{ri} dr}{\int dr / v_{ri}} \quad (22)$$

으로 표현되며, 시선 속도는 근사적으로 $v_{ri} \sim C_i(r_{ai} - r)^{1/2}$ 이므로 원성점에서의 동경 속도 분산을 구할 수 있다. 유사하게 i 번째 궤도에 대한 동경 속도 분산을

$$\begin{aligned}\sigma_{r,ij}^2 &= v_{ri}^2(r_j), \quad pericenter < j < apocenter \\ \sigma_{r,ij}^2 &= \frac{1}{3}v_{ri}^2(r_{j-1}), \quad j = apocenter \\ \sigma_{r,ij}^2 &= \frac{1}{3}v_{ri}^2(r_j), \quad j = pericenter\end{aligned}\quad (23)$$

구할 수 있다.

2.3 분포함수와 속도분산의 결정

자체 모순 없는 평형 상태의 역학 모형은 궤도운동 중의 질량 분포가 초기에 가정한 질량 분포와 동일한 모형이다. 이러한 모형을 만족하기 위해 각 궤도의 통과 시간에 궤도 가중치(w_i)를 곱하여 초기에 가정한 질량 분포와 동일하게 놓자. 즉,

$$\sum_{i=1}^K w_i m_{ij} = M_j - M_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (24)$$

으로 표현하며, 이 식으로부터 가중치를 구할 수 있다. 가중치는 음이 아닌 분포함수로서 델타함수의 합으로

$$f(E, L) = \sum g_i \delta(E - E_i) \delta(L - L_i) \quad (25)$$

와 같이 표시할 수 있다. 여기서 g_i 는 상수이다. 이 분포 함수는 연속 함수가 아닌 불완전한 함수이지만 진스의 정리에서 실제 은하를 기술하는 함수로 사용할 수 있다. 여기서 최종적으로 얻어야 할 모델 값은 투영된 표면밀도 $S_P(R)$ 과 투영된 속도 분산 σ_P 이다. $S_P(R)$ 은 은하의 중심으로 투영된 거리 R 까지 시선 방향을 따라,

$$S_P(R) = \sum_{j=1}^N (\sum_{i=1}^K w_i m_{ij}) z_j(R) \quad (26)$$

얻을 수 있다. 속도 분산은 동경과 접선 성분의 값이 한 시선 껍질에 따라 일정하다고 가정하면

$$S_P(R) \sigma_P^2(R) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^K w_i m_{ij} [z_j(R) \sigma_{r,ij}^2 + y_j(R) (\sigma_{t,ij}^2 - \sigma_{r,ij}^2)] \quad (27)$$

으로 나타난다. 여기서 $z_j(R)$ 과 $y_j(R)$ 은 투영 인자들이다.

표 1. 모형에 입력된 구대칭 dark 헤일로의 요소들.

r_c	0.1R_e			R_e			10R_e		
	γ	1.5	2	2.5	1.5	2	2.5	1.5	2
ρ_c	0.1	0.1	10	0.001	0.2	0.01	0.0001	0.001	0.0001
	1	1	100	0.05	0.1	0.1	0.001	0.002	0.001
	5	10	500	0.1	1	1	0.01	0.004	0.01

3. 모형 입력 자료

3.1 가정한 표면광도 분포 법칙

이 연구의 모형에서는 타원은하에서 일반적인 광도 분포 곡선인 de Vaucouleurs의 $r^{1/4}$ 법칙, $I(R) = I_e \exp[-7.67\{(R/R_e)^{1/4} - 1\}]$ 을 가정하였다. 이 식에서 R_e 는 유효반경으로 총광도의 절반을 포함하는 반경이고, I_e 는 그 지점의 광도를 나타낸다. 이 광도 법칙이 만족하는 영역을 Young(1976)의 자료를 이용하여 물리적 경계를 50번째 껍질까지 정하였는데, 이 반경 내에 별의 질량 대부분(~99%)이 포함되어 있다. 관측된 은하의 광도 분포를 표면 밀도 분포로 전환하기 위하여 은하 중심으로 부터의 거리에 대한 M/L 비가 일정하다고 가정하였다.

3.2 궤도 종류의 선택과 암흑 물질의 밀도 분포

주어진 구대칭 포텐셜 내에서 운동하는 궤도의 가지수는 각 껍질에서 중간 값을 반경으로 원운동 하는 궤도 50개와 같은 에너지를 가지고 각운동량이 다른 200개를 합하여 총 250개를 결정하였다. 여기서 각 껍질에는 원운동 궤도 1개와 각운동량이 다른 궤도 4개가 포함된다.

암흑 물질을 포함한 구대칭 은하를 두개의 성분 모형으로 설정하였는데 타원은하의 헤일로가 dissipation 없이 형성될 경우 예상되는 dark 헤일로를 가정하여 밀도 분포를 $\rho = \rho_o/[1 + (r/r_c)^\gamma]$ 과 같이 주었다. 여기서 가변 변수인 중심 밀도 ρ_o 와 core 반경 r_c , 분포 지수 γ 를 변화시키도록 하였다. 이 논문에서는 유효 반경을 중심으로 core 반경을 표 1과 같이 각각 3가지 경우($0.1R_e$, R_e , $10R_e$)로 주었고, 이때 밀도 분포의 지수를 각각 1.5, 2, 2.5로 변화 시켰다. 각 모형에 대해 가정한 dark 헤일로의 중심 밀도를 표 1에 나타내었다.

