

선형 시변 시스템의 고유치 지정을 위한 Ackermann형 공식

Eigenvalue Assignment for Linear Time-Varying Systems

via Ackermann-like Formula

이 호 철, 최 재 원

(Ho Chul Lee and Jae Weon Choi)

Abstract : This paper deals with eigenvalue assignment techniques for linear time-varying systems as a way of achieving feedback stabilization. For this, the novel eigenvalue concepts, which are the time-varying counterparts of the conventional (time-invariant) eigenvalue notions, are introduced. Then, the Ackermann-like formulae for SISO/MIMO linear time-varying systems are proposed. It is believed that these techniques are the generalized versions of the Ackermann formulae for linear time-invariant systems. The advantages of the proposed Ackermann-like formulae are that they neither require the transformation of the original system into the phase-variable form nor compute the eigenvalues of the original system. Two examples are given to demonstrate the capabilities of the proposed techniques.

Keywords : eigenvalue assignment, Ackermann formula, linear time-varying system

I. 서론

대부분의 실제 시스템은 시변 특성을 지니고 있으므로 최근 경향은 시스템을 분석하거나 제어를 설계할 때 시변 요소를 포함하는 쪽으로 많은 연구가 진행되고 있다. 예를 들면, 비행체의 비행제어 연구시 대상 비행체의 운동방정식은 비행 속도에 관계된 계수를 포함하고 있다. 과거에는 속도를 일정한 것으로 고려하여 선형 미분방정식의 계수를 상수로 고려하여 그 해를 구하곤 하였다. 아음속 항공기에 의해 구현되는 상대적으로 작은 가속을 가지는 비행에서 그러한 가정은 만족할 만한 결과를 얻기에 적절한 것이었지만, 현대의 초음속 항공기나 미사일 등에 의해 구현되고 있는 급격한 가속도나 속도의 증감은 기존의 선형 시불변 시스템 모델로서는 수용할 수 없는 경우가 생기게 되었다. 또한, 급격한 연료 소비는 비행체의 질량, 무게 중심, 관성 모멘트 등을 제어 동작 중에 상당한 정도로 변하게 한다. 결국 항공기 또는 미사일 등의 비행제어시스템 설계 및 해석을 위한 최근 경향은 이러한 시변 파라미터를 고려하여 설계하는 쪽으로 많은 연구가 진행되고 있다. 또한 고유치 지정 기법은 안정화 제어기 설계, 최적화 문제 등에 적용되므로 제어기 설계 문제에서는 대단히 중요한 역할을 한다. 따라서 본 논문에서는 선형 시불변 시스템의 고유치 지정 방법 중 하나인 Ackermann 공식을 선형 시변 시스템의 경우에도 적용가능한 일반화된 형태의 Ackermann형 공식을 새로이 제안한다.

지금까지 알려진 선형 시변 시스템의 고유치 지정 방법으로는 먼저 시스템 행렬을 Lyapunov 변환에 의한 상태 변환을 통하여 위상 변수 표준형(phase-variable canonical form)으로 변환하면 준 시스템은 시불변 시스템 형태로 변환되고, 이와 같이 변환된 시스템에 대하여 기존의 선형

시불변 시스템에 적용가능하였던 고유치 지정 방법을 이용하였다. 즉, 준 시스템의 시스템 행렬을 위상 변수 표준형으로 변환하고, 변환된 시스템에 되먹임을 통하여 시변 계수들은 제거하고 바람직한 시불변 고유치들로 구성된 계수를 대입하는 방법이다. 따라서 초기의 연구 결과들은 Lyapunov 변환을 위한 변환 행렬 선정에 관한 것들이 대부분이었다[1-4]. 또한 페루프 시스템의 바람직한 고유치 선정을 위하여 시불변 시스템의 고유치 이론에 근거하므로, 엄밀한 의미에서 시변 시스템을 위한 고유치 지정으로 볼 수 없다. 이것은 지금까지 시불변 고유치 이론을 포함하는 시변 고유치 이론이 없었기 때문에 판단된다. 한편, 선형 시불변 시스템에 대한 Ackermann 공식은 잘 알려진 바대로 페루프 시스템의 바람직한 고유치들로 구성된 특성 방정식의 계수를 이용하여 제어 이득을 구하는 것이다[5]. Ackermann 공식을 이용하여 고유치를 지정을 하면 개루프의 고유치를 구할 필요가 없고, 또한 유사 변환에 의한 상태 변환을 수행할 필요도 없다. 본 논문에서는 이러한 Ackermann 공식의 장점을 유지하는 시변 시스템의 Ackermann형 공식을 새로이 제안한다. 이를 위해 먼저 개발된 기존의 시불변 시스템의 고유치 이론을 포함하는 시변 시스템의 고유치 이론을 간략히 소개한다[6][7][15].

기존의 연구 결과에 대하여 간단히 살펴보면 다음과 같다. 참고문헌 [1-4]에서는 시변 시스템을 위상 변수 표준형으로 변환하기 위한 변환 행렬 선정에 대해서 다루었다. 특히, Silverman[4]은 단일 입출력 선형 시변 시스템에 대한 안정화 제어기 설계 방법으로 고유치 지정 기법을 제안하였다. 그러나 여기에서는 페루프 시스템의 고유치를 지정하기 위해서는 Lyapunov 변환을 통한 상태 변환을 수행해야 하고, 고유치 이론 자체도 시변 시스템을 위한 것이 아니라 시불변 고유치 이론을 이용하였다. 참고문헌 [8-11]에서는 제어 가능한 시변 시스템의 고유치를 지정하는 방법들에 대해서 다루었다. Wolovich[8]는 상태 되먹임을 통하

여 시변 시스템이 점근적 안정화가 되기 위한 조건과 안정화된 시스템이 바람직한 고유치를 가진 위상 변수 표준형 시불변 시스템과 동치가 되기 위한 변환 행렬 선정법을 제시하였다. Ngu-yen[9]도 Wolovich와 유사한 접근법으로 시변 시스템을 위한 고유치 지정 기법을 제시하였다. 한편, Valasek과 Olgac[10,11]은 선형 시변 시스템에 대한 Ackermann형 공식을 제안하였다. 그러나 이 결과 또한 앞에서 언급한 결과들과 유사한 접근법이다. 즉, 준 시변 시스템이 Lyapunov 변환과 상태 되먹임을 통하여 바람직한 고유치를 가지는 시불변 시스템과 동치가 되도록 하는 것이다. 또한, 단일 입출력 시스템에 대한 Ackermann형 공식이 직접적으로 다 입출력 시스템에 대한 공식으로 확장될 수 없다. 또한 저자들은 시스템 확장을 통해서 제어 불가능한 시변 시스템에 대한 고유치 지정 기법을 제안하였다 [12]. 한편, 참고문헌 [13]에서는 시변 시스템의 새로운 고유치, 고유벡터 개념을 이용하여 시변 시스템을 위한 고유구조지정기법을 제안하였다.

