

## 원통형 압전 변환기의 반경방향 고유진동 특성 연구

### Characteristics of the Radial Vibration of Cylindrical Piezoelectric Transducers

황 교 광\* · 김 진 오†

Kyo Kwang Hwang and Jin Oh Kim

(2002년 6월 18일 접수 : 2003년 2월 17일 심사완료)

**Key Words** : Piezoelectricity(압전), Transducer(변환기), Radial Vibration(반경방향 진동), Natural Frequency(고유진동수)

#### ABSTRACT

This paper presents the characteristics of the radial vibration of cylindrical piezoelectric transducers. The differential equations of piezoelectric radial motion have been derived in terms of the radial displacement and electric potential, which are functions of the radial and axial coordinates. Applying mechanical and electrical boundary conditions has yielded the characteristic equation of radial vibration. Numerical results of the natural frequencies have been compared with the experimental observations reported earlier for the transducers of several sizes, and have shown a good agreement for the fundamental mode. The paper discusses the dependence of the natural frequencies on the radius and thickness of the piezoelectric cylinders and the difference between piezoelectric and elastic resonances.

#### 1. 서 론

역학적 양인 응력 또는 압력과 전기적 양인 전압 또는 전하간의 상호변환인 압전현상<sup>(1)</sup>을 이용하는 압전변환기가 요즘 다양한 분야에서 활용되고 있다.<sup>(2)</sup> 특히, 역학적 진동을 감지하여 전기신호로 변환시키는 정압전 현상은 센서에 활용되고,<sup>(3)</sup> 전기신호를 역학적 진동으로 변환시키는 역압전 현상은 액추에이터에 활용된다.<sup>(4)</sup>

압전 변환기들은 대부분 원판(disk)형으로서 압전 소자의 두께방향 종진동을 이용하며, 간혹 사각판형으로서 길이방향 전단운동을 이용하기도 한다.<sup>(2)</sup> 원판형이지만 원주방향으로 운동을 발생시키도록 압전 소자를 배열하여 전단운동에 의한 비틀림 진동을 발

생시키는 변환기도 있다.<sup>(5,6)</sup> 한편 원통형 변환기가 소개되어 있는데, 축방향 전단변형을 하는 종진동을 이용하는 원통형 압전 진동 자이로스코프가 있고,<sup>(7)</sup> 관(pipe)에 반경방향 진동을 발생시키기 위하여 두께방향인 반경방향으로 진동하는 변환기<sup>(8)</sup>가 있다.

본 논문은 원통형으로서 반경방향으로 진동하는 압전 변환기를 대상으로 하며, 앞선 연구<sup>(8)</sup>에서 다루지 못한 해석결과들을 제시한다. 얇은 원통 셀이 원주방향으로 분극되어 결과적으로 반경방향 진동을 하는 상황에 대한 해석이 제시된 바 있으나,<sup>(9)</sup> 본 논문의 대상과는 다르다. 변환기의 압전소자는 두께방향인 반경방향으로 분극되어 있고, 두께 방향 전압에 의해 구동된다. 이러한 원통형 압전 변환기는 관의 외벽에 설치되어, 관에 반경방향 진동을 발생시켜 축대칭 파동을 전파시키고 또한 그러한 파동을 감지하여 수신하는 변환기로 활용하고자 연구 중에 있다. 그러한 연구의 일환으로 변환기의 압전 고유진동수를 계산하는 이론을 제시한 바가 있는데, 실험 결과와 비교하여 기본 고유진동수가 올바르게 계산되었음을 입증하였

† 책임저자, 정희원, 숭실대학교 기계공학과  
E-mail : jokim@ssu.ac.kr  
Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668  
\* 숭실대학교 대학원 기계공학과

으나 실험 결과에 나타난 2차 모드의 진동수에 대해서는 설명하지 못하였다.<sup>(8)</sup>

기본모드 뿐 아니라 고차모드의 고유진동수를 계산하기 위하여, 본 논문에서는 반경방향 좌표뿐만 아니라 축방향 좌표의 함수인 반경방향 운동 변위와 전기퍼텐셜로써 지배방정식을 구성한다. 여기에 역학적 경계조건과 전기적 경계조건을 적용하여 압전 고유진동의 특성방정식을 유도한다. 이 식을 이용하여, 여러 크기의 변환기들에 대한 1차 모드와 2차 모드의 압전 고유진동수들을 계산하고, 그 결과를 앞서 보고된 측정결과와 비교한다. 검증된 해석 이론에 따른 수치계산을 통하여, 압전 원통의 반경 및 두께에 따른 고유진동수를 살펴보고 압전 공진과 탄성 공진의 차이를 살펴본다.

