韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 2. 제 42권, 제 1호, 57-67.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Feb. 2003, Vol. 42, No. 1, 57-67.

한 가지 수학 문제의 교육적 분석 및 관련된 문제의 체계화에 대한 연구

한 인 기 (경상대학교)

1. 서 론

수학 교수-학습 과정에서 수학 문제는 교사와 학생의 수학적 활동의 대상인 동시에, 교사와 학생 사이의 수학적 활동을 연결해 주는 중요한 매개체이기도 하다. 만약, 수학 시간에 교사가 학생에게 하는 질문까지를 수학 문제의 범위에 포함시킨다면, 수학 수업이 문제에서 시작하여 문제로 끝난다고 해도 과언이 아닐 것이다. 그리고, 수학 문제의 해결(증명)이 수학적 개념이나 탐구 방법 획득의 중요한 방법들 중의 하나이기 때문에, 수학 교수-학습에서 수학 문제는 매우 중요하다고 할 수 있다.

그런데, 수학 문제 풀이가 중심이 된 수학 시간을 틀에 박힌 입시 위주의 암기식 교육으로 폄하해 부정적인 가치를 부여하는 경우를 간혹 볼 수 있다. 그러나, 수학 교실에서 발생하는 수학 문제와 관련된 문제점들은 '수학 문제를 푸는 활동' 자체에 의한 것이 아니라, '수학 문제에 대한 교육적 가치를 충분히 고려하지 않는 것'으로부터 생겨난다고 할 수 있다. 즉, 수학 문제 풀이 자체가 틀에 박힌 교육 환경을 조성하는 것이 아니라, 수학 문제에서 정답 이외의 풀이에 대해서는 진지한 의미를 두지 않는 교수 환경이 문제일 것이다.

교사와 학생에 의해 교육적 가치와 의의가 진지하게 부여되지 않은 수학 문제는 교사와 학생 모두에게 위험한 교육 환경을 조성할 수 있다. 그러한 환경에서 학생은 주어진 문제에 대한 정답만을 요구할 것이고, 교사는 정답만을 전달하는 역할로 전락할 수도 있다. 이로 인해, 학생은 수학에 대한 흥미와 관심을 잃고, 교사들은 지식의 단순한 전달자나 정답의 전달자로 전락될 우려가 있다.

수학 문제에 대한 교육적 고찰이란 수학 문제가 가지고 있는 순수 수학적, 수학사적 측면에 대한 분석을 의미하는 것이 아니라, 수학 교수-학습에 관련된 다양한 측면들, 즉 교사-학생의 교수-학습 활동의 측면, 학생의 자기 주도적 문제해결 활동의 측면, 학생의 사고 활동 활성화 측면, 학생의 수학적 지식 획득의 측면, 학생의 수학적 탐구 방법 획득의 측면 등을 중심으로 수학 문제 및 해결 방법을 분석하는 것을 의미한다.

수학 문제에 대한 타당한 교육적 분석, 그리고 얻어진 분석 결과를 바탕으로 수학 문제를 교육적으로 적절하게 활용하는 것은 학생들에게는 자기 주도적 수학 탐구 활동을 통한 수학교육의 목표 달성을 기대할 수 있으며, 교사에게는 새로운 수학 교수법 개발의 바탕을 마련하도록 할 수 있을 것으로 기대된다.

수학 문제에 관련된 연구들은 크게 세 가지로 나눌 수 있다. 첫째, 문제해결 방법 및 그 지도에 관련된 연구들(남승인 · 류성림, 2002; 한인기, 2002, 2001a; 한인기 · 강인주, 2000; Polya, 1954, 1957; Lenchner, 1983; Dolan & Williamson, 1983; Schoenfeld, 1980; Gardiner, 1998 등)로 이들 연구에서는 수학 문제를 효율적으로 해결하기 위한 구체적인 문제해결 전략들이 상세히 기술되어 있다. 두 번째는, 수학 문제의 분류에 관한 연구로 한인기(2001b), 신현성 · 김경희(1999), 김진락(1990), Polya (1962) 등의 연구를 들 수 있는데, 이 연구들은 수학 문제의 구성 요소나 특성의 추출, 그리고 수학 문제의 분류 등에 관련된다. 세 번째는, 수학 문제의 제작에 관한 연구로 방승진(1995), 임문규(1996), Sharigin(2000), Gengzhe(1990), Butts(1980) 등을 포함한 연구들을 볼 수 있는데, 이 연구들에서는 수학 문제들을 구성하는 구체적인 방법들이나 이들을 바탕으로 한 몇몇 일반화된 문제 구성 방법들이 진술되어 있다.