3.3 선형계획법

밀도 제한 조건식의 해인 궤도 가중치를 구하려면 일차 다항식의 개수보다 미지수가 더 많은 부정 방정식을 풀어야 한다. 이러한 유형의 대표적 해법이 선형 계획법이다. 이 방법은 문제의 내용에 모순되지 않는 제한 조건식 아래 이 식을 만족하는 해 중 사용자가 얻고자 하는 목적함수를 최대화 혹은 최소화 시켜 유일하게 해를 얻는 방법이다. 이때 사용하는 목적함수는

$$OBJECTIVE FUNCTION = \sum c_i w_i \quad (28)$$

와 같이 미지수 w_i 에 대한 일차 다항식으로 주어지고 제한 조건식은

$$\begin{aligned} \sum c_i w_i &= C \\ \sum d_i w_i &\geq D \end{aligned} \quad (29)$$

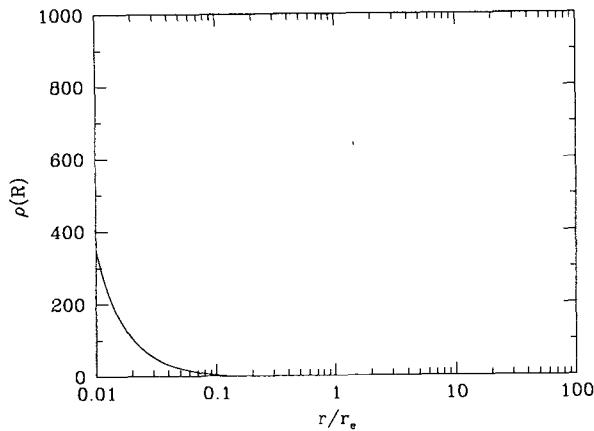


그림 1. Luminous matter의 공간 밀도 분포 $\rho(R)$. 양축은 무차원 변수이고 가로축은 로그 척도로서 중심에서의 거리를 유효 반경(R_e)에 대한 비로 나타내었고 세로축은 공간 밀도이다.

과 같이 등호식과 부등호식이 포함되어 있다. 이 연구에서 사용한 제한 조건식은

$$\sum_{i=1}^K w_i m_{ij} = M_j - M_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

으로 이 식은 기본적인 밀도 제한 조건식이다. 이와 더불어 Gott(1977)가 제시한 dissipation이 없이 은하가 형성되는 과정에서 외곽부에서 radial 궤도가 우세하다는 제한 조건식

$$\sum_{i=1}^K (\sigma_{r,i}^2 - \sigma_{t,ij}^2) m_{ij} w_i > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

을 사용하였다. 이 식들을 만족하는 w_i 의 가지수는 $250C_{100}$ 개로 은하를 기술하는 분포 함수들로 사용할 수 있지만, 이 엄청난 개수의 해를 원시적인 방법으로 일일히 확인할 수 없다. 이 연구에서는 은하의 안정성을 고려하여 등방성을 준 목적함수를

$$C = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N (\sigma_{r,ij}^2 - \sigma_{t,ij}^2) m_{ij} w_i \quad (32)$$

와 같이 주고 이 함수를 가능한 최소화 하여 분포함수를 유일하게 결정하였다.

4. 모형 계산 결과와 분석

4.1 Luminous matter에 대한 모형 결과

암흑 물질이 없는 경우의 질량을 1로 규격화 하였을 때 각 껌질에서의 밀도, 질량, 포텐셜 분포를 그림 1, 2, 3에 나타내었다. 여기서 포텐셜 값은 중심에서의 값이 0이 되도록 변환시켰다.

첫번째 결과인 모델 표면 밀도 분포는 그림 4에서 보인 바와 같이 가로축을 $r^{1/4}$ 값으로 놓았을 때 선형적으로 나타나, de Vaucouleurs의 $r^{1/4}$ 법칙에 잘 들어 맞음을 알 수 있다. 또한, 대상계의 상태가 등방성인 경우 해를 천구에 투영시켜 속도 분산 곡선을 그림 5와 같이 얻었다. 이 결과는 유체 동역학 방정식으로 구한 Tonry(1983)와 Baily & Macdonald(1981)의 결과와 2% 이내에서 들어 맞았

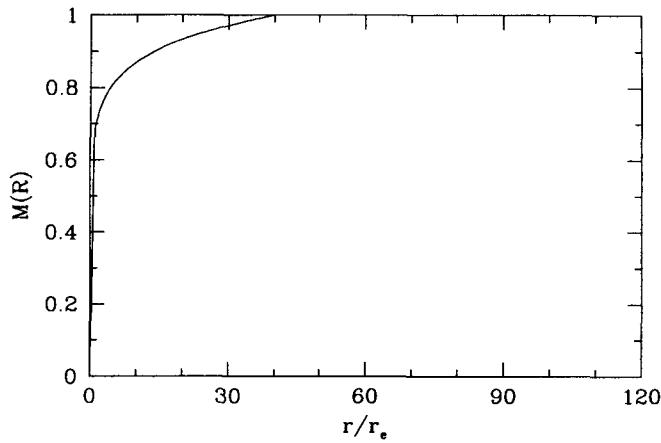


그림 2. Luminous matter의 질량 분포 $M(R)$. 양축은 무차원 변수이고 가로축은 중심에서의 거리를 유효 반경(R_e)에 대한 비로 나타내었고 세로축은 거리에 따른 누적 질량을 나타낸다. 전체 질량을 1로 규격화 하였다.