## 2. 변환기 모델링

원통형 압전 변환기의 개략도를 Fig. 1에 보였다. 내경 ( $r=R_i$ )과 외경 ( $r=R_o$ )의 표면에 균일한 전극을 가진 원통형 압전체의 반경방향 운동을 표현하기 위하여, 축 대칭이며 축 ( $z$ )방향으로 균일하지 않은 반경 ( $r$ )방향 변위  $u(r, z, t)$  및 축방향 변위  $w(r, z, t)$ 와 전기퍼텐셜  $\phi(r, z, t)$ 을 사용한다. 이 압전체는 축방향으로 유한한 길이  $l$ 을 갖고 있다. 압전 소자는 이방성 재질인데, 비 등방성이 그다지 크지 않고 저차 모드에 관심있는 경우 등방성으로 근사화할 수 있다. 압전체 내의 원통형 요소에서의 반경방향 응력  $\sigma_r$  및 원주방향 응력  $\sigma_\theta$ 와 전단응력  $\tau_{zr}$ 은 원통형 탄성체 내에서의 응력 성분 표현<sup>(10)</sup>에 반경방향 압전에 의한 양을 추가<sup>(11)</sup> 하면, 반경방향 역학적 변위  $u$  및 전기장 ( $-\partial\phi/\partial r$ )과의 관계가 다음과 같다.

$$\sigma_r = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \epsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (1)$$

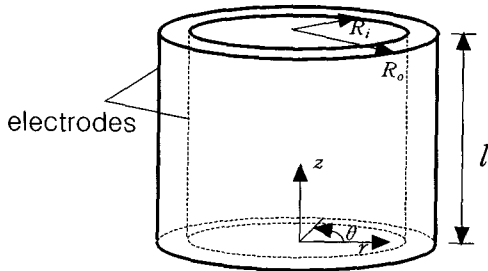


Fig. 1 Schematic diagram of a cylindrical transducer

$$\sigma_\theta = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{u}{r} \quad (2)$$

$$\tau_{zr} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (3)$$

그리고 반경방향 전기적 변위  $D_r$ 은 다음과 같다.

$$D_r = \epsilon_r \frac{\partial u}{\partial r} + \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} - \zeta \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (4)$$

여기서  $\lambda$ 와  $G$ 는 Lamé 탄성상수로서, 영률(Young's modulus) 및 포와송 비(Poisson's ratio)로는 다음과 같이 표현된다.<sup>(10)</sup>

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (5a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5b)$$

그리고  $\epsilon_r (= d_{33}/s_{33}^E)$  및  $\epsilon_z (= d_{11}/s_{11}^E)$ 는 압전응력상수(piezoelectric stress constant)이고,  $\zeta$ 는 유전율(permittivity)이다.

반경방향 힘의 평형으로부터 얻은 식<sup>(10)</sup>과 정전기적 방정식<sup>(11)</sup>은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) = \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} = 0 \quad (7)$$

여기서  $\rho$ 는 질량 밀도이다. 식 (1)~(4)를 식 (6)과 (7)에 대입하고  $\partial w/\partial z$ 에 관한 항을 무시할 만큼 작다고 가정하면 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{E_L} \frac{\epsilon_r}{\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{G}{E_L} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\epsilon_r}{\zeta} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (9)$$

여기서  $c_L (= [\widehat{E}_L/\rho]^{1/2})$ 은 압전체 내에서 종파의 전파속도이고,  $\widehat{E}_L = E_L + \epsilon_r^2/\zeta$ 이며,  $E_L = \lambda + 2G$ 이다.

전극에 가해지는 전기신호가 진동수  $\omega$ 로 시간  $t$ 에 따라 조화함수 형태로 변화하는 신호라면, 진동 변위들도 시간  $t$ 에 대한 조화함수 형태로 간주할 수 있다. 따라서  $u(r, z, t)$ 와  $\phi(r, z, t)$ 를 다음과 같이 변수분리 한다.

$$u(r, z, t) = \tilde{u}(r, z) e^{j\omega t} = U(r) Z_n(z) e^{j\omega t} \quad (10)$$

$$\phi(r, z, t) = \tilde{\phi}(r, z) e^{j\omega t} = \Phi(r) Z_n(z) e^{j\omega t} \quad (11)$$

여기서  $Z_n(z)$ 는 대칭형 탄성원통의 진동모드로서 다음과 같이 표현된다.

$$Z_n(z) = \cos \frac{2n\pi}{l} z, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (12)$$

식 (10)과 (11)을 식 (8)과 (9)에 대입하면 다음과 같이  $U(r)$ 과  $\Phi(r)$ 에 대한 지배방정식을 얻는다.

$$r^2 U''(r) + rU'(r) + (q_n^2 r^2 - p^2)U(r) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{\epsilon_r}{\xi} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU}{dr} \right) \quad (14)$$

여기서  $p$ 와  $q_n$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$p^2 = 1 - \frac{1}{E_L} \frac{\epsilon_r^2}{\xi}, \quad q_n^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - \frac{G}{E_L} \left( \frac{2n\pi}{l} \right)^2 \quad (15)$$

식 (13)의 해는 다음과 같은 형태로 된다.