기술한 연구들은 수학교육에서 문제나 문제해결 방법

* 2002년 8월 투고, 2003년 2월 심사 완료.
* ZDM분류 : D53
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 수학문제, 교육적 고찰, 문제의 사슬, 증명, 문제의 교육적 분석

연구의 발전에 관련하여 그 가치를 부여할 수 있다. 이들 중 주목할 만한 연구로, 한인기(2002, 2001a), 한인기·강인주(2000)의 연구를 들 수 있는데, 이 연구에서는 하나의 정리에 대한 다양한 증명 방법을 제시하고, 각각의 증명에 관련된 문제해결의 아이디어가 분석되어 있다. 이러한 연구의 결과는 구체적인 교수-학습 상황에서 교사가 개개의 수학 문제 및 해결 방법에 대한 유의미한 교육적 선택을 위한 바탕 자료가 될 수 있다는 점에서 주목할 만하다. 하나의 수학 문제에 대한 진지한 분석을 통해 교육적으로 유의미한 시사점을 도출한다는 측면에서 보면, 본 연구도 그 맥락을 같이 하지만, 특히 본 연구에서는 하나의 수학 문제에 대한 다양한 분석과 관련된 문제들의 체계화를 통해, 수학 문제가 가지는 교육적 가치와 의의를 밝힐 것이다.

본 연구에서는 한 가지 수학 문제를 수학적 지식과 수학적 방법의 측면에서 분석하여 교육적으로 의미있는 몇몇 요소들을 추출하고, 얻어진 요소들에 관련된 다양한 수학 문제들을 체계화하여 사슬(chain)의 형태로 제시할 것이다. 이를 통해, 수학 문제의 교육적 의의를 고찰하고, 이를 교수-학습 과정에 활용할 수 있도록 하는 한 가지 전형을 제시할 것이다.

2. 수학 문제와 해결 방법의 교육적 고찰

수학 문제는 교수-학습 과정에서 교사와 학생의 수학적 활동의 대상인 동시에, 교사와 학생 사이의 수학적 활동을 연결하는 매개체가 되기 때문에 중요한 교육적 가치를 지닌다. 그러므로, 각각의 수학 문제의 특성에 대한 다양한 측면에서의 분석과 교수-학습 과정에서의 적절한 활용에 관련된 연구가 필요하다.

본 연구에서는 문제 1에 대해 수학적 지식이라는 측면과 수학적 탐구 방법이라는 측면에서 교육적 가치를 분석할 것이다.

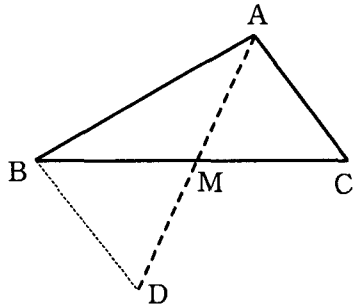
문제 1. 삼각형 ABC의 중선 $\overline{AM}$에 대해, $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{AC}$임을 증명하여라.

대부분의 학생들은 문제에 대한 증명 방법을 스스로 발견하든 아니면 교사의 설명에 의해 알게 되든 관계없이, 일단 증명 방법이나 답을 알면 문제에 대한 탐구 활동을 중단하고 다음 문제로 옮겨간다. 이때, 수학 문제의 정답은 수학적 활동의 목적이 되며, 학생들은 정답만을 요구하게 된다. 그러나, 문제 1의 정답(증명)이 학생들에게 어떤 의미를 가지는가?

수업 시간에 수학 문제를 푸는 것은 주어진 문제에 대한 답이 꼭 필요해서가 아니라[2], 문제를 푸는 과정에서 그리고 문제를 풀고 나서 수학 문제로부터 무언가를 배울 수 있기 때문이다. 그러므로, '주어진 문제에서 무엇을 배울 수 있는가?' '문제를 통해 무엇을 가르칠 수 있는가?'는 수학 문제에 대한 교육적 고찰의 중요한 부분을 차지하게 된다.

문제 1로부터 얻을 수 있는 수학적 지식은 '삼각형에서 중선 길이의 두 배는 중선의 한 끝점을 공유하는 삼각형 두 변 길이의 합보다 작다.'이다. 이 수학적 지식은 학생들의 수학적 탐구 활동에서 의미있는 바탕이 될 수 있으며, 학생들이 문제 1에 대한 증명을 피상적으로 아는 것보다 더 중요한 교육적 의미를 가질 수도 있다. 문제 1에서 얻은 수학적 지식을 바탕으로 하는 몇몇 탐구 문제의 사슬을 3장에서 살펴볼 것이다.

문제 1을 수학적 탐구 방법 방법의 측면에서 분석하자. 우선, 문제 1에 대한 전형적인 풀이는 다음과 같다.



<그림 1>

△ABC의 중선 $\overline{AM}$의 연장선에 $\overline{MD} = \overline{AM}$을 작

2) 어떤 수학 문제에 대해 답 자체가 의미있는 경우는 수학 시험을 보는 경우, 상점에서 물건을 사고 그 값을 계산하는 경우, 산업 현장이나 다른 학문 분야에서 발생하는 문제들을 해결해야 하는 경우 등으로 대부분 실세계에서 발생하는 문제해결의 도구로 수학이 활용되는 경우이다.