위에서 언급한 이전의 연구 결과들을 정리하면, 기존의 시변 시스템에 대한 고유치 지정 기법은 시불변 고유치 이론을 시변 시스템에 직접 적용했다는 것과 Lyapunov 변환을 통한 상태 변환을 수행해야한다는 등의 단점들이 있었다. 따라서 본 논문에서는 이러한 단점들을 보완하기 위하여 첫째, 최근에 개발된 미분 대수 스펙트럼 이론에 기반한 선형 시변 시스템의 새로운 고유치 이론을 도입하고 둘째, 상태 변환이 필요 없이 직접 고유치를 지정할 수 있는 시변 시스템의 새로운 Ackermann형 공식을 제안한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 서론에 이어, II장에서는 선형 시변 시스템의 새로운 고유치 개념인 PD-고유치에 대하여 설명하고, 이를 이용한 시변 시스템의 안정도 판별법, 시변 고유치와 시변 미분 방정식의 계수들과의 관계 등을 기술한다. III장과 IV장에서는 각각 단일 입출력, 다 입출력 시변 시스템에 대한 고유치 지정 기법을 제안하고 수치 예제를 통하여 그 적용 과정과 타당성을 살펴본다. 마지막으로 V장에서는 본 논문의 주요 내용을 요약하고 결론을 내린다.

II. 선형 시변 시스템의 새로운 고유치 개념

다음 식과 같이 주어지는 N 차 스칼라 선형 시변 시스템을 상정한다.

$$y^{(N)}(t) + a_N(t)y^{(N-1)}(t) + \dots + a_1(t)y(t) = 0 \tag{1}$$

$$y^{(k)}(t_0) = y_{k0}; k = 0, 1, \dots, N-1$$

(1)로 표현되는 선형 시변 시스템은 다음과 같은 스칼라 미분 다항식 연산자(SPDO: Scalar Polynomial Differential Operator)를 이용하여 $D_a\{y\} = 0$ 의 형태로 표현될 수 있다.

$$D_a = \delta^{(N)} + a_N(t)\delta^{(N-1)} + \dots + a_2(t)\delta + a_1(t) \tag{2}$$

(2)의 $\delta = \frac{d}{dt}$ 는 미분 연산자이다. 선형 시변 시스템 (1)에 대한 연구는 제어, 신호처리, 동적 시스템 이론에서 매우 중요하다. 이것은 많은 동적 시스템이 (1)과 같이 선형 미분 방정식으로 모델링될 뿐만 아니라 비선형 동적 시스

템도 선형화 함으로써 효과적으로 다루어질 수 있기 때문이다. $a_k(t) \equiv a_k$ 인 시불변 시스템의 경우는 해석적인 해, 안정도 판별, 주파수역 해석 및 안정화 제어기 설계 기법 등을 쉽게 적용할 수 있는 고유치 이론이 있다는 사실은 잘 알려져 있다. 그러나 또한 시불변 고유치 이론은 시변 시스템에 직접 적용될 수 없다는 사실도 잘 알려져 있다. 최근에 다음과 (3)과 같은 SPDO의 인수분해에 관한 플로켓(Floquet) 결과에 기반을 둔 선형 시변 시스템 (2)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론이 개발되었다[6,7,15].

$$D_a = (\delta - \lambda_N(t)) \dots (\delta - \lambda_2(t)) (\delta - \lambda_1(t)) \tag{3}$$

따라서, 본 장에서는 선형 시변 시스템의 고유치 개념을 도입하기 위하여, 선형 시변 미분 방정식 (1)에 대한 고전적인 결과와 (1)에 대한 미분 대수 스펙트럼 이론에 관한 새로운 결과들을 간단히 살펴본다. (3)의 미분 인수분해 연산자에 관한 플로켓의 고전적인 결과를 이용하여 미분 대수 고유치 개념에 대한 기본 용어를 다음과 같이 요약한다 [6,7,15].

정의 1. (a) D_a 를 $a_k(t) (k=1, 2, \dots, N)$ 을 가지고 있는 SPDO라 하자. 그러면 (3)의 인수분해에 의해서 주어지는 스칼라 함수 $\lambda_k(t) (k=1, 2, \dots, N)$ 를 D_a 의 SD-고유치(Serial Differential-eigenvalue)라 명명한다. 또한, $\rho_k(t) = \lambda_1(t) + \int_{t_0}^t q_k(t) q_k^{-1}(t) dt$ ($\rho_1(t) = \lambda_1(t), q_k(t) = \int \phi_{21}(t) \int \phi_{32}(t) \dots \int \phi_{k,k-1}(t) dt^{k-1} t, \phi_{ij}(t) = e^{\int (\lambda_i(t) - \lambda_j(t)) dt}$)를 D_a 의 PD-고유치(Parallel Differential-eigenvalue)라 명명한다.

(b) $\lambda_k(t)$ 가 (3)을 만족한다면, 집합 $\Gamma_a = \{\lambda_k(t)\}_{k=1}^N$ 을 D_a 에 대한 SD-스펙트럼(SD-spectrum)이라 명명한다.

(c) $\rho_k(t)$ 가 PD-고유치고 $\{y_k(t) = \exp(\int \rho_k(t) dt)\}_{k=1}^N$ 가 $D_a\{y\} = 0$ 의 해라면 집합 $\Gamma_a = \{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 D_a 에 대한 PD-스펙트럼(PD-spectrum)이라 명명한다.

(d) $A_c(t)$ 를 D_a 에 대응되는 다음과 같은 형태를 갖는 동반행렬이라 하자.

$$A_c(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & \dots & -a_N(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

그러면, 다음의 행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 SD-스펙트럼 표준형이라 부른다.

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_N(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= SS[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]$$

그리고 다음과 같이 주어지는 대각행렬을 D_a 와 $A_c(t)$ 에 대한 PD-스펙트럼 표준형이라 부른다.

$$r(t) = \text{diag}[\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)] \quad (6)$$

(e) D_a 를 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 를 가지고 있는 N 차 SPD라 하고, $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 는 $y_i(t) = \exp(\int \rho_i(t) dt)$ 인 $D_a(y) = 0$ 의 근이라 하자. 다음 행렬을 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 에 대응되는 Wronskian 행렬이라 한다.

$$W(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_N(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) & \dots & \dot{y}_N(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(N-1)}(t) & y_2^{(N-1)}(t) & \dots & y_N^{(N-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

그리고, $D(t)$ 는 다음의 대각행렬을 나타낸다.

$$D(t) = \text{diag}[y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t)] \quad (8)$$

그러면 다음의 관계가 성립한다.