$$U(r) = A_1 J_p(q_n r) + B_1 J_{-p}(q_n r) \quad (16)$$

식 (14)를 적분하면  $\Phi(r)$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi(r) = \frac{\epsilon_r}{\xi} U(r) + a_1 \ln r + b_1 \quad (17)$$

식 (16)과 (17)을 각각 식 (10)과 (11)에 대입하여, 공간좌표의 함수로서  $\tilde{u}(r, z)$ 와  $\tilde{\phi}(r, z)$ 의 일반 해를 얻는다.

$$\tilde{u}(r, z) = [A J_p(q_n r) + B J_{-p}(q_n r)] \cos \frac{2n\pi}{l} z \quad (18)$$

$$\tilde{\phi}(r, z) = \left\{ \frac{\epsilon_r}{\xi} [A J_p(q_n r) + B J_{-p}(q_n r)] + a \ln r + b \right\} \cos \frac{2n\pi}{l} z \quad (19)$$

식 (18)과 (19)에서 결정되지 않은  $A, B, a, b$ 는 경계조건에 따라 결정된다.

### 3. 반경방향 진동 특성방정식

원통형 압전 변환기는 개략적으로 Fig. 1에 보인 바와 같이 내부 반지름은  $R_i$ 이고 외부반지름은  $R_o$ 이다. 변환기는 내면과 외면 사이에 작용하는 전압  $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다. 이에 대한 경계조건은

다음과 같이 설정된다.

$$r = R_i \text{에서 } \tilde{\sigma}_r = 0 \quad (20a)$$

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (20b)$$

$$r = R_o \text{에서 } \tilde{\sigma}_r = 0 \quad (20c)$$

$$\tilde{\phi} = V_0 \quad (20d)$$

반경방향 응력  $\sigma_r (= \tilde{\sigma}_r(r, z) e^{j\omega t})$ 는 식 (1)에 표현된 관계를 가지므로, 식 (18)과 (19)에 (20a~d)를 적용하면 다음과 같다.

$$f_1(q_n R_i) A + f_2(q_n R_i) B + \frac{\epsilon_r}{R_i} a = 0 \quad (21a)$$

$$g_1(q_n R_i) A + g_2(q_n R_i) B + a \ln R_i + b = 0 \quad (21b)$$

$$f_1(q_n R_o) A + f_2(q_n R_o) B + \frac{\epsilon_r}{R_o} a = 0 \quad (21c)$$

$$g_1(q_n R_o) A + g_2(q_n R_o) B + a \ln R_o + b = V_0 \quad (21d)$$

여기서

$$f_1(q_n r) = \widehat{E}_L \frac{d}{dr} [J_p(q_n r)] + \lambda \frac{1}{r} J_p(q_n r) \quad (22a)$$

$$f_2(q_n r) = \widehat{E}_L \frac{d}{dr} [J_{-p}(q_n r)] + \lambda \frac{1}{r} J_{-p}(q_n r) \quad (22b)$$

$$g_1(q_n r) = \frac{\epsilon_r}{\xi} J_p(q_n r) \quad (22c)$$

$$g_2(q_n r) = \frac{\epsilon_r}{\xi} J_{-p}(q_n r) \quad (22d)$$

이다.

식 (21a~d)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$A = - \frac{V_0}{\Delta} [R_o f_2(q_n R_o) - R_i f_2(q_n R_i)] \quad (23a)$$

$$B = \frac{V_0}{\Delta} [R_o f_1(q_n R_o) - R_i f_1(q_n R_i)] \quad (23b)$$

$$a = \frac{V_0}{\epsilon_r \Delta} [R_i R_o \{ f_1(q_n R_i) f_2(q_n R_o) - f_1(q_n R_o) f_2(q_n R_i) \}] \quad (23c)$$

$$b = \frac{V_0}{\Delta} \{ [R_o f_2(q_n R_o) - R_i f_2(q_n R_i)] g_1(q_n R_i) - [R_o f_1(q_n R_o) - R_i f_1(q_n R_i)] g_2(q_n R_i) - \frac{R_i R_o \ln R_i}{\epsilon_r} [f_1(q_n R_i) f_2(q_n R_o) - f_1(q_n R_o) f_2(q_n R_i)] \} \quad (23d)$$

여기서  $\Delta$ 는 다음과 같다.

$$\Delta = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} \quad (24)$$

$$D_{11} = R_o f_1(q_n R_o) - R_i f_1(q_n R_i)$$

$$D_{12} = R_o f_2(q_n R_o) - R_i f_2(q_n R_i)$$

$$D_{21} = g_1(q_n R_o) - g_1(q_n R_i)$$

$$- \frac{R_o}{\epsilon_r} f_1(q_n R_o) \ln \frac{R_o}{R_i}$$

$$D_{22} = g_2(q_n R_o) - g_2(q_n R_i)$$

$$- \frac{R_o}{\epsilon_r} f_2(q_n R_o) \ln \frac{R_o}{R_i}$$

$\Delta=0$ 이 원통형 압전 변환기의 반경방향 공진을 나타내는 특성방정식이다. 식 (23a~b)를 식 (18)에 대입하되  $V_0/\Delta$ 를 1로 간주하면 진동 모드형상을 알게 된다.