도하면(<그림 1> 참조), △AMC와 합동인 △DMB를 얻게 되고(∵ $\overline{BM} = \overline{MC}$, ∠AMC = ∠DMB, $\overline{AM} = \overline{MD}$), 결국 $\overline{BD} = \overline{AC}$가 된다. △ABD에서 삼각 부등식에 의해, $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{BD}$, $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{AC}$. □

이제, 문제 1의 풀이에 관련하여 교육적으로 의미있는 몇몇 요소들을 추출해 보자. 이를 위해, 문제 1에서 주어진 것, 구하는 것(증명할 것)[3]을 추출하고, 그 해결 방법도 체계적으로 기술하도록 하자. 보통, 문제 1에 대해 주어진 것과 증명할 것을 다음과 같이 추출한다:

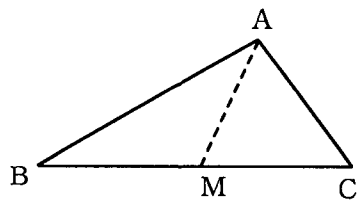
주어진 것: 중선 $\overline{AM}$
증명할 것: $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{AC}$

그런데, 문제 1에서 주어진 것을 모두 추출하였는가? 문제해결의 탐색 수행에 필요한 몇몇 요소들이 '주어진 것'에서 고려되지 못했다. 문제 1의 기술에서는 주어진 것으로 추출된 $\overline{AM}$이외에도 ① △ABC; ② $2\overline{AM}$; ③ $\overline{AB}+\overline{AC}$ 등이 기술되어 있으며, 이것들은 문제해결을 위해 필요하기 때문에, '주어진 것'으로서 반드시 추출되어야 한다.

이때, 주어진 것으로 △ABC를 추출하면서 학생들이 머릿속으로 문제에 관련된 도형들을 반복하는 것은 문제의 정확한 이해와 문제해결 탐색 수행에 관련하여 중요한 교육적 의미를 가질 수 있다. 기술한 풀이에서 보면, 문제해결을 위한 보조 요소로 다양한 삼각형들(△BMD, △CMA, △ABD)을 이용하였다. 이 삼각형들은 △ABC의 분할로 얻어지거나 △ABC의 변을 한 변으로서 포함하는 삼각형들이기 때문에, 논리적으로 생각하면 △ABC의 존재를 의식적으로 인식한 후에, 보조 요소인 삼각형들의 존재를 문제해결 탐구 과정에서 쉽게 고려할 수 있을 것이다.

이제, 문제 1에서 주어진 것과 증명할 것은 다음과 같이 기술할 수 있다.

1. △ABC ⎫
2. $\overline{AM}$ ⎪(주어진 것, <그림 2> 참조)
3. $2\overline{AM}$ ⎪
4. $\overline{AB}+\overline{AC}$ ⎭
5. $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{AC}$ (증명할 것)



<그림 2>

문제 1을 해결하기 위해서 필요한 보조선 $\overline{MD}$의 작도에 대해 생각해 보자. 이 문제에서 보조선 $\overline{MD}$를 작도하면, 나머지 증명 과정 전체를 쉽게 찾을 수 있지만, 보조선 $\overline{MD}$의 작도에 대한 생각을 학생들이 스스로 발견하는 것은 쉽지 않은 일이다.

학생들에게 '중선의 연장선에 중선과 같은 $\overline{MD}$를 작도'하는 수학적 아이디어를 여러 가지 방법으로 준비시킬 수 있지만, 본 연구에서는 '주어진 것'의 분석과 관련하여 살펴보자.

문제 1에 상응하는 작도인 <그림 2>를 보면, '주어진 것'에서 추출한 △ABC, $\overline{AM}$은 존재하지만, $2\overline{AM}$은 존재하지 않는다. 그런데, 증명해야 할 식 (5)는 $2\overline{AM}$을 포함하는 부등식이기 때문에, 문제해결을 위해선 $2\overline{AM}$을 <그림 2>에 표현하는 것이 바람직할 것이라는 생각을 가질 수 있다. 이러한 생각은 '$\overline{AM}$의 연장선에 보조선 $\overline{MD}$ ($=\overline{AM}$)의 작도'라는 문제해결 탐색 수행과 연결되며, $2\overline{AM}$이 포함된 <그림 1>을 문제해결 탐색 과

3) 수학 교과서에는 어떤 문제가 주어지면 '가정'과 '결론'으로 나누어 학생들에게 분석하도록 요구하지만, 이러한 분석 자체는 형식적인 경우가 많으며, 분석 자체가 문제해결을 위한 탐색 활동과 유의미하게 관련되는 경우는 매우 드물다. 그리고, 수학 교과서에서 수학 문제가 가정과 결론을 구별하기 쉽게 '…이면, …임을 증명(구)하라'는 식으로 기술되지 않는 경우도 많기 때문에, 학생들에게 '가정'과 '결론'을 추출하도록 요구하는 것보다는 '주어진 것'과 '구하는 것(증명할 것)'을 추출하도록 하는 것이 바람직할 것이다.