$$W(t)D^{-1}(t) = P(\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_N(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ D_{\rho_1}\{1\} & D_{\rho_2}\{1\} & \dots & D_{\rho_N}\{1\} \\ D_{\rho_1}^2\{1\} & D_{\rho_2}^2\{1\} & \dots & D_{\rho_N}^2\{1\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{\rho_1}^{N-1}\{1\} & \dots & \dots & D_{\rho_N}^{N-1}\{1\} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, $D_{\rho_i} = (\delta + \rho_i(t))$, $D_{\rho_i}^k = D_{\rho_i} D_{\rho_i}^{k-1}$ 이고, $W(t) = W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_N(t))$ 는 $\{y_i(t)\}_{i=1}^N$ 의 Wronskian 행렬이다. 표준 좌표변환 행렬 $P(t)$ 는 PD-스펙트럼 $\{\rho_k(t)\}_{k=1}^N$ 에 대응되는 D_a 에 대한 모드 표준 행렬(modal canonical matrix)이라고 불린다. $P(t)$ 의 열 벡터 $p_i(t)$ 는 다음의 식을 만족한다.

$$A_c(t)p_i(t) - \rho_i(t)p_i(t) = \dot{p}_i(t) \quad (10)$$

그리고 $Q(t) = P^{-1}(t)$ 의 행 벡터 $q_i^T(t)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$q_i^T(t)A_c(t) - \rho_i(t)q_i^T(t) = -\dot{q}_i^T(t) \quad (11)$$

따라서, $p_i(t)$ 와 $q_i^T(t)$ 를 각각 PD-고유치 $\rho_i(t)$ 에 대응되는 $A_c(t)$ 와 D_a 의 우 PD-고유벡터(right PD-eigenvector) 및 좌 PD-고유벡터(left PD-eigenvector)라고 정의한다[6][7][15].

(1)의 시변 미분 방정식 계수 $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^N$ 와 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^N$ 와의 관계는 다음의 보조정리 1에 나타나 있다[6], 이것은 바람직한 PD-고유치들을 가지는 페루프 시스템의 미분 방정식 계수 결정에 사용된다.

보조정리 1 : 선형 시변 시스템이 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^N$ 으로 구성된다면, 선형 시변 미분 방정식의 계수 $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^N$ 는 다음 공식에 의해서 구할 수 있다.

$$\alpha_i(t) = \frac{\dot{p}_{i,N+1}}{\det P(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t))} \quad (12)$$

여기서 $P(\rho_1(t), \dots, \rho_N(t))$ 는 (9)에서 정의된 모드 표준

행렬이고, $\dot{p}_{i,N+1}(t)$ 는 다음 (13)에서 정의되는 행렬 $P_{N+1}(t)$ 에서 $p_{i,N+1}(t)$ 의 여인자(cofactor)를 나타낸다[6].

$$P_{N+1}(t) = [p_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & P_N(t) & & D_{\rho_1}\{1\} \\ & & & \vdots \\ D_{\rho_1}^N\{1\} & \dots & D_{\rho_N}^N\{1\} & D_{\rho_N}^N\{1\} \end{bmatrix} \quad (13)$$

선형 시불변 시스템에서는 시스템의 모든 고유치가 음의 영역에 있으면 준 시스템은 안정하다는 사실은 잘 알려져 있고, 이 이론은 직접적으로 선형 시변 시스템에 적용하여 안정도를 판별할 수 없다는 사실 또한 잘 알려져 있다. 따라서 다음 보조정리 2에서 PD-스펙트럼을 이용한 선형 시변 시스템의 안정도 판별법을 소개한다. PD-스펙트럼을 이용하여 안정도 판별을 위해서는 다음 정의 2와 같은 확장-평균(extended-mean) 개념이 필요하다.

정의 2 : 구간 $I = [t_0, \infty)$ 상에서 $\sigma(t): I \rightarrow R$ 를 적분 가능한 함수라고 하면, 함수 $\sigma(t)$ 의 확장-평균 em을 다음과 같이 정의한다.

$$\text{em}(\sigma(t)) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sigma(t) dt \quad (14)$$

보조정리 2 : (2)와 같은 스칼라 미분 다항식 연산자가 잘 정의된 PD-스펙트럼 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^N$ 로 구성되고 $p_i(t)$ 와 $q_i^T(t)$ 가 각각 $\rho_i(t)$ 에 대응하는 우 및 좌 PD-고유벡터라고 하면, 다음 두 조건을 만족하는 PD-스펙트럼과 우 및 좌 PD-고유벡터로 구성된 선형 시변 시스템 $D_a(y(t)) = 0$ 의 해는 점근적으로 안정하다[14].

(i) 상수 $0 < c_i \leq \infty$ 가 존재하고 다음 식을 만족한다.

$$\text{em}(\text{Re} \rho_i(t)) = -c_i < 0 \quad (15)$$

(ii) 상수 $h_i > 0$ 와 $0 < d_i < c_i$ 가 존재하고 다음 식을 만족한다.

$$\|p_i(t)q_i(t_0)\| < h_i e^{d_i(t-t_0)} \quad (16)$$

III. 단일 입출력 선형 시변 시스템에 대한 Ackermann형 공식

본 장에서는 단일 입출력 선형 시변 시스템의 고유치 지정을 위한 Ackermann형 공식을 제안한다. 먼저 다음 식과 같은 단일 입출력 선형 시스템을 상정한다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t) \quad (17)$$

여기서 $x(t) \in R^{N-1}$, $u(t)$ 는 각각 상태 벡터와 스칼라 입력이고, 준 시스템은 제어 가능하여 상태 피드백에 의해 안정화시킬 수 있다고 하자. 서론에서 서술한 것처럼 이전의 연구결과들은 준 시스템을 Lyapunov 변환에 의한 상태 변환을 수행해야했고, 페루프 시스템의 바람직한 고유치 설정을 위하여는 시불변 시스템의 고유치 이론에 근거한 방법을 사용하였다. 그러나 본 논문에서 제안하는 고유치 지정 기법에서는 상태 변환이 Ackermann형 공식을 유도하기 위한 중간 단계로 포함되어 있고, 고유치 이론 또한 선형

시변 시스템의 일반화된 고유치 개념인 PD-고유치 이론을 도입하였다. 따라서 본 논문에서 제안하는 Ackermann형 공식을 이용한 고유치 지정 기법에서는 준 시스템을 위상 변수 표준형으로 변환할 필요가 없고, 시변 시스템을 위한 의미 있는 페루프 고유치를 선정할 수 있다. Ackermann형 공식은 다음 정리 1의 증명 과정에서 나타난다.

정리 1 : (17)과 같은 단일 입출력 선형 시변 시스템이 제어 가능하다면 상태 되먹임 $u(t) = k(t)x(t)$ 를 통하여 페루프 시스템 $\dot{x}(t) = (A(t) + b(t)k(t))x(t)$ 의 PD-스펙트럼을 임의의 위치로 지정하여 옮길 수 있다.