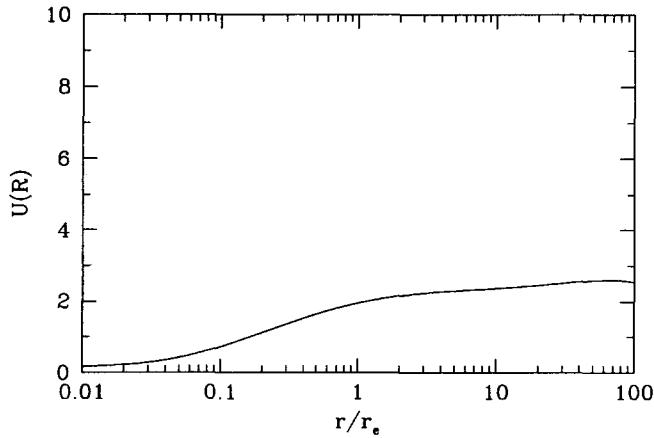


그림 3. Luminous matter의 포텐셜 분포 $U(R)$. 양축은 무차원 변수이고 가로축은 중심에서의 거리를 유효 반경(r_e)에 대한 비로 나타내었고 세로축은 거리에 따른 포텐셜 값을 나타낸다.

다. σ_r/σ_P^{-1} 값의 절대치 비가 7×10^{-5} 이내의 범위로 거의 등방성임을 알 수 있다. 이 곡선의 형태는 중심에서 $0.006R_e$ 까지 완만하게 증가 하다가 R_e 까지 다시 완만히 감소한 뒤 그 이후 급격히 감소함을 알 수 있다. 반면, 그림 6에 보인 radial 궤도가 우세한 비등방성 모형으로부터 얻은 속도 분산 곡선은 목적 함수를 $C = \sum w_i L_i$ 로 주고 이 함수를 최소화 하여 각운동량의 합을 가능한 적게 만들었다. 이 모형에서 접선 속도 분산값은 $0.5R_e$ 이후에서 거의 0인 값을 보이고 $0.025R_e$ 에서 동경 성분의 0.5배 정도의 값을 갖는다. 이 곡선의 형태는 중심에서의 속도 분산 값이 등방성인 경우보다 상대적으로 크고 바깥 부분에서 더 급히 감소함을 알 수 있다.

이상의 결과에서 볼때 일반적인 타원은하에서 관측되는 속도 분산 곡선은 외곽부에서는 비등

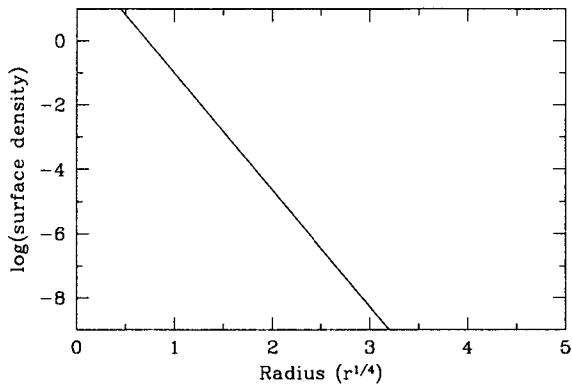


그림 4. 모형 표면 밀도 분포. 가로축을 $r^{1/4}$ 값으로 정하였고 세로축은 표면 밀도 분포를 나타낸다. 양축은 무차원 변수이다.

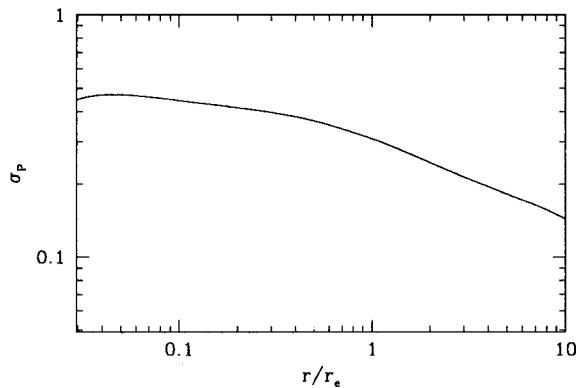


그림 5. Luminous matter의 속도 분산 곡선(등방성인 경우). 양축은 무차원 변수이고 가로축은 중심에서의 거리를 유효 반경에 대한 비로 나타내었고 세로축은 속도 분산값을 나타낸다.

방성 모형과 일치함을 볼수 있고 중심부에서는 등방성 모형과 대체로 일치함을 볼 수 있다. 그리고 M87의 경우와 같이 중심부에서의 높은 분산값을 보이는 경우는 비등방성 모형으로써 정성적으로 설명할 수 있다.

4.2 암흑 물질을 포함한 모형의 결과

Dark 헤일로를 포함한 경우의 모형은 M87에서 Merritt(1987)가 제안한 불안정성으로 생기는 중심에서의 bar의 형성을 고려하여 안정계인 등방성계를 가정하여 해를 모색하였다. 선형계획법에 사용한 IMSL(International Mathematical and Statistical Library) package(1975)의 ZXLOP 프로그램으로 대부분의 경우에 대하여 해를 얻을 수 있었다. 암흑 물질의 중심밀도를 변화시켜 각 중심밀도에 해당하는 모형 경계에서의 국부 M/L 값의 크기가 각각 1, 10, 100이 되는 모형을 얻었다. Dark 헤일로의 core 반경을 변화시킬때 나타나는 곡선의 경향을 다음과 같이 요약할 수 있다.