Table 1 Material properties of a PZT (EDO EC-64)

Properties		Values
Mechanical	Mass density, $\rho$	7500 kg/m <sup>3</sup>
	Elastic compliance, $s_{33}^E$	$0.0150 \times 10^{-9}$ m <sup>2</sup> /N
	Elastic compliance, $s_{44}^E$	$0.0388 \times 10^{-9}$ m <sup>2</sup> /N
Dielectric	Relative permittivity, $\zeta_{11}^s/\zeta_0$	692
Electro-mechanical	Charge constant, $d_{33}$	$0.295 \times 10^{-9}$ C/N

#### 4. 수치계산 및 실험 결과 비교

앞 절의 해석 결과를 검증하기 위하여, 수치계산과 실험을 행한다. 실제 원통형 압전 변환기의 치수와 물성치들을 대입하여 압전 고유진동수를 계산하고, 실험을 통하여 측정된 고유진동수와 비교한다. 식 (24)에서 미지수인 각주파수  $\omega$ 를 산출함으로써 고유진동수  $f (= \omega/2\pi)$ 를 구한다.

$\omega$ 는 수치계산 도구에 의존하여 식 (24)로부터 구할 수 있는데, Mathematica<sup>(12)</sup>의 FindRoot 기능을

Table 2 Converted properties of a PZT (EDO EC-64)

Properties		Values
Mechanical	Young's modulus, $E$ ( $= 1/s_{33}^E$ )	66.7 GPa
	Shear modulus, $G$ ( $= 1/s_{44}^E$ )	25.8 GPa
	Poisson's ratio, $\nu$ ( $= E/2G - 1$ )	0.293
	Lame constant, $\lambda$ (Eq. 5a)	36.4 GPa
Dielectric	Permittivity of a free space, $\zeta_0$	$8.854 \times 10^{-12}$ C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup>
	Permittivity, $\zeta$	$6.130 \times 10^{-9}$ C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup>
Electro-mechanical	Piezoelectric stress constant, $\epsilon$ ( $= d_{33}/s_{33}^E$ )	19.67 C/m <sup>2</sup>

Table 3 Comparison of the calculated and measured natural frequencies for the transducers of three sizes

Transducer	Size (mm)			(1,0) mode frequency (kHz)		(1,1) mode frequency (kHz)	
	Outer radius, $R_o$	Inner radius, $R_i$	Length, $l$	Calculated	Measured	Calculated	Measured
A	14.3	12.0	20.0	37.9	38.8	100.2	88.0
B	10.05	7.80	15.0	56.0	56.3	135.7	110.2
C	7.10	5.50	12.0	79.4	80.8	173.7	143.0

사용하면 계산이 간편하다. 계산과 실험에 사용된 압전소자는 미국 EDO사의 PZT(EC-64)로서, 이들의 물성치들이 Table 1에 정리되어 있는데 일반 문헌<sup>(13,14)</sup>에 나와있는 물성치와 비슷하다. 본 논문에 표현된 물성치들로 환산한 값들이 Table 2에 정리되어 있다. Fig. 2에서 보여지는 것과 같은 3가지 크기의 변환기 A, B, C를 사용하였고, 이들의 치수인 외부반경  $R_o$ , 내부반경  $R_i$ , 길이가 Table 3에 기재되어 있다.

원통형의 축대칭 진동 모드의 차수를 반경방향 차수  $m(m=1,2,\dots)$ 과 축방향 차수  $n(n=0,1,2,\dots)$ 으로써  $(m,n)$ 으로 표기한다. 세 개의 변환기에 대하여 (1,0)모드와 (1,1)모드의 압전 고유진동수를 계산하여 Table 3에 기재하였다.

계산된 결과와 비교하기 위하여, Fig. 2에 보인 세 개의 변환기에서의 압전 고유진동수 측정 결과<sup>(8)</sup>를 인용하였다. Impedance gain/phase analyzer (HP 4194A)를 사용하여 변환기의 임피던스를 주파수의 함수로 측정한 결과가 Fig. 3에 있다. 이 그래프에서 임피던스가 극소값을 나타내는 주파수가 압전 고유진동수이다. 세 개의 변환기에 대하여 이와 같이 측정된 첫째 모드와 둘째 모드의 압전 고유진동수를 Table 3에 기재하였다.

Table 3에서 세 개의 변환기에 대한 계산결과와 측정결과를 비교한다. 1차 모드인 (1,0) 모드에서는 서로 잘 일치하고 있다. 2차 모드인 (1,1) 모드에서는 12~18%의 오차가 나타나고 있는데 이는 이방성 재질을 등방성으로 근사화 하였기 때문으로, 정확하지는 않은 결과이지만 5.1절에서 논의하는 모드형상에서 2차 모드가 (2,0) 모드가 아니라 (1,1) 모드임을 확인하는데는 의미 있는 결과이다.