증명 : 준 시스템이 제어 가능하므로 비정칙(nonsingular)가 제어성 행렬(controllability matrix) $C(t)$ 가 존재한다.

$$C(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \dots \ \xi_N(t)] \quad (18)$$

여기서 $\xi_{i-1}(t) = A(t)\xi_i(t) - \frac{d}{dt}\xi_i(t)$ 이고, $\xi_1(t) = b(t)$ 이다. 또한, 다음 식을 만족하는 가제어성 행렬의 역행렬 $C^{-1}(t)$ 가 존재한다.

$$C^{-1}(t)C(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_{N-1}(t) \\ \hat{C}_{N-2}(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_0(t) \end{bmatrix} \times [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \dots \ \xi_N(t)] = I \quad (19)$$

여기서 $\hat{C}_i(t)$ 는 $C^{-1}(t)$ 의 행 벡터이다.

한편, 다음과 같은 상태를 정의한다.

$$z(t) = \hat{C}_0(t)x(t) \quad (20)$$

여기서 $\hat{C}_0(t) = \hat{C}_0(t)$ 이고, 각 $p=1, 2, \dots, N$ 에 대하여 $\hat{C}_p(t)$ 를 다음 식에 의해서 구한다.

$$\hat{C}_p(t) = \frac{d}{dt} \hat{C}_{p-1}(t) + \hat{C}_{p-1}A(t) \quad (21)$$

그러면 각 p 에 대하여 다음의 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} z(t) &= \hat{C}_0(t)x(t) \\ \dot{z}(t) &= \hat{C}_1(t)x(t) \\ &\vdots \\ z^{(N-1)}(t) &= \hat{C}_{N-1}(t)x(t) \end{aligned} \quad (22)$$

$$z^{(N)}(t) = \hat{C}_N(t)x(t) + \hat{C}_{N-1}(t)b(t)u(t) \quad (23)$$

여기서 행 벡터 $\hat{C}_p(t)$ 는 $(1 \times N)$ 차원이고, N 번째 행 벡터 $\hat{C}_N(t)$ 는 나머지 행 벡터 $\hat{C}_0(t), \hat{C}_1(t), \dots, \hat{C}_{N-1}(t)$ 들의 선형 조합으로 나타낼 수가 있다. 그리고 (23)에서 $\hat{C}_{N-1}(t)b(t)$ 는 1이다. 따라서 (23)은 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$z^{(N)}(t) = [a_1(t) \hat{C}_0(t) + a_2(t) \hat{C}_1(t) + \dots + a_N(t) \hat{C}_{N-1}(t)]x(t) + u(t) \quad (24)$$

그리고 (22)와 (24)를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \\ \vdots \\ z^{(N-1)}(t) \\ z^{(N)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & \dots & \dots & a_N(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{C}_0(t) \\ \hat{C}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{N-2}(t) \\ \hat{C}_{N-1}(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (25)$$

(25)를 이용하여 준 선형 시변 시스템이 원하는 PD-스펙트럼을 가지기 위하여 다음과 같이 되먹임 이득을 선택한다.

$$u(t) = k(t)x(t)$$

$$= - \left\{ \begin{array}{l} [a_1(t) \ \dots \ a_N(t)] \\ + [d_1(t) \ \dots \ d_N(t)] \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \hat{C}_0(t) \\ \hat{C}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{N-1}(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (26)$$

여기서 $d_i(t)$ 는 원하는 PD-스펙트럼을 보조정리 1에 적용하여 구하고, 원하는 PD-스펙트럼이 보조정리 2를 만족한다면 페루프 시스템은 안정하게 된다. 따라서 되먹임 이득 (26)을 준 시스템에 인가하면 다음과 같은 페루프 시스템이 되고, 원하는 PD-스펙트럼을 가지는 시변 시스템과 동치(equivalence)가 된다.

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_1(t) & -d_2(t) & \dots & \dots & -d_N(t) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{C}_0(t) \\ \hat{C}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{N-1}(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (27)$$

주목 1 : 본 논문에서는 (26)의 되먹임 이득을 단일 입출력 선형 시변 시스템의 Ackermann형 공식으로 제안한다. 본 논문에서 제안하는 Ackermann형 공식을 이용하여 고유치 지정을 수행하면 준 시스템을 위상 변수 표준형으로 변환할 필요가 없을 뿐만 아니라 준 시스템의 개루프 PD-고유치도 구할 필요가 없다. 또한 직접적으로 선형 시변 시스템의 고유치 지정을 수행할 수 있다. 따라서 본 논문의

Ackermann형 공식은 단일 입출력 선형 시불변 시스템을 위한 Ackermann 공식의 일반화된 공식으로 볼 수 있다.

다음의 수치 예제를 통하여 단일 입출력 선형 시변 시스템을 위한 Ackermann형 공식의 적용 과정과 타당성을 살펴본다.

예제 1 : 다음과 같이 주어지는 단일 입출력 선형 시변 시스템을 상정한다[10].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ \cos(t) & & \\ \sin(t) & & \\ 0 & & \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ u(t) \\ \end{bmatrix} \quad (28)$$

준 시스템의 제어 목적은 준 시스템을 안정화시키고, 페루프 시스템의 PD-스펙트럼이 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^3 = \{-5 - e^{-t}, -6 - e^{-t}, -7 - e^{-t}\}$ 가 되도록 하는 것으로 가정한다. 먼저 준 시스템이 제어 가능하므로 다음과 같이 가제어성 행렬을 구성할 수 있다.

$$C(t) = [\xi_1(t) \ \xi_2(t) \ \xi_3(t)] \\ = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & -\sin(t) - \cos(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) & \cos(t) - \sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

또한 위 가제어성 행렬의 역행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_2(t) \\ \tilde{C}_1(t) \\ \tilde{C}_0(t) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \cos(t) - \sin(t) & \cos(t) + \sin(t) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

그러면 (21)을 이용하여 $\{\hat{C}_i(t)\}_{i=0}^3$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{C}_0(t) &= \tilde{C}_0(t) = [-\sin(t) \ \cos(t) \ 1], \\ \hat{C}_1(t) &= \frac{d}{dt} \hat{C}_0(t) + \hat{C}_0(t)A(t) \\ &= [0 \ 0 \ 1], \\ \hat{C}_2(t) &= \frac{d}{dt} \hat{C}_1(t) + \hat{C}_1(t)A(t) \\ &= [\cos(t) \ \sin(t) \ 0], \\ \hat{C}_3(t) &= \frac{d}{dt} \hat{C}_2(t) + \hat{C}_2(t)A(t) \\ &= [-\sin(t) \ \cos(t) \ 0] \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $\hat{C}_3(t)$ 는 $\{\hat{C}_i(t)\}_{i=0}^2$ 의 선형 조합으로 나타낼

수 있으므로 다음과 같이 선형 조합 계수를 구할 수 있다.