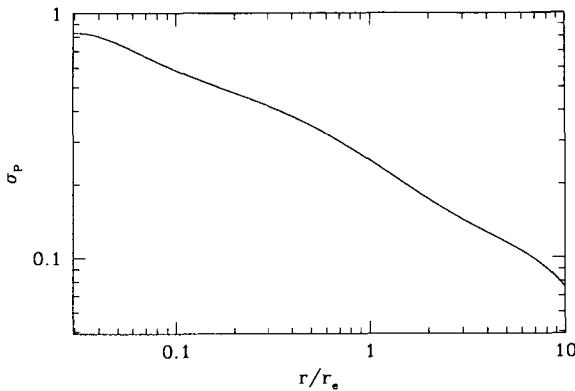


그림 6. Luminous matter의 속도 분산 곡선(비등방성인 경우). 양축은 무차원 변수이고 가로축은 중심에서의 거리를 유효 반경에 대한 비로 나타내었고 세로축은 속도 분산값을 나타낸다. Radial 궤도가 우세한 모형이다.

(a) core 반경이 $0.1R_e$ 인 경우

(i) $\gamma = 1.5$

ρ_c 가 0.1인 경우는 그림 7에 보인 바와 같이 일반적으로 관측되는 지점인 R_e 까지 특별한 경향의 변화를 보이지 않았다. 그러나 ρ_c 가 1일 때에는 R_e 까지 거의 편평한 경향을 보이고 이후에도 모델 경계까지 비슷한 양상을 보인다. 한편 ρ_c 가 5일 때는 중심에서의 속도분산 값이 다른 두 경우에 비해 증가하며 그 이후 반경에 따라 서서히 증가하는 결과를 얻었다.

(ii) $\gamma = 2$

ρ_c 가 1인 경우 그림 8에서 보듯이 R_e 까지 뚜렷한 변화를 보이지 않았다. ρ_c 가 10인 경우는 중심에서의 속도 분산값이 증가하고 속도 분산값이 최대값을 갖는 곳은 거의 $0.3R_e$ 부근에서 나타나며 그 이후 다시 감소하는 경향을 보인다.

(iii) $\gamma = 2.5$

ρ_c 가 100과 500은 그림 9에서 보듯이 별의 중심밀도($\rho_c = 380$)와 거의 크기가 비슷한 양상을 가지고 있어 중심에서의 큰 밀집도를 가진다. 이 경우는 암흑 물질이 없는 경우에 비해 중심에서 상대적으로 높은 속도 분산값을 가지고 있다. 그러나 곡선의 경향에는 거의 변화가 없다.

(b) core 반경이 R_e 인 경우

(i) $\gamma = 1.5$

ρ_c 가 0.05인 경우 그림 10에서 보듯이 R_e 까지 거의 편평한 곡선의 형태를 보이고 있고 그 이후 계속 증가하는 경향을 볼 수 있다. ρ_c 가 0.001인 경우는 암흑 물질이 없는 경우와 별다른 차이를 보이지 않는다.

(ii) $\gamma = 2$

ρ_c 가 0.1인 경우 그림 11에서 보듯이 중심에서 반경에 따라 거의 편평한 경향을 보인다. ρ_c 가 0.2인 경우는 R_e 까지 서서히 증가하는 경향을 보이며 그 이후 편평해 점을 알 수 있다. 한편 ρ_c 가 1인 경우는 중심에서부터 급격한 증가를 보이나 실제적인 물리적 의미는 없는 것 같다.

(iii) $\gamma = 2.5$

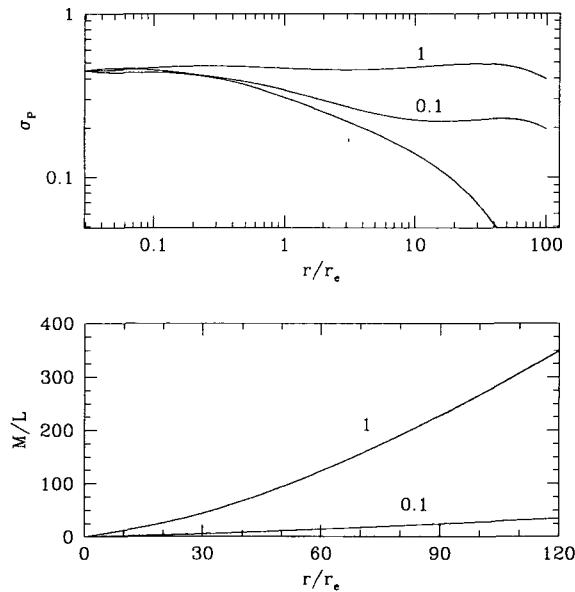


그림 7. 암흑 물질을 포함한 경우 속도 분산 곡선과 국부 M/L 비의 변화. 그림 안의 수치는 암흑 물질의 중심 밀도이고 수치가 없는 곡선이 암흑 물질이 없는 경우이다. 양축은 무차원 변수이고 가로축은 중심에서의 거리를 유효 반경에 대한 비로 나타내었고 세로축은 각각 속도 분산과 M/L 을 나타낸다. core 반경이 $0.1R_e$ 이고 밀도 분포지수는 1.5인 경우이다.

ρ_c 가 0.1 일때 그림 12에서 보듯이 중심에서 R_e 까지 편평한 경향을 보이고 그 이후 다시 감소 한다. ρ_c 가 1인 경우는 R_e 까지 서서히 증가하다가 다시 떨어짐을 알 수 있다. 한편 ρ_c 가 0.01일 때는 암흑 물질이 없는 경우와 큰 차이를 보이지 않았다.