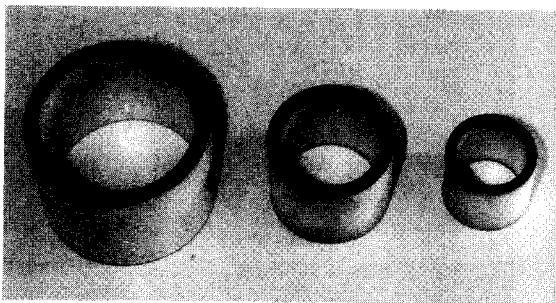
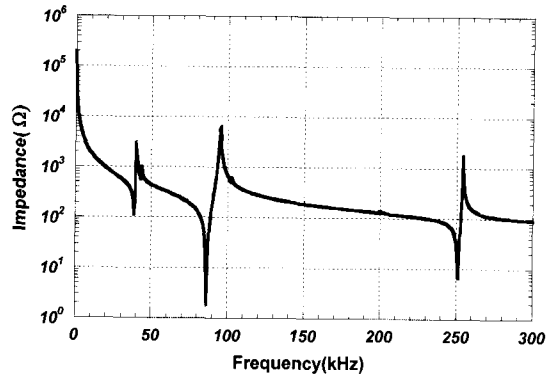
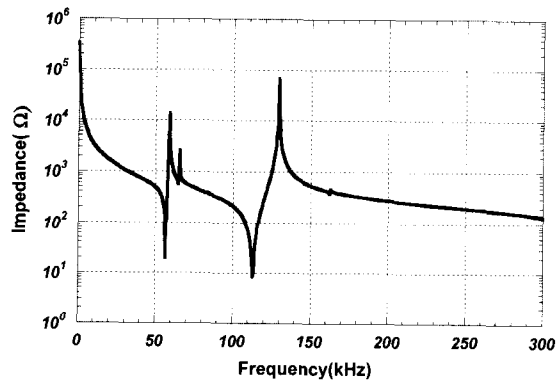


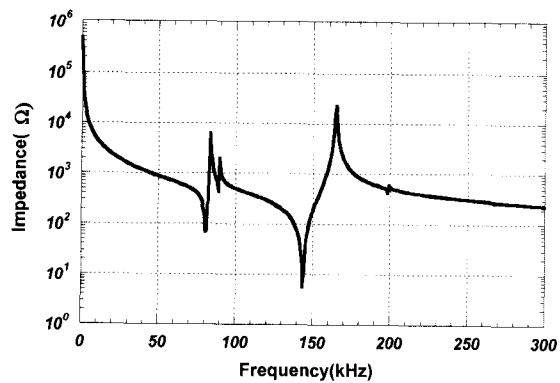
Fig. 2 Photograph of three transducers



(a) Transducer A



(b) Transducer B



(c) Transducer C

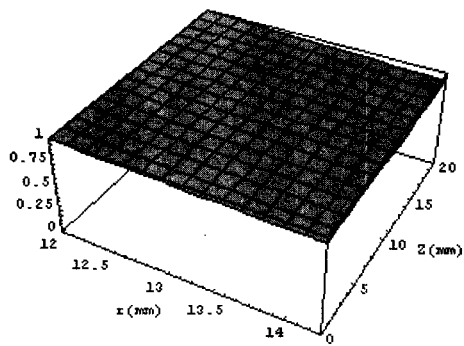
Fig. 3 Impedance curves of the piezoelectric transducers measured as a function of the frequency: (a) transducer A, (b) transducer B, (c) transducer C

## 5. 고 찰

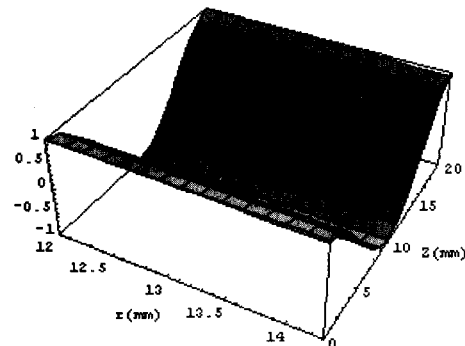
앞 절에서 검증된 해석 이론에 따라 수치해석을 하여 고유모드 형상을 살펴보고, 압전 원통의 반경 및 두께에 따른 고유진동수를 고찰하며, 더불어 압전공진과 탄성공진의 차이를 살펴본다.