정에서 얻을 수 있다. 결국, 이 문제에서는 '주어진 것'에 대한 체계적인 분석이 문제해결 탐색의 성공적인 수행에 중요한 역할을 하였다. 문제 1의 나머지 풀이를 다음과 같이 기술할 수 있다(이 때, 괄호 안의 번호는 전 단계에서 서술된 증명의 단계를 뜻한다.).

6. $\overline{AM}$의 연장선에 $\overline{MD}$ $(=\overline{AM})$인 선분을 작도하자(3).
7. △BMD와 △CMA를 보자(1, 6).
8. $\overline{BM} = \overline{MC}$ (2)
9. ∠AMC = ∠DMB (1, 6, 맞꼭지각의 성질)
10. △BMD ≡ △CMA (6, 7, 8, 9, SAS 합동 조건)
11. △ABD를 보자(1, 6).
12. $\overline{AD} < \overline{AB}+\overline{BD}$ (11, 삼각 부등식)
13. $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{BD}$ (6, 12)
14. $\overline{BD} = \overline{AC}$ (10)
15. $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{AC}$ (13, 14)

기술한 풀이 과정에서 얻을 수 있는 교육적으로 의미있는 몇몇 시사점은 다음과 같다. 첫째, 문제해결의 탐색 과정에서 '주어진 것'과 '구하는 것'을 상세하게 분석하여, 주어진 것들을 상응하는 작도에 나타내고 있다. 이미 기술한 것과 같이, 문제 1의 해결 과정에서 보조선 $\overline{MD}$는 '주어진 것'을 작도에 나타내는 과정에서 얻어질 수 있었다.

둘째, 중선의 연장선에 중선과 같은 선분을 보조선으로 작도하고 있다. 이 보조선은 중선에 관련된 다른 문제의 해결 과정에서도 자주 사용되는 중요한 보조선으로, 학생들이 알아야 하는 보조선들 중의 하나이다. 이러한 보조선을 긋는 능력은 관련된 다양한 문제해결의 경험을 통해 좀더 세련되어질 수 있다.

셋째, 증명을 위한 보조 요소로서 삼각형을 이용하고 있다. 기술한 문제해결 과정 (7), (11)을 살펴보면, 보조 요소로 △BMD, △CMA, △ABD을 도입하였다. 이러한 삼각형들은 문제의 기술에서는 명시되지는 않았지만, 문제해결에서 중요한 역할을 담당한다.

넷째, 삼각형에 관련된 부등식의 증명에서 삼각 부등식을 이용하고 있다. 삼각 부등식은 기하학 분야에서 자주 활용하는 중요한 부등식 중의 하나로서, 다양한 문제 상황에서 문제해결의 도구로서 유용하게 이용할 수 있다.

3. 문제해결의 바탕으로 문제 1에서 얻은 수학적 지식을 이용하는 문제들

문제 1에서 얻을 수 있는 수학적 지식은 '삼각형에서 중선 길이의 두 배는 중선의 한 끝점을 공유하는 두 변의 합보다 작다.'는 것인데, 이를 문제해결의 바탕으로 이용하는 몇몇 수학 문제들을 살펴보자. 본 연구에서 제시되는 문제들은 서로 관련성을 띄는 문제의 사슬로 생각할 수 있으며, 이러한 문제의 사슬은 문제해결에서 얻은 수학적 지식을 다른 문제의 해결 과정에서 반복, 심화시키는데 중요하다. 또, 학생들의 수학적 탐구 활동을 활성화시키는데도 중요한 역할을 할 것으로 기대된다.

문제 2[4]. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$라 하고, $\overline{BC}$에 그은 중선의 길이를 m_a, $\overline{AC}$에 그은 중선의 길이를 m_b, $\overline{AB}$에 그은 중선의 길이를 m_c라 하자. 이때, $m_a+m_b+m_c < a+b+c$임을 증명하여라.

증명. 문제 1에서 얻은 수학적 지식으로부터, $2m_a < b+c$, $2m_b < a+c$, $2m_c < a+b$. 세 부등식을 변끼리 더하면, $2(m_a+m_b+m_c) < 2(a+b+c)$이다. 이로부터, $m_a+m_b+m_c < a+b+c$. □

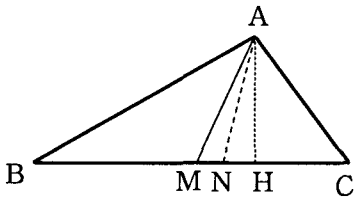
문제 2에서 얻어진 수학적 지식과 다음 보조 문제 1을 이용하면, 흥미로운 부등식 문제 3을 얻을 수 있다.

보조 문제 1. 삼각형 ABC의 꼭지점 A에서 그은 높이, 각의 이등분선, 중선의 길이를 각각 h_a, b_a, m_a라 할 때, $h_a \le b_a \le m_a$임을 증명하여라.

증명. <그림 3>에서 $\overline{AM}$, $\overline{AN}$, $\overline{AH}$를 각각 꼭지점 A에서 그은 중선, 각의 이등분선, 높이라 하자. 삼각형 ABC가 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이면, 세 점 M, N, H가 일치하므로, $h_a \le b_a \le m_a$이 증명된다.