(c) core 반경이 $10R_e$ 인 경우

그림 13~15에 보인 바와 같이 분포 지수인 1.5, 2, 2.5인 경우 모두에서 별의 중심 밀도에 비해 극히 낮고 R_e 까지 뚜렷한 변화를 보이지 않아 암흑 물질의 존재를 확인할 수 없지만, R_e 이후 급격한 곡선의 증가를 보인다.

위 모형들은 대부분이 관측되는 은하의 유효 반경까지 편평하거나 천천히 증가하는 경향을 보여 cD은하에서 보이는 속도 분산 형태에 적절히 맞추어 짐을 알 수 있다. 또한 R_e 이후의 형태도 반경에 따라 비슷한 모습을 보여 M87의 혜일로에서 관측된 속도분산의 경향과 일치함을 알 수 있다.

5. 토 의

일반적인 구 대칭 타원은하를 기술하는 비충돌 볼츠만 방정식의 해인 분포함수를 Schwarzschild의 선형 계획법을 사용하여 구하였다. 특히, 타원은하에서 일반적으로 적용되는 광도 분포 법칙인 de Vaucouleurs의 $r^{1/4}$ 법칙을 만족하고 dark 혜일로를 포함하는 은하의 역학적 평행해를 은하내 개개별들의 운동으로 구하는 일반적인 방법을 사용하였다. 이 해의 존재에 대한 의미는 나선은하와는 달리 타원은하에서는 dark 혜일로가 없는 등방계와 dark 혜일로를 가정한 등방성 계가 동시에 존재할

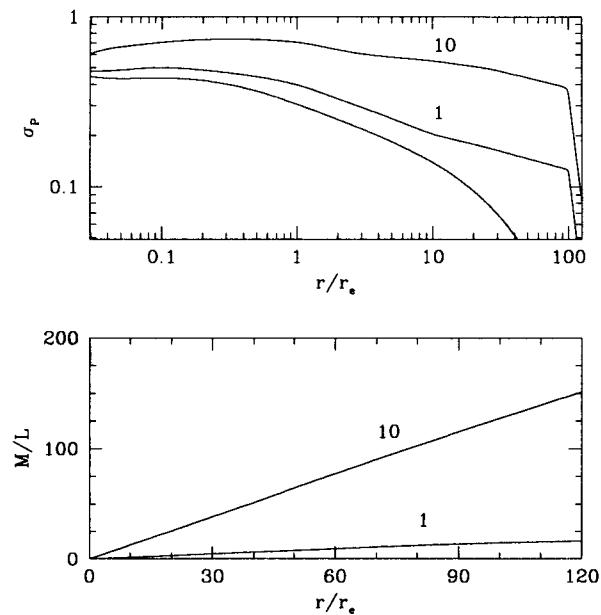


그림 8. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $0.1R_e$ 이고 밀도 분포지수는 2인 경우이다.

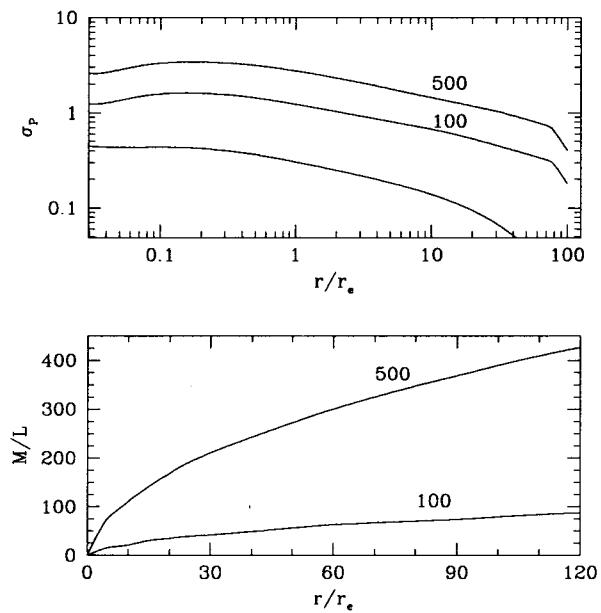


그림 9. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $0.1R_e$ 이고 밀도 분포지수는 2.5인 경우이다.

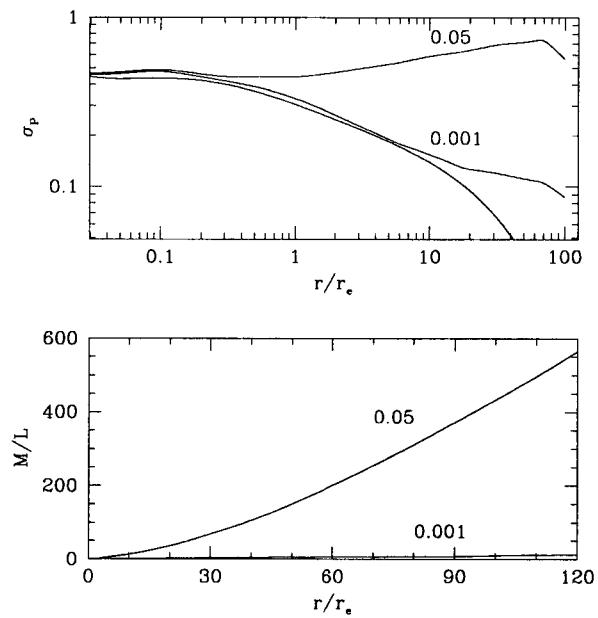


그림 10. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $1R_e$ 이고 밀도 분포지수는 1.5인 경우이다.