## 5.1 모드 형상

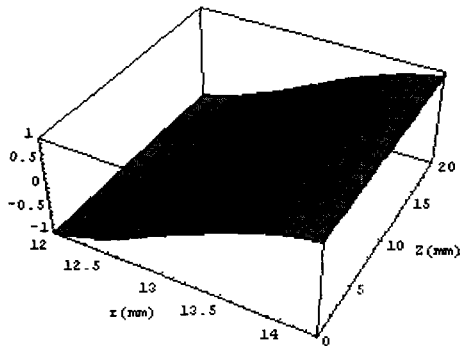
변환기의 진동 모드형상은 식 (18)로부터 구할 수 있다. Fig. 2에 보인 세 개의 변환기 중에서 변환기 A에 대한 모드형상을 계산하여 Fig. 4에 나타내었다. Fig. 4(a)에 보인 (1,0) 모드는 두께 변형이 거의 없는 강체 모드 양상이다. Fig. 4(b)의 (2,0) 모드는 절



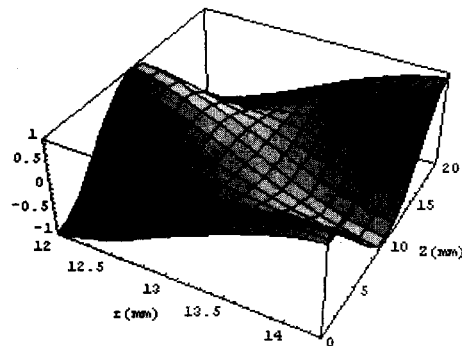
(a) (1,0) mode



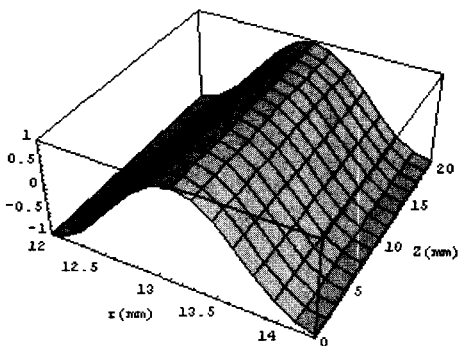
(d) (1,1) mode



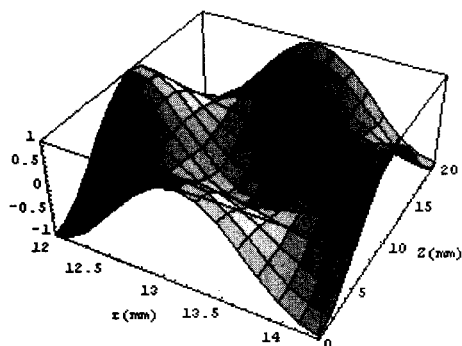
(b) (2,0) mode



(e) (2,1) mode



(c) (3,0) mode



(f) (3,1) mode

Fig. 4 Mode shape of the radial vibration of transducer A

선(nodal line)이 한 개, Fig. 4(c)의 (3,0) 모드는 절선이 두 개인 일반적인 형태를 갖는다. Fig. 4(d) ~ (f)에 보인 (1,1), (2,1) 그리고 (3,1) 모드에서는 반경 좌표( $r$ ) 뿐만 아니라 축방향 좌표( $z$ )에 따른 진동형상 변화가 나타난다. 4절에서 측정결과에 나타난 1차 고유진동수는 Fig. 4(a)의 (1,0) 모드이고, 2차 고유진동수는 Fig. 4(d)의 (1,1) 모드에 해당한다.

### 5.2 압전 영향 및 외경과 고유진동수의 관계

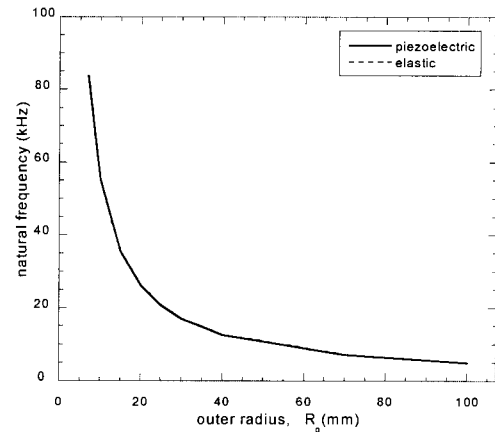
원통형 변환기의 외경과 압전 고유진동수의 관계를 살펴보면, 더불어 원통형 압전체의 고유진동수와 원통형 탄성체의 고유진동수를 비교하는 계산 결과를 Fig. 5에 나타내었다. 원통의 두께는 일정하게 2 mm 인 경우에 바깥 반지름에 따른 고유진동수를 (1,0) 모드, (2,0) 모드, (3,0) 모드에 대해 계산하였고, 압전 고유진동수와 탄성고유진동수를 각각 실선과 점선으로 표시하였다.