---

4) 이제부터 제시되는 문제들에 대해서는 간략한 풀이나 문제해결의 아이디어만을 기술하기로 한다. 물론, 문제 1에서와 같은 체계적인 분석과 문제해결의 기술은 학생들에게 문제해결 탐색 능력의 신장에 매우 바람직할 것이다.



<그림 3>

이제, $\overline{AB} \neq \overline{AC}$인 삼각형의 경우, 일반성을 잃지 않고 $\overline{AB} > \overline{AC}$라고 가정할 수 있다. h_a, b_a, m_a에서 h_a는 최소값을 가지므로, $b_a \leq m_a$을 증명하면 된다. 만약, $\overline{BM} < \overline{BN}$을 보이면, $b_a < m_a$이 증명된다. $\overline{AN}$이 각의 이등분선이므로, $\overline{AB} : \overline{BN} = \overline{AC} : \overline{CN}$. 가정에 의해 $\overline{AB} > \overline{AC}$이므로,

$\overline{BN} > \overline{CN}$ ---- ①.

한편, $\overline{AM}$이 중선이므로,

$\overline{BM} = \overline{CM}$ ---- ②.

①과 ②에 의해, $\overline{BM} < \overline{BN}$. □

문제 3. 삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$라 하고, 꼭지점 A에서 $\overline{BC}$에 그은 높이, 각의 이등분선의 길이를 각각 h_a, b_a, 꼭지점 B에서 $\overline{AC}$에 그은 높이, 각의 이등분선의 길이를 각각 h_b, b_b, 또, 꼭지점 C에서 $\overline{AB}$에 그은 높이, 각의 이등분선의 길이를 h_c, b_c라 하자. 이때, 다음을 증명하여라.

(1) $h_a + h_b + h_c < a + b + c$

(2) $b_a + b_b + b_c < a + b + c$

증명. 문제 2의 결과와 보조 문제 1의 결과를 이용하여 쉽게 증명할 수 있다. □

문제 1에서 얻은 수학적 지식이 문제해결의 바탕이 되는 문제들의 사슬로 문제 2와 문제 3(1), 문제 3(2)를 살펴보았다. 이러한 사슬의 의의 중 하나는 문제 1, 문제 2, 문제 3을 관련시켜 학생들이 문제 1에서 혹은 문제 2를 통해 얻은 수학적 지식을 의식적으로 반복할 수 있는 기회를 제공하고, 각각의 수학 문제를 해결하고 난 후에 반성의 과정을 의식적으로든 무의식적으로든 가질 수 있는 기회를 가질 수 있다는 것이다.

4. 문제 1에서 얻은 수학적 탐구 방법이 문제해결의 바탕이 되는 문제들

문제 1에 대한 교육적 분석을 통해 추출한 수학적 탐구 방법 중에서,

① 문제해결의 탐색 과정에서 '주어진 것'과 '구하는 것'을 상세하게 분석하여, 주어진 것들을 상응하는 작도에 나타내기;

② 중선의 연장선에 중선과 같은 선분을 보조선으로 작도하기;

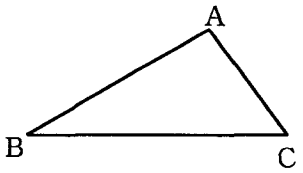
③ 삼각형에 관련된 부등식의 증명에 삼각 부등식을 이용하기

등을 활용하여 해결할 수 있는 몇몇 문제들의 사슬을 살펴보도록 하자.

(1) 주어진 것들을 작도에 나타내기

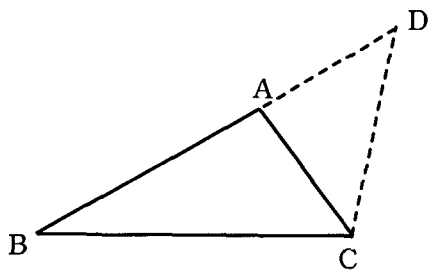
문제 4. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BC}$임을 증명하여라.

증명[5]. 주어진 것으로, △ABC, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB} + \overline{AC}$를 추출할 수 있다. 그런데, <그림 4>에서는 선분의 합인 $\overline{AB} + \overline{AC}$이 없으므로, 이것을 작도하자. 이를 위해, $\overline{BA}$의 연장선에 $\overline{AC}$와 같은 선분 $\overline{AD}$를 작도하자(<그림 5> 참조)



<그림 4>

5) 문제 1의 교육적 분석에서 '삼각형에 관련된 부등식 증명에서 삼각 부등식을 활용하기'를 추출했는데, 문제 4는 삼각 부등식 자체를 증명하는 것이므로, 다른 접근이 필요하다. 여기서는 '삼각형의 두 각 중에서 큰 각의 대변이 작은 각의 대변보다 길다.'는 사실을 이용하자. 물론, 역인 '삼각형의 두 변 중에서 긴 변의 대각이 짧은 변의 대각보다 크다.'는 것도 성립하지만, 본 연구에서는 이들에 대한 증명은 생략하기로 한다.