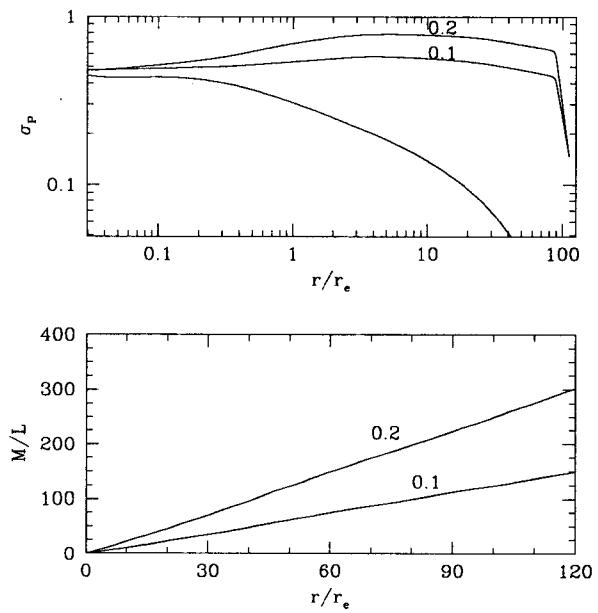


그림 11. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $1R_e$ 이고 밀도 분포지수는 2인 경우이다.

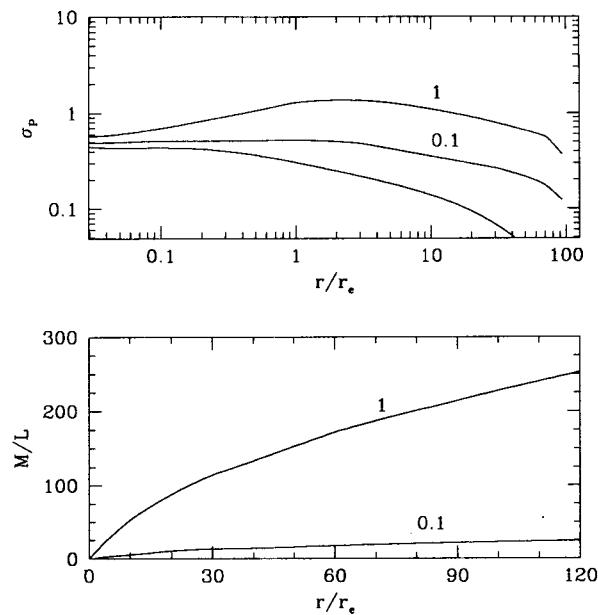


그림 12. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $1R_e$ 이고 밀도 분포지수는 2.5인 경우이다.

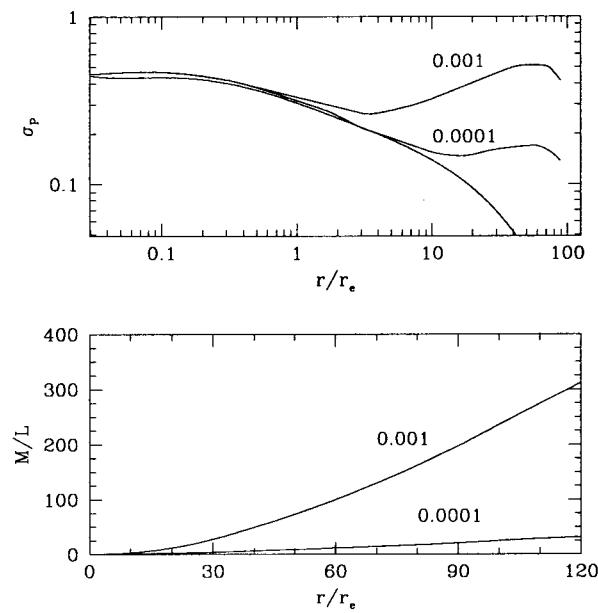


그림 13. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $10R_e$ 이고 밀도 분포지수는 1.5인 경우이다.

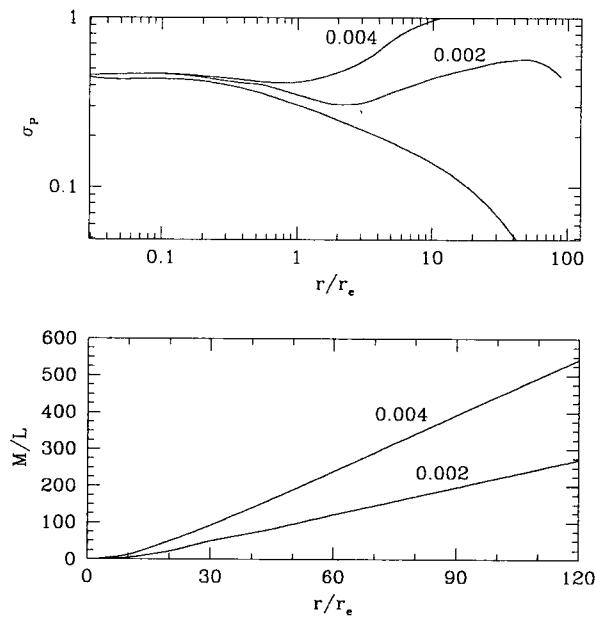


그림 14. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $10R_e$ 이고 밀도 분포지수는 2인 경우이다.