Fig. 5(a)는 (1,0) 모드에 대한 결과인데, 실선과 점선 그래프가 거의 일치하고 있는 것은 압전 현상이 이 모드의 고유진동수에 별로 영향을 주지 않는 것을 의미한다. 이는 반지름이 증가함에 따라 고유진동수가 감소하여 0에 수렴하는 것으로 보아 판의 강체 운동 모드에 대응하는 것으로 판단된다. Fig. 4(a)에 보인 모드형상이 이를 뒷받침한다. 즉, 곡률 반지름이 무한대인 판의 두께방향 변형이 없는 운동과 같으며, 곡률 반지름이 작아짐에 따라 약간의 변형이 차츰 수반되어 고유진동수가 커지는 양상이다.

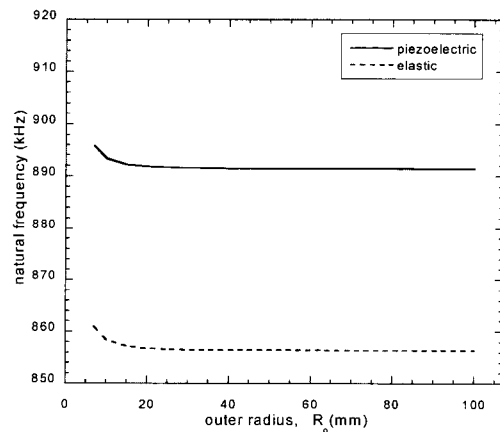
반면에 Fig. 5(b)와 Fig. 5(c)에 보인 고차 모드들은 실선과 점선 그래프가 차이를 보이고 있고, 압전 현상이 고유진동수에 영향을 주고 있음을 의미한다. 압전 응력 상수가 탄성 계수에 추가됨으로써 강성을 더 크게 하므로, 압전현상이 없을 때에 비해 고유진동수가 더 크다. 그 대신 곡률 반지름에 따른 차이는 별로 없다. 이는 Fig. 4(b)와 Fig. 4(c)에 보인 모드형상이 두께 방향의 변형을 나타내는 사실로도 뒷받침된다.

### 5.3 두께와 고유진동수의 관계

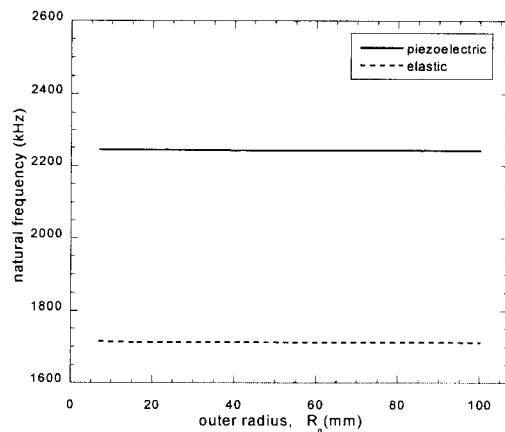
원통형 변환기의 두께와 압전 고유진동수의 관계를 살펴보기 위하여, 외경과 내경의 중간 값  $R_m$ 의 치수는 일정하게 하고 두께를 변화시켜 계산한 고유진동수를 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6(a)는 (1,0) 모드에



(a) (1,0) mode

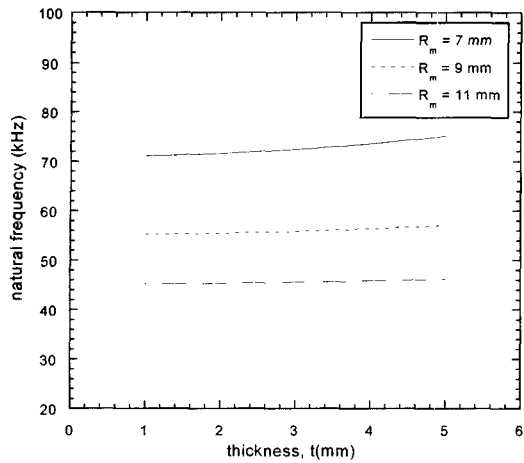


(b) (2,0) mode

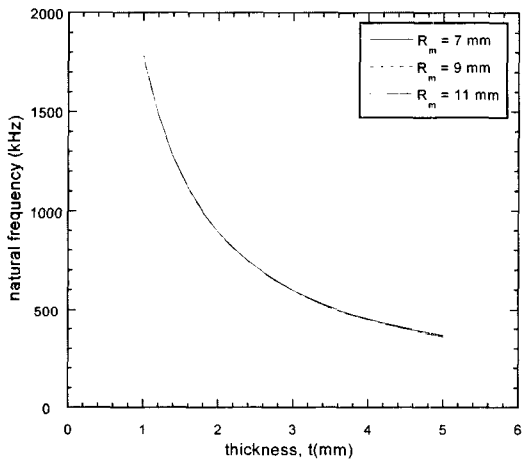


(c) (3,0) mode

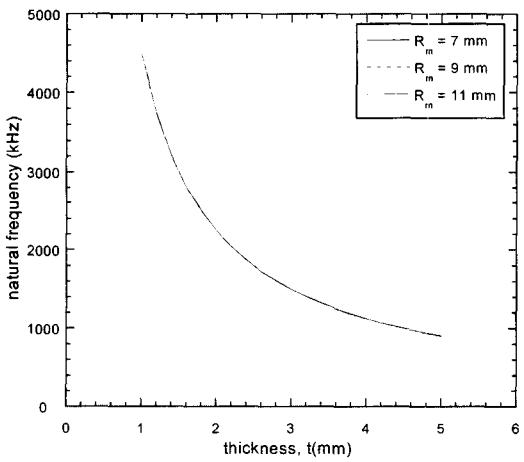
Fig. 5 Comparison of the piezoelectric and elastic natural frequencies displayed as a function of the outer radius of the cylinder with the thickness 2 mm and the length 20 mm