$$\hat{C}_3(t) = [1 \ -1 \ 0] \begin{bmatrix} \hat{C}_0(t) \\ \hat{C}_1(t) \\ \hat{C}_2(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

한편, 보조정리 1을 이용하여 원하는 PD-스펙트럼으로 구성된 계수 $\{d_i(t)\}_{i=1}^3$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d_1(t) &= 210 + e^{-3t} + 15e^{-2t} + 90e^{-t}, \\ d_2(t) &= 107 + 3e^{-2t} + 33e^{-t}, \\ d_3(t) &= 18 + 3e^{-t} \end{aligned} \quad (33)$$

그러면 (32)와 (33)을 (26)에 적용하여 준 시스템의 제어 목적을 만족하는 되먹임 이득을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$u(t) = - \begin{bmatrix} [a_1(t) \ a_2(t) \ a_3(t)] \\ + [d_1(t) \ d_2(t) \ d_3(t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}_0(t) \\ \hat{C}_1(t) \\ \hat{C}_2(t) \end{bmatrix} x(t) \quad (34) \\ = - [k_1(t) \ k_2(t) \ k_3(t)] x(t)$$

여기서, $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$ 는 각각 다음과 같다.

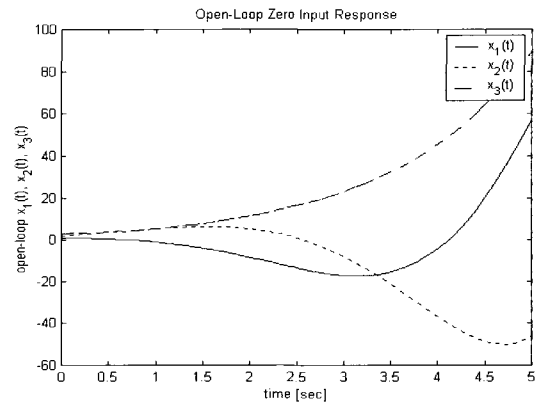


그림 1. 개루프 시스템의 영-입력 응답.
Fig. 1. Zero-input response for open-loop system.

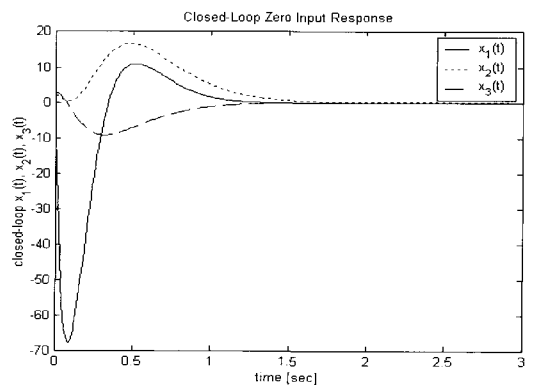


그림 2. 페루프 시스템의 영-입력 응답.
Fig. 2. Zero-input response for closed-loop system.

$$\begin{aligned}
 k_1(t) &= (18 + 3e^{-t})\cos(t) - \\
 &\quad (211 + e^{-3t} + 15e^{-2t} + 90e^{-t})\sin(t), \\
 k_2(t) &= (211 + e^{-3t} + 15e^{-2t} + 90e^{-t})\cos(t) + \\
 &\quad (18 + 3e^{-t})\sin(t), \\
 k_3(t) &= 317 + e^{-3t} + 18e^{-2t} + 123e^{-t}
 \end{aligned} \tag{35}$$

다음의 그림 1, 그림 2에는 초기 조건 $x_1(0)=1$, $x_2(0)=2$, $x_3(0)=3$ 에 의한 개루프 및 폐루프 시스템의 영-입력 응답(zero-input response)이 각각 나타나 있다. 그림 1은 준 시스템의 개루프 응답이 불안정함을 보여주고, 그림 2는 본 논문에서 제안한 Ackermann형 공식을 이용하여 PD-고유치를 적절히 지정함으로써 준 시스템을 안정화시킬 수 있음을 보여준다. ■

IV. 다 입출력 선형 시변 시스템에 대한

Ackermann형 공식

본 장에서는 다음과 (36)과 같이 표현되는 다 입출력 선형 시변 시스템에 대한 고유치 지정을 위한 Ackermann형 공식을 제안한다.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{36}$$

여기서 $x(t) \in R^{N-1}$, $u(t) \in R^{m-1}$ 은 각각 상태 벡터와 입력 벡터이다. 준 시스템의 제어 목적은 상태 되먹임을 인가한 폐루프 시스템이 원하는 PD-스펙트럼을 가지는 다 입출력 선형 시변 시스템과 동치가 되도록 하는 것이다. 본 장에서는 III장에서 제안한 단일 입출력 선형 시변 시스템에 대한 Ackermann형 공식을 확장하여 다 입출력 선형 시변 시스템에 대한 Ackermann형 공식을 제안한다. III장에서와 마찬가지로, 다음 정리 2의 증명 과정을 통해서 다 입출력 선형 시변 시스템에 대한 Ackermann형 공식을 유도한다.

정리 2 : (36)과 같은 다 입출력 선형 시변 시스템이 제어 가능하다면 상태 되먹임 $u(t) = K(t)x(t)$ 를 통하여 폐루프 시스템 $\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K(t))x(t)$ 의 PD-스펙트럼을 임의의 위치로 지정하여 옮길 수 있다.

증명 : 다 입출력 선형 시변 시스템의 가제어성 행렬 $C(t) \in R^{N \times Nm}$ 를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 C(t) &= [\mathcal{E}_1(t) \ \mathcal{E}_2(t) \ \cdots \ \mathcal{E}_N(t)] \\
 &= [\xi_{11}(t) \ \xi_{21}(t) \ \cdots \ \xi_{m1}(t) \ \xi_{12}(t) \ \cdots \ \xi_{mN}(t)]
 \end{aligned} \tag{37}$$

여기서 $\mathcal{E}_{i+1}(t) = A(t)\mathcal{E}_i(t) - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_i(t)$ ($\mathcal{E}_1(t) = B(t)$)이고, $\xi_{ji}(t)$ 는 $\mathcal{E}_i(t)$ 의 j 번째 열 벡터를 나타낸다. 준 시스템은 제어 가능하므로 선형 독립인 기저(basis)를 사용하여 다음과 같은 비정칙 행렬 $\hat{C}(t) \in R^{N \times N}$ 를 구성할 수 있다.

$$\hat{C}(t) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(t) & \xi_{21}(t) & \cdots & \xi_{\sigma_1 1}(t) & \xi_{12}(t) \\ \cdots & \xi_{\sigma_2 2}(t) & \cdots & \xi_{\sigma_m m}(t) & \end{bmatrix} \tag{38}$$

여기서 σ_i 는 가제어성 지수(controllability index)이고 $\sum_{i=1}^m \sigma_i = N$ 이다. 또한 다음을 만족하는 $\hat{C}(t)$ 의 역행렬