<그림 5>

이제, $\overline{AB}+\overline{AC}$와 길이가 같은 $\overline{BD}$와 $\overline{BC}$를 포함하는 삼각형 DBC에서 ∠BCD가 ∠BDC보다 크다는 것을 보이면 된다. 삼각형 ACD는 이등변삼각형이므로, ∠ACD = ∠ADC이므로, ∠BCD > ∠BDC. 그러므로, $\overline{AB}+\overline{AC} > \overline{BC}$. □

문제 4에서는 문제 기술에서 주어진 $\overline{AB}+\overline{AC}$와 같은 선분을 보조선을 이용하여 작도에 표현함으로써 문제를 해결할 수 있었다. 특히, 문제 4의 해결에서는 보조 요소로 △DBC, △ACD를 고려해야 했는데, 이것은 문제 1에 대한 분석에서 얻어진 '증명에 보조 요소로서 삼각형을 이용하기'를 문제해결에 이용한 예가 되기도 한다. 이제, 다음 문제 5를 보자.

문제 5. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 $\overline{AB}+\overline{AC} = \overline{A_1B_1}+\overline{A_1C_1}$, $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$, $\angle C = \angle C_1$일 때, $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$임을 증명하여라.

문제 5의 자세한 증명은 생략하고, 문제해결을 위한 아이디어를 간단히 살펴보자. 문제 5에서 $\overline{AB}+\overline{AC}$, $\overline{A_1B_1}+\overline{A_1C_1}$가 주어졌으므로, $\overline{AC}$의 연장선에 $\overline{AB}$와 길이가 같은 선분 $\overline{AD}$을 작도하고, $\overline{A_1C_1}$의 연장선에 $\overline{A_1B_1}$과 길이가 같은 선분 $\overline{A_1D_1}$을 보조선으로 작도해야 한다. 그러면, 합동인 삼각형 DBC와 $D_1B_1C_1$을 얻을 수 있으며, 이 합동을 이용하여 $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$을 증명할 수 있다.

이제, 문제 5와 유사한 방법으로 보조선을 긋지만, 약간 다른 문제 상황을 포함하는 문제 6을 살펴보자.

문제 6[6]. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC} = \overline{A_1B_1}+\overline{A_1C_1}+\overline{B_1C_1}$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$일 때, $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$임을 증명하여라.

문제 1에서 얻어진 '문제해결 탐색 과정에서 주어진 것과 구하는 것을 상세하게 분석하여, 주어진 것들을 상응하는 작도에 나타내기'가 문제해결의 바탕이 되는 아이디어인 몇몇 문제들의 사슬로 문제 4, 문제 5, 문제 6을 살펴보았다. 이들 문제는 유사한 아이디어로 해결될 수 있는 문제이지만, 약간씩 다른 문제 상황을 포함하고 있기 때문에, 학생들에게 한 가지 생각을 다양한 문제상황에 적용할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

(2) 중선의 연장선에 중선과 같은 선분을 보조선으로 작도하기

중선의 연장선에 중선의 길이만큼을 보조선으로 긋는 방법으로 해결할 수 있는 문제들 중에서 몇몇 문제들의 사슬을 살펴보자.

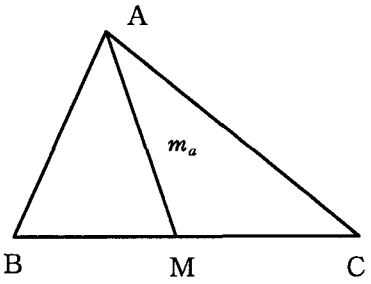
문제 7. 삼각형 ABC에서 꼭지점 A에서 그은 중선의 길이 m_a, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$가 주어졌을 때, 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석[7]. m_a, b, c를 포함하는 삼각형 ABC를 작도하여 보자(<그림 6> 참조). m_a, b, c를 알고 있을 때, 세 점 A, B, C의 위치를 결정해야 삼각형 ABC를 작도할 수 있다.

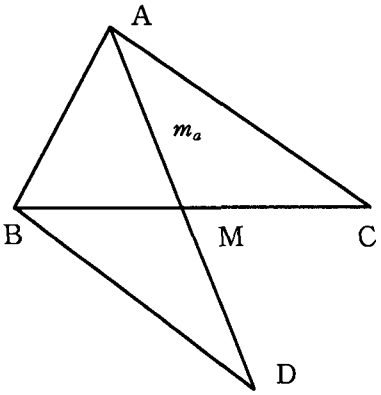
---

6) 문제 6에 대한 증명은 생략한다.

7) 작도 문제는 일반적으로 분석에서 문제해결을 시작한다. 작도 문제해결에서 분석이란, 원하는 도형이 작도되었다고 가정하여 개략적인 스케치를 하고, 문제에서 주어진 조건들로부터 원하는 도형을 작도하기 위한 정보를 찾는 활동을 포함한다. 작도 문제의 구체적인 해결 방법에 대해서는 한인기(1999)를 참고할 것.