(a) (1,0) mode



(b) (2,0) mode



(c) (3,0) mode

Fig. 6 Piezoelectric natural frequencies displayed as a function of the thickness for various mean radii of the cylinder

대한 것으로서 두께에 따른 고유진동수 변화는 거의 없이 반경에 따라서만 변화가 있다. 이는 Fig. 5(a)를 통해 살펴본 바와 같이 이 모드가 두께 변화가 없는 강제 모드이기 때문이다.

Fig. 6 (b)~(c)에 보인 (2,0) 모드와 (3,0) 모드에서는 두께가 증가함에 따라 고유진동수가 현저히 감소하는 반면에 반경에 따른 차이는 거의 없다. 이는 Fig. 4의 (b)와 (c)의 모드형상에서 알 수 있듯이 두께 방향의 인장 수축이 주된 영향을 미치지 않으므로서, 일반적인 두께방향 종진동 압전 변환기에서 관찰되는 경향과 일치한다.

## 6. 결 론

반경방향으로 진동하는 원통형 압전 변환기의 다양한 모드의 고유진동을 해석하여 특성방정식을 유도하였다. 구한 방정식에 물성치를 대입하여 두 개의 모드의 압전 고유진동수를 계산하고 측정값과 비교함으로써 해석결과를 검증하였다.

수치계산을 통하여, 압전 원통의 반경 및 두께에 따른 고유진동수를 살펴보고, 압전공진과 탄성공진의 차이를 살펴보았다. 기본모드는 강제모드에 해당하는 것으로서 반경 증가에 따라 고유진동수가 감소하여 0에 수렴해가며, 압전현상의 영향이 거의 나타나지 않았고, 두께에 따른 고유진동수 변화는 별로 없었다. 반면에 고차모드에서는 압전현상이 고유진동수에 영향을 주며 곡률 반경은 영향을 별로 주지 않았으나, 두께가 증가함에 따라 고유진동수는 현저히 감소하였다.

본 논문에서는 이방성 압전 소자의 재질을 등방성으로 근사화하여 해석하였는데, 좀 더 정확한 결과를 얻기 위하여 이방성을 고려한 연구가 차후에 필요하겠다.

## 참 고 문 헌

- (1) Ikeda, T., 1996, Fundamentals of Piezoelectricity, Oxford University Press, Oxford.
- (2) Busch-Vishniac, I. J., 1999, Electromechanical Sensors and Actuators, Springer, New York, Chap. 5.
- (3) Elwenspoek, M. and Wiegerink, R., 2001,



Mechanical Microsensors, Springer, Berlin.

(4) Uchino, K., 1997, Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors, Kluwer Academic Publishers, Boston.

(5) 권오수, 김진오, 2000, "압전 비틀림 변환기의 진동특성 해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 10 권, 제 6 호, pp. 955~962.

(6) 권오수, 김진오, 2001, "랑주방향 압전 비틀림 변환기의 진동특성," 대한기계학회논문집(A), 제 25 권, 제 8 호, pp. 1197~1205.

(7) 이영신, 강이석, 김용환, 문홍기, 오재문, 변영철, 1997, "원통형 압전 진동 자이로 개발," 한국항공우주학회지, 제 25 권, 제 1 호, pp. 106~116.

(8) 김진오, 정형근, 2001, "원통형 압전 변환기의 반경방향 진동 특성," 한국소음진동공학회논문집, 제 11 권, 제 7 호, pp. 247~252.

(9) Lu, P., Lee, K. H., Lin, W. Z., Shen, F. and Lim, S. P., 2001, "An Approximate Frequency

Formula for Piezoelectric Circular Shells," Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, pp. 309~320.

(10) Achenbach, J. D., 1975, Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland, Amsterdam, Chap. 2.

(11) Miu, D. K., 1993, Mechatronics : Electromechanics and Contromechanics, Springer-verlag, New York, Chap. 6.

(12) Wolfram, S. 1988, Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer, Addison Wesley Publishing Co., New York.

(13) 岡崎清, 1983, セラミック誘電体工学, 第3版, 學獻社, 第8章.

(14) Berlincourt, D. A., Cmolik, C. and Jaffe, H., 1960, "Piezoelectric Properties of Polycrystalline Lead Titanate Zirconate Compositions," Proceedings of the IRE, pp. 220~229.