$\hat{C}^{-1}(t) \in R^{N \times N}$ 가 존재한다.

$$\hat{C}^{-1}(t) \hat{C}(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_{\sigma_1-1,1}(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{0,1}(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{0,m}(t) \end{bmatrix} \times [\xi_{11}(t) \ \cdots \ \xi_{\sigma_1 1}(t) \ \cdots \ \xi_{\sigma_m m}(t)] = I \tag{39}$$

한편, s_i 를 다음과 같이 정의하자.

$$s_i = \sum_{j=1}^i \sigma_j \quad i=1, 2, \dots, m \tag{40}$$

즉, $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = \sigma_1 + \sigma_2$, ..., $s_m = N$ 이다. 그리고 각 i 에 대하여 $\hat{C}^{-1}(t)$ 의 s_i 번째 행 벡터를 $\hat{C}_{0,i}(t)$ ($= \hat{C}_{\sigma_i-1,i}(t)$)라 둔다. 그러면 단일 입출력 시스템의 경우와 비슷하게 각 $i=1, 2, \dots, m$ 와 $p=1, 2, \dots, \sigma_i$ 에 대해서 다음의 (41)과 (42)를 정의할 수 있다.

$$z_i(t) = \hat{C}_{0,i}(t)x(t) \tag{41}$$

$$\hat{C}_{p,i}(t) = \frac{d}{dt} \hat{C}_{p-1,i}(t) + \hat{C}_{p-1,i}(t)A(t) \tag{42}$$

그러면 각 i 에 대해서 다음 (43)과 (44)가 성립한다.

$$\begin{aligned}
 z_i(t) &= \hat{C}_{0,i}(t)x(t) \\
 \dot{z}_i(t) &= \hat{C}_{1,i}(t)x(t) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{43}$$

$$z_i^{(\sigma_i-1)}(t) = \hat{C}_{\sigma_i-1,i}(t)x(t)$$

$$z_i^{(\sigma_i)}(t) = \hat{C}_{\sigma_i,i}(t)x(t) + \hat{C}_{\sigma_i-1,i}(t)B(t)u(t) \tag{44}$$

여기서 행 벡터 $\hat{C}_{p,i}(t)$ 는 $(1 \times N)$ 차원이고, s_i 번째 행 벡터 $\hat{C}_{\sigma_i,i}(t)$ 는 나머지 $N-1$ 개의 행 벡터의 선형 조합으로 나타낼 수 있다. 따라서 각 i 에 대해서 단일 입출력 시스템의 경우와 같은 방법으로 선형 조합 계수 $\{a_{k,i}(t)\}_{k=1}^{N-1}$ 를 구할 수 있고, 이를 이용하면 (44)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 z_i^{(\sigma_i)} &= [a_{1,i}(t) \hat{C}_{0,i}(t) + a_{2,i}(t) \hat{C}_{1,i}(t) + \\
 &\quad \cdots + a_{N,i}(t) \hat{C}_{\sigma_i-1,i}(t)]x(t) + \\
 &\quad \hat{C}_{\sigma_i-1,i}(t)B(t)u(t)
 \end{aligned} \tag{45}$$

여기서 $\hat{C}_{\sigma_i-1,i}(t)B(t)$ 는 각 i 에 대해서 $(1 \times m)$ 차원의 행 벡터이고, 처음 $i-1$ 개의 요소는 0, i 번째 요소는 1, 나머지 $m-i$ 개의 특정한 함수이다. (43)과 (45)를 행렬 행태로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1m}(t) \\ A_{21}(t) & \cdots & A_{2m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}(t) & \cdots & A_{mm}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_{0,1}(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_1-1,1}(t) \\ \hat{C}_{0,2}(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_m-1,m}(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_1-1,1}(t)B(t) \\ 0 \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_m-1,m}(t)B(t) \end{pmatrix} u(t) \quad (46)$$

여기서 $s_0 = 0$ 라 두면, (46)에서 각 행렬의 요소들은 다음과 같다.

$$A_{ii}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_{s_{i-1}+1,i}(t) & \alpha_{s_{i-1}+2,i}(t) & \cdots & \alpha_{s_{i,i}}(t) \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$A_{ik}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{s_{i-1}+1,i}(t) & \alpha_{s_{i-1}+2,i}(t) & \cdots & \alpha_{s_{i,i}}(t) \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_1-1,1}(t)B(t) \\ 0 \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_m-1,m}(t)B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

한편 $(m \times m)$ 차원의 행렬 $B^*(t)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$B^*(t) = \begin{pmatrix} \hat{C}_{\sigma_1-1,1}(t)B(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_m-1,m}(t)B(t) \end{pmatrix} \quad (50)$$

그러면 $B^*(t)$ 는 대각 요소에 1을 가지는 상 삼각 행렬 (upper triangular matrix)이므로 비정칙 행렬이고 그 역행렬을 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{B}(t) = B^{*-1}(t) = \begin{pmatrix} \hat{C}_{\sigma_1-1,1}(t)B(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_m-1,m}(t)B(t) \end{pmatrix}^{-1} \quad (51)$$

따라서 (46)과 (51)을 이용하여 준 선형 시변 시스템이 원하는 PD-스펙트럼을 가지기 위해서 다음과 같은 되먹임 이득을 선택한다.

$$u(t) = K(t)x(t)$$

$$= -\hat{B}(t) \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}(t) \cdots \alpha_{s_{m,1}}(t) \\ \vdots \\ \alpha_{1,m}(t) \cdots \alpha_{s_{m,m}}(t) \\ d_{1,1}(t) \cdots d_{s_{1,1}}(t) \ 0 \cdots 0 \\ \vdots \\ 0 \cdots 0 \ d_{s_{m-1,m}}(t) \cdots d_{s_{m,m}}(t) \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \hat{C}_{0,1}(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma_m-1,m}(t) \end{pmatrix} x(t) \end{pmatrix} \quad (52)$$

여기서 $d_{k,i}(t)$ 는 원하는 PD-스펙트럼을 보조정리 1에 적용하여 구하고, 원하는 PD-스펙트럼이 보조정리 2를 만족한다면 페루프 시스템은 안정하게 된다. 따라서 되먹임 이득 (52)를 준 시스템에 인가하면 다음과 같은 페루프 시스템이 되고, 원하는 PD-스펙트럼을 가지는 시변 시스템과 동치가 된다.

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(t) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{C}_1(t) \\ \hat{C}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_m(t) \end{pmatrix} x(t) \quad (53)$$

여기서 각 i 에 대해서 $A_i(t)$ 와 $\hat{C}_i(t)$ 는 다음과 같다.