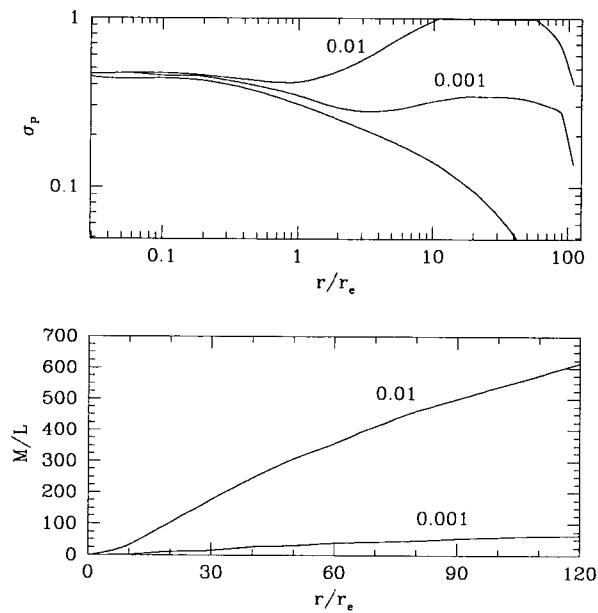


그림 15. 설명은 그림 7과 동일하다. core 반경이 $10R_e$ 이고 밀도 분포지수는 2.5인 경우이다.

수 있음을 나타낸다.

모형계산에서 de Vaucouleurs의 $r^{1/4}$ 법칙을 만족하는 별들의 공간 밀도는 $0.001R_e$ 지점에서 $1/2$ 로 떨어져 심한 밀집도를 보이는 반면, 관측되는 속도 분산 곡선과 일치하는 암흑 물질의 중심 밀도 분포는 별들의 밀도에 비해 0.01 이하의 작은 값을 가지고 있다. 그리고 모형 경계($120R_e$)에서 M/L 의 크기는 $10, 100$ 정도로 큰 값을 가지고 있다. 이러한 M/L 의 변화는 M87에서 뜨거운 가스에 의한 X-선 관측 결과와 유사함을 보인다(Mould et al. 1986). 한편 M87 혜일로에 있는 구상성단들의 속도 분산 값을 가지고 얻은 결과를 이 논문의 결과와 비교해 볼 때 암흑 물질의 core반경이 별들의 유효 반경보다 크다는 것을 알 수 있다.

Mathews(1988)는 유체 동역학 방정식을 사용하여 구한 편평한 속도 분산 곡선의 원인을 은하의 core 반경 내에서 cooling flow에 의해 형성되는 dark star에 의한 포텐셜 효과 때문이라고 하였다. 그러나 이와 유사한 이 연구의 모형 계산에서 암흑 물질의 중심 밀도가 별들의 중심밀도와 비슷한 값을 가지는 경우($r_c = 0.1R_e, \gamma = 2.5$)에는 특별한 곡선 경향의 변화를 보이지 않았다.

관측되는 속도 분산 곡선에 맞는 모형의 계산 결과에서는 무거운 혜일로가 요구되는데 지시자로 사용된 뜨거운 가스의 질량은 Fabricant & Gorenstein(1983)이 M87에 대해 $10^{11} M_\odot$ 로 구했으며, 이 값은 총 질량의 1% 정도로 낮은 값이다. 타원은하의 총질량 중 대부분을 차지하는 암흑 물질로 예상되는 것은 baryonic 암흑 물질로서 cooling flow에 의해 은하의 중심 부근에서 생성되는 질량이 작은 별들로 이는 흡착 종족이 한 예가 될 수 있다. 이 밖에 물질이 우세하기 시작한 우주의 역사에서 재결합(recombination) 직후에 탄생한 종족 III(White & Rees 1978)이 주 구성원일 수도 있다. 최근에 baryon이 아닌 물질로 된 암흑 물질의 존재가 논의되고 있지만 아직까지 이 이론들은 가설에 머물고 있다. 만약 질량을 가진 중성미자가 확증적으로 발견된다면 무거운 혜일로에서 상당부분의 암흑 물질을 설명할 수 있어 missing mass에 대한 실마리가 풀릴 것으로 기대된다.

안정성을 근간으로 한 등방 모형은 관측되는 isophotal twist 현상(Carter 1978)이나 N체 모의 실험 결과(Gott 1973)에서 보여주는 비등방성의 효과도 고려하여야 할 것이다. 일반적으로 cD은하에서 관측되는 속도분산이 서서히 증가하는 경향은 cD은하의 일반적인 성질로서(Carter et al. 1985), Tonry(1983)은 A2029의 경우 주위의 은하들로부터 유입된 별들의 접선속도 성분이 강하게 나타나고 있는 역학적 모형으로 설명하였다. Richstone & Malumuth(1983)은 cD은하의 진화과정을 galactic canibalism 이론으로 제시하여 cD은하의 혜일로 성분이 cD은하와 은하단 내의 다른 은하와의 작용에 의해 이들 은하에 유입된 고속도 별들로 구성됨을 보여 별들의 비등방성에 의한 효과를 뒷받침하였다. 속도분산을 설명하려는 위의 두 가지 해석의 타당성은 아직 확실하지 않다.

한편, Harris(1981)는 타원은하에서 보이는 구상성단의 갯수가 타원은하의 형성을 원반은하에 의한 병합으로 설명하기에는 너무 많다고 보았다. 이로부터 속도 분산의 형태가 M/L 의 증가 때문인지 아니면 유입된 별들의 속도 분산의 비등방성 때문인지는 은하의 유효 반경 이후의 구상성단과 같은 혜일로 성분의 속도분산값이 어떠한가에 따라 달라지게 된다.

6. 결 론

이 연구에서는 Schwarzschild의 수치모형을 사용하여 dark 혜일로를 포함한 구형은하의 역학적 해를 얻었다. 이 결과로 부터 암흑 물질을 포함하는 구형은하의 실제 존재를 예측하였고, 관측되는

운동학적 자료의 분포 경향을 정성적으로 설명할 수 있었다. 이 연구에서 얻은 결론을 종합하면 다음과 같다.