<그림 6>



<그림 7>

이를 위해, 문제 1에서 추출한 아이디어인 '중선의 연장선에 중선과 길이가 같은 선분 작도'를 이용하자. 그리고, 점 D을 B, C와 연결하면, 합동인 삼각형 BMD과 CMA를 얻을 수 있게 된다(<그림 7> 참조).

이때, $b = \overline{AC} = \overline{BD}$이고, $\overline{AD} = 2\overline{AM}$이므로, 삼각형 ABD는 작도가 가능하다. 이제, 선분 AD의 중점 M를 잡고, 선분 BM의 연장선에 $\overline{BM} = \overline{CM}$인 점 C를 잡으면, 삼각형 ABC를 얻을 수 있다.

작도 방법.

1. $b = \overline{AC} = \overline{BD}$이고, $\overline{AD} = 2\overline{AM}$, $c = \overline{AB}$인 삼각형 ABD를 작도하자.
2. 선분 AD의 중점 M을 잡자.
3. 선분 BM의 연장선에 $\overline{BM} = \overline{CM}$인 점 C를 잡으면, 삼각형 ABC를 얻는다. □

문제 7과 같은 방법으로 해결되는 증명 문제로 문제 8, 9를 볼 수 있다[8].

문제 8. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 $\overline{AM}$과 $\overline{A_1M_1}$을 중선이고, $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$, $\overline{AM} = \overline{A_1M_1}$, $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$일 때, $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$임을 증명하여라.

문제 9. 삼각형 ABC와 $A_1B_1C_1$에서 $\overline{AM}$과 $\overline{A_1M_1}$을 중선이고, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\overline{AM} = \overline{A_1M_1}$, $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$일 때, $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$임을 증명하여라.

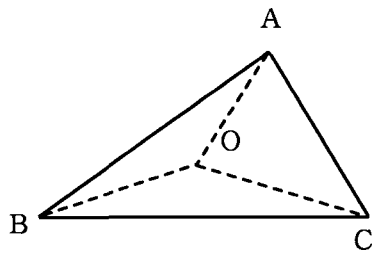
'중선의 연장선에 중선과 같은 선분을 보조선으로 작도하기'가 문제해결의 바탕 아이디어인 문제들의 사슬로 문제 7, 문제 8, 문제 9를 살펴보았다.

(3) 부등식의 탐구에서 삼각 부등식을 활용

삼각 부등식은 기하학에서 부등식 문제의 해결에 자주 사용되는 부등식으로, 삼각 부등식을 활용하여 해결하는 몇몇 부등식 문제들의 사슬을 살펴보자.

문제 10. 삼각형 내부의 임의의 점에서 각 꼭지점까지의 거리의 합은 삼각형 둘레의 절반보다 크다는 것을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC의 내부에 점 O를 잡고, $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} > \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$임을 보이자 (<그림 8> 참조).



<그림 8>

8) 문제 8과 9에 대한 증명은 생략한다.

삼각형의 내부 점 O에 의해, 삼각형 ABC는 △ABO, △ACO, △BCO로 분할된다. 이들 각각에 대해 삼각 부등식을 적용하면, $\overline{OA}+\overline{OB} > \overline{AB}$, $\overline{OB}+\overline{OC} > \overline{BC}$, $\overline{OA}+\overline{OC} > \overline{AC}$을 얻을 수 있다. 부등식들을 각각 더하면, $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} > \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$. □

삼각 부등식을 이용하여 사면체에 관련된 두 문제를 탐구해 보자.

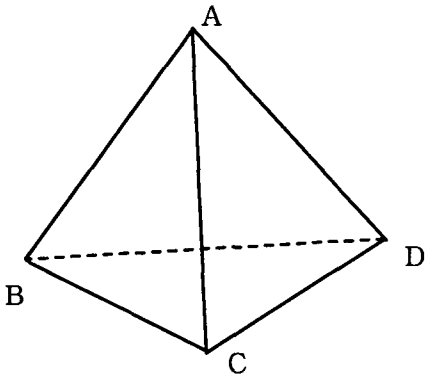
문제 11. 사면체 ABCD의 모서리 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$에 대해,

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD} > \frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD})$$

을 증명하여라.

증명. 사면체 ABCD의 각 옆면들에 대해 삼각 부등식을 사용하면(<그림 9> 참조),

$$\overline{AB}+\overline{AC} > \overline{BC},\ \overline{AC}+\overline{AD} > \overline{CD},$$
$$\overline{AD}+\overline{AB} > \overline{BD}.$$



<그림 9>

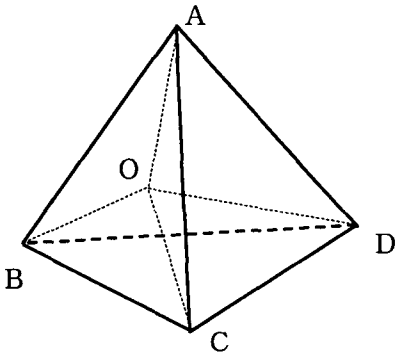
얻어진 부등식을 서로 더하면,

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD} > \frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD}).\ \square$$

문제 10를 사면체에 대해 생각하면 문제 12를 얻을 수 있는데, 문제 11을 이용하여 해결할 수 있다.