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_{s_{i-1}+1,i}(t) & -d_{s_{i-1}+2,i}(t) & \cdots & -d_{s_{i,i}}(t) \end{pmatrix} \quad (54)$$

$$\hat{C}_i(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_{0,i}(t) \\ \hat{C}_{1,i}(t) \\ \vdots \\ \hat{C}_{\sigma-1,i}(t) \end{bmatrix} \quad (55)$$

주목 2 : 본 논문에서는 (52)의 되먹임 이득을 다 입출력 선형 시변 시스템의 Ackermann형 공식으로 제안한다. 단일 입출력 시스템의 경우와 같은 방법으로 다 입출력 시스템에 대한 Ackermann형 공식을 제안하였고, 이것은 다 입출력 시스템을 입력 행렬의 각 열 벡터의 가제어성 지수만큼 단일 입출력 시스템으로 분해할 수 있다는 것을 의미한다. 또한 단일 입출력 시스템에 대한 Ackermann형 공식의 장점이 유지된다. 즉, 본 논문에서 제안하는 Ackermann형 공식을 이용하여 고유치 지정을 수행하면 준 시스템을 위상 변수 표준형으로 변환할 필요가 없을 뿐만 아니라 준 시스템의 개루프 PD-고유치도 구할 필요가 없다. 또한 직접적으로 선형 시변 시스템의 고유치 지정을 수행할 수 있다.

다음의 수치 예제를 통하여 다 입출력 선형 시변 시스템을 위한 Ackermann형 공식의 적용 과정과 타당성을 살펴본다.

예제 2 : 다음과 같은 다 입출력 선형 시변 시스템을 상정한대[9].

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2 & 0 \\ 0 & 2 & e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{-t} \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} u(t) \quad (56)$$

준 시스템의 제어 목적을 준 시스템을 안정화시키고, 페루프 시스템의 PD-스펙트럼이 $\{\rho_i(t)\}_{i=1}^3 = \{-5 - e^{-t}, -6 - e^{-t}, -7 - e^{-t}\}$ 가 되도록 하는 것이다.

먼저 가제어성 행렬 $C(t) = [\mathcal{E}_1(t) \ \mathcal{E}_2(t) \ \mathcal{E}_3(t)]$ 를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\mathcal{E}_1(t) = B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{-t} \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2(t) &= A(t)\mathcal{E}_1(t) - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_1(t) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2e^{-t} \\ 2 & 0.5e^{-3t} + 3e^{-t} \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3(t) &= A(t)\mathcal{E}_2(t) - \frac{d}{dt}\mathcal{E}_2(t) \\ &= \begin{bmatrix} 4 + 2e^{-2t} & 3e^{-3t} + 8e^{-t} \\ 2 & 4e^{-3t} + 9e^{-t} \\ 2e^{-t} & 4.5 + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

여기서 가제어성 지수는 $\sigma_1=2, \sigma_2=1$ 이다. 따라서 가제어성 행렬을 다음과 같이 재구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{C}(t) &= [\xi_{1,1}(t) \ \xi_{2,1}(t) \ \xi_{1,2}(t)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & e^{-t} \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (60)$$

또한 (60)의 역행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{C}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_{1,1}(t) \\ \hat{C}_{0,1}(t) \\ \hat{C}_{0,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2e^{-t} \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

그러면 (42)를 이용하여 $\hat{C}_{p,i}(t)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{C}_{0,1}(t) &= \hat{C}_{0,1}(t) = [0.5 \ 0 \ 0], \\ \hat{C}_{1,1}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{C}_{0,1}(t) + \hat{C}_{0,1}(t)A(t) \\ &= [0.5e^{-2t} \ 1 \ 0], \\ \hat{C}_{2,1}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{C}_{1,1}(t) + \hat{C}_{1,1}(t)A(t) \\ &= [0.5e^{-4t} - e^{-2t} \ 2 + e^{-2t} \ e^{-3t}], \\ \hat{C}_{0,2}(t) &= \hat{C}_{0,2}(t) = [0 \ 0 \ 2], \\ \hat{C}_{1,2}(t) &= \frac{d}{dt}\hat{C}_{0,2}(t) + \hat{C}_{0,2}(t)A(t) \\ &= [2e^{-t} \ 0 \ 6] \end{aligned} \quad (62)$$

(51)을 이용하면 $\hat{B}(t)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{B}(t) = \begin{bmatrix} \hat{C}_{1,1}(t)B(t) \\ \hat{C}_{0,2}(t)B(t) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

그리고 (62)를 이용하면 $\hat{C}_{2,1}(t)$ 와 $\hat{C}_{1,2}(t)$ 의 선형 조합 계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{C}_{2,1}(t) \\ \hat{C}_{1,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4e^{-2t} & 2 + e^{-2t} & 0.5e^{-3t} \\ 4e^{-t} & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{C}_{0,1}(t) \\ \hat{C}_{1,1}(t) \\ \hat{C}_{0,2}(t) \end{bmatrix} \quad (64)$$

한편, 보조정리 1을 이용하여 바람직한 PD-스펙트럼으로 구성된 계수 $d_{p,i}(t) (p=1, \dots, \sigma_i, i=1, 2)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} d_{1,1}(t) &= 30 + e^{-2t} + 10e^{-t}, \\ d_{2,1}(t) &= 11 + 2e^{-t}, \\ d_{1,2}(t) &= 7 + e^{-t} \end{aligned} \quad (65)$$

따라서 (62)~(65)를 이용하여 준 시스템의 제어 목적을 만족하는 되먹임 이득 $K(t)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 u(t) = & -\hat{B}(t) \left[\begin{array}{ccc} a_{1,1}(t) & a_{2,1}(t) & a_{3,1}(t) \\ a_{1,2}(t) & a_{2,2}(t) & a_{3,2}(t) \\ d_{1,1}(t) & d_{2,1}(t) & 0 \\ 0 & 0 & d_{1,2}(t) \end{array} \right] \times \\
 & + \left[\begin{array}{c} \hat{C}_{0,1}(t) \\ \hat{C}_{1,1}(t) \\ \hat{C}_{0,2}(t) \end{array} \right] x(t) \\
 = & - \left[\begin{array}{ccc} k_{11}(t) & k_{12}(t) & k_{13}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & k_{23}(t) \end{array} \right] x(t)
 \end{aligned} \tag{66}$$

여기서 되먹임 이득 행렬의 각 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 k_{11}(t) &= 15 + 0.5e^{-4t} + e^{-3t} + 5e^{-2t} + 5e^{-t} \\
 k_{12}(t) &= 13 + e^{-2t} + 2e^{-t} \\
 k_{13}(t) &= e^{-3t} \\
 k_{21}(t) &= 2e^{-t} \\
 k_{22}(t) &= 0 \\
 k_{23}(t) &= 20 + 2e^{-t}
 \end{aligned} \tag{67}$$