- 1) 무거운 헤일로를 포함한 구형은하의 역학적 평형상태는 존재한다.
- 2) 타원은하에서 볼 수 있는 속도 분산 곡선의 형태는 암흑 물질에 의한 질량대 광도비의 증가로 해석할 수 있다. 모형 경계에서의 M/L 비의 크기는 ~100정도이며 이는 무거운 헤일로의 존재 때문에 가능한 값이다.
- 3) 속도 분산 곡선이 은하내 거리에 따라 편평하거나 서서히 증가하는 경우의 암흑 물질의 밀도 분포는 core 반경이 은하의 유효 반경보다 작은 값을 갖는다.
- 4) 은하의 core 반경내에 밀집한 암흑 물질이 갖는 밀도 분포의 형태는 속도 분산 곡선의 경향에 영향을 주지 않는다. 이 결과는 관측되는 속도 분산의 형태가 cooling flow에 의해 만들어지는 흡착 종족의 유무와는 상관이 없음을 말해준다.

참고문헌

- Baily, M. E., & Macdonald, J. 1981, MNRAS, 194, 195
 Binney, J. 1976, MNRAS, 177, 19
 Binney, J., & Tremaine, S. 1987, Galactic Dynamics (Princeton Univ. Press: Princeton), p.614
 Carter, D. 1978, MNRAS, 182, 797
 Carter, D., Efstathiou, G., & Godwin, J. G. 1985, MNRAS, 212, 417
 Davies, R. P. 1981, ApJ, 212, 319
 Duncan, M. J., & Wheeler, J. C. 1980, ApJL, 237, L29
 Fabricant, D., & Gorenstein, P. 1983, ApJ, 267, 535
 Forman, W, Jones, C., & Tucker, W. 1985, ApJ, 293, 102
 Gott, J. R. 1973, ApJ, 251, 497
 Gott, J. R., & Turner, E. 1976, ApJ, 209, 1
 Gottsman, S. T., & Hawarden, T. G. 1986, MNRAS, 219, 759
 Harris, W. E. 1981, ApJ, 251, 497
 Hellingman, G., & Schwarzshild, M. 1979, ApJ, 233, 872
 Hernquist, G., & Quinn, P. J. 1987a, ApJ, 296, 1
 Hernquist, G., & Quinn, P. J. 1987b, ApJ, 296, 17
 Illingworth, G. 1977, ApJL, 218, L43
 IMSL Library 2. 1975, (Huston: International Mathematical and Statistical Libraries, Inc.), vol.2
 Kent, S. M. 1986, AJ, 91, 1301
 Kirshner, R. P. 1977, ApJ, 212, 319
 Knapp, G. R., Turner, E. L., & Cunniffe, P. E. 1985, AJ, 90, 454
 Levinson, H., & Richstone, D. O. 1985a, ApJ, 295, 340
 Levinson, H., & Richstone, D. O. 1985b, ApJ, 259, 347

- Levinson, H., & Richstone, D. O. 1987, ApJ, 314, 476
- Mathews, W. J. 1988, AJ, 95, 1047
- Mathews, W. J., & Baker, J. C. 1971, ApJ, 291, 46
- Merritt, D. 1987, ApJ, 319, 55
- Mould, J. R., Oke, J. B., & Nemec, N. M. 1986, Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies (Reidel: Dordrecht), pp.451-452
- Nulsen, P. E., Stewart, G. C., & Fabian, W. 1984, MNRAS, 208, 185
- Raimond, E., Faber, S. M., Gallagher, J. S., & Knapp, G. R. 1981, ApJ, 246, 708
- Richstone, D. O. 1980, ApJ, 245, 340
- Richstone, D. O. 1982, ApJ, 252, 496
- Richstone, D. O. 1984, ApJ, 281, 100
- Richstone, D. O., & Malumuth, E. M. 1983, ApJ, 268, 30
- Richstone, D. O., & Tremaine, S. 1984, ApJ, 286, 27
- Richstone, D. O., & Tremaine, S. 1985, ApJ, 296, 370
- Rubin, V. C., Ford, W. K., & Thonnard, N. 1980, ApJ, 238, 471
- Sarazin, C. L., & Whiten, R. E. 1988, ApJ, 331, 102
- Sargent, W. L., Young, P. J., Boksenberg, A., Shortridge, K., Lynds, C. R., & Hartwick, F. D. 1978, ApJ, 221, 731
- Schechter, P. L., & Gunn, J. E. 1979, ApJ, 229, 472
- Schwarzshild, M. 1979, ApJ, 232, 236
- Schwarzshild, M. 1982, ApJ, 263, 597
- Stewart, G. C., Canizares, C. R., Fabian, A. C., & Nulsen, P. E. 1984, ApJ, 278, 576
- Tonry, J. 1983, ApJ, 266, 58
- Trinchieri, G., & Fabbiano, G. 1985, ApJ, 296, 447
- Turner, E. L. 1976, ApJ, 208, 20
- van Gorkom, J. H., Knapp, G. R., Raimond, E., Faber, S. M., & Gallagher, J. S. 1986, AJ, 251, 497
- Vietri, M. 1986, ApJ, 366, 40
- White, R. E., & Chevalier, R. A. 1984, ApJ, 280, 561
- White, S. D. M., & Rees, M.. J. 1978, MNRAS, 183, 341
- Young, P. J. 1976, ApJ, 306, 40