그림 3, 그림 4에는 초기 조건 $x_1(0)=1, x_2(0)=2, x_3(0)=3$ 에 의한 개루프 및 폐루프 시스템의 영-입력 응답이 각각 나타나 있다. 그림 3은 준 시스템의 개루프 응답이 불안정함을 보여주고, 그림 4는 본 논문에서 제안한 Ackermann형 공식을 이용하여 PD-고유치를 적절히 지정함으로써 준 시스템을 안정화시킬 수 있음을 보여준다. ■

V. 결론

본 논문에서는 선형 시변 시스템의 되먹임 안정화를 위하여 고유치 지정 기법을 제안하였다. 이를 위하여 먼저, 선형 시변 시스템의 새로운 고유치 개념인 PD-고유치를 도입하였다. 이것은 선형 시불변 시스템의 고유치 이론을 포함하는 일반화된 개념이고, 이를 이용하여 시스템의 안정도

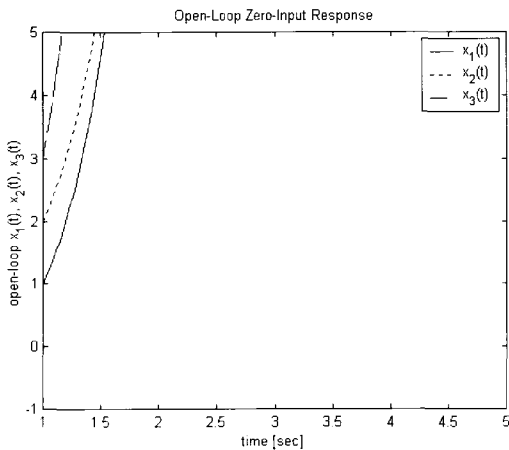


그림 3. 개루프 시스템의 영-입력 응답.
Fig. 3. Zero-input response for open-loop system.

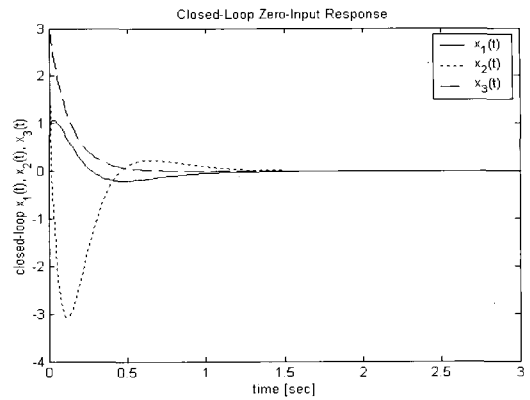


그림 4. 폐루프 시스템의 영-입력 응답.
Fig. 4. Zero-input response for closed-loop system.

판별 등의 제어 공학 문제에 직접적으로 적용이 가능하다. 다음으로 단일 입출력 및 다 입출력 선형 시변 시스템의 고유치 지정을 위한 Ackermann형 공식을 각각 제안하였다. 본 논문에서 제안하는 Ackermann형 공식은 선형 시불변 시스템에 대한 Ackermann 공식이 가지는 장점을 유지한다. 즉, 준 시스템을 위상 변수 표준형으로 변환할 필요가 없을 뿐만 아니라 개루프 시스템의 PD-고유치를 구할 필요도 없다. 본 논문의 Ackermann형 공식은 선형 시변 시스템의 고유치 지정을 위한 매우 효과적인 알고리즘이라고 판단되며, 선형 시변 시스템의 조직적인 제어기 설계 방법의 하나로 공헌할 수 있을 것으로 기대한다.

참고문헌

- [1] C. C. Nguyen, "Canonical Transformation for a Class of Time-Varying Multivariable Systems," *International Journal of Control*, vol. 43, no. 4, pp. 1061-1074, 1986.
- [2] K. Ramar, and B. Ramaswami, "Transformation of Time-Variable Multi-Input to a Canonical Form", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, no. 4, pp. 371-374, 1971.
- [3] C. E. Seal, and A. R. Stubberud, "Canonical Forms for Multi-Input Time-Variable Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 14, no. 6, pp. 704-707, 1969.
- [4] L. M. Silverman, "Transformation of Time-Variable Systems to Canonical (Phase-Variable) Form", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 2, pp. 300-303, 1966.
- [5] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [6] J. J. Zhu, and C. D. Johnson, "Unified Canonical Forms for Matrices over a Differential Ring", *Linear Algebra and Its Application*, vol. 147, pp. 201-248, 1991.
- [7] J. J. Zhu, "A Unified Spectral Theory for Linear Time-Varying Systems-Progress and Challenges", *Proceedings of the 34th Conference on Decision and*

- Control*, pp. 2540-2546, 1995.
- [8] W. A. Wolovich, "On the Stabilization of Controllable Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 13, no. 5, pp. 569-572, 1968.
- [9] C. C. Nguyen, "Arbitrary Eigenvalue Assignment for Linear Time-Varying Multivariable Systems", *International Journal of Control*, vol. 45, no. 3, pp. 1051-1057, 1986.
- [10] M. Valasek, and N. Olgac, "Efficient Pole Placement Technique for Linear Time-Variant SISO Systems", *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 142, no. 5, pp. 451-458, 1995.
- [11] M. Valasek, and N. Olgac, "Efficient Eigenvalue Assignment for General Linear MIMO Systems," *Automatica*, vol. 31, no. 11, pp. 1605-1617, 1995.
- [12] M. Valasek, and N. Olgac, "Pole Placement for Linear Time-Varying Nonlexicographically Fixed MIMO Systems", *Automatica*, vol. 35, no. 1, pp. 101-108, 1999.
- [13] J. W. Choi, H. C. Lee, and J. J. Zhu, "Decoupling and Tracking Control Using Eigenstructure Assignment for Linear Time-Varying Systems", *International Journal of Control*, vol. 74, no. 5, pp. 453-464, 2001.
- [14] J. J. Zhu, "A Necessary and Sufficient Stability Criterion for Linear Time-Varying Systems", *Proceedings of the 26th IEEE Southeastern Symposium on System Theory*, pp. 115-119, 1996.
- [15] J. J. Zhu, 이호철, 최재원, "선형 시변 시스템에 대한 잘 정의된 직렬 및 병렬 D-스펙트럼", *제어·자동화·시스템 공학 논문지*, 제 5 권, 제 5 호, pp. 521-528, 1999.



이 호 철

1974년 5월 8일 출생. 1998년 부산대 제어기계공학과 졸업. 부산대 지능기계공학과 석사(2000). 2000년~현재 동대학원 박사과정. 제5회 삼성 휴먼테크논문대상 은상수상(1999). 서암학술장학재단 장학생선발(2000). The 4th

Asian Control Conference Best Poster Paper Award 수상 (2002). 관심분야는 선형 시변 시스템 이론, 이득계획기법, 항법 및 유도제어 시스템.

최 재 원

제어·자동화·시스템공학 논문지 제 8 권 제 5 호 참조.