문제 12. 사면체 내부의 임의의 점에서 각 꼭지점까지의 거리의 합은 사면체 둘레의 ⅓보다 크다는 것을 증명하여라.

증명. 사면체 내부의 임의의 점 O와 사면체의 각 꼭지점들을 연결하면, 네 개의 사면체 OABC, OACD, OABD, OBCD를 얻을 수 있다(<그림 10> 참조).



<그림 10>

각 사면체들에 대해, 문제 11에서 얻어진 성질을 이용하면,

$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} > \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}),$$
$$\overline{OA}+\overline{OD}+\overline{OB} > \frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{AB}),$$
$$\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD} > \frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DB}),$$
$$\overline{OA}+\overline{OC}+\overline{OD} > \frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{CD}).$$

얻어진 부등식을 모두 더하면,

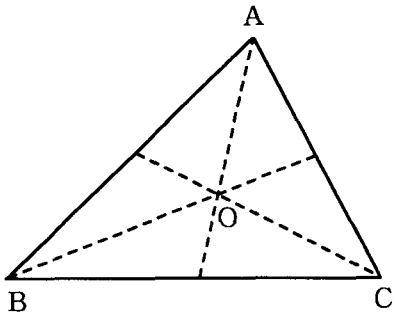
$$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD} > \frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}+\overline{AC}+\overline{BD}).\ \square$$

이제, 문제 10의 그림에서 $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$가 중선이라 하면, 삼각 부등식을 이용하여 다음과 같은 흥미로운 문제를 증명할 수 있다.

문제 13. 삼각형의 세 중선의 길이를 각각 m_a, m_b, m_c라 할 때, $\frac{3}{4}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}) < m_a+m_b+m_c$임을 증명하여라.

증명. 삼각형 ABC의 꼭지점 A, B, C에서 그은 중선의 길이를 각각 m_a, m_b, m_c라 하자(그림 11). 문제 10에서 같은 접근을 이용하자. O가 삼각형의 무게중심이므로, $\overline{AO} = \frac{2}{3}m_a$, $\overline{BO} = \frac{2}{3}m_b$, $\overline{CO} = \frac{2}{3}m_c$임

을 고려하면, 삼각형 OBC에 삼각 부등식을 사용하여 $\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c > \overline{BC}$. 마찬가지로, △OAB, △OAC에서 $\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b > \overline{AB}$, $\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_c > \overline{AC}$를 얻을 수 있다.



<그림 11>

얻어진 부등식들을 각각 더하면,

$\frac{3}{4}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}) < m_a+m_b+m_c$을 얻는다. □

한편, 문제 2와 문제 13을 결합하면, 다음과 같은 문제를 얻을 수 있다.

문제 14. 삼각형의 세 중선의 길이를 각각 m_a, m_b, m_c라 할 때, $\frac{3}{4}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}) < m_a+m_b+m_c < \overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}$임을 증명하여라.

'부등식의 탐구에서 삼각 부등식을 활용하기'와 관련하여, 평면과 공간에 관련된 문제들의 사슬인 문제 10, 문제 11, 문제 12, 문제 13, 문제 14를 제시하였다. 이들 문제는 문제 1과 관련될 뿐만 아니라, 이 문제들 자체도 서로 유기적인 관계를 맺고 있기 때문에, 학생들에게 수학 문제를 통해 알게 되는 수학적 지식이나 방법들을 효과적으로 반복할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

본 연구를 통해 얻어진 수학 문제들의 사슬을 정리하면, 다음과 같은 <표 1>로 나타낼 수 있다.

<표 1> 수학 문제의 사슬

바탕 문제. △ABC의 중선 $\overline{AM}$에 대해, $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{AC}$			
수학적 지식	**수학적 탐구 방법**		
삼각형에서 중선의 두 배는 중선의 한 끝점을 공유하는 두 변의 합보다 작음	문제해결 탐색에서 주어진 것과 구하는 것을 자세히 분석하여, 주어진 것을 작도에 나타내기	중선의 연장선에 중선과 같은 선분을 보조선으로 작도하기	부등식의 탐구에서 삼각 부등식을 활용하기
문제 1을 바탕으로 하는 문제의 사슬			
문제 1 → 문제 2 → 문제 3(1), 문제 3(2)	문제 1 → 문제 4 → 문제 5 → 문제 6	문제 1 → 문제 7 → 문제 8 → 문제 9	문제 1 → 문제 10 → 문제 11 → 문제 12 → 문제 13 → 문제 14

5. 결 론

본 연구에서는 한 가지 수학 문제를 수학적 지식과 수학적 방법의 측면에서 분석하여 교육적으로 의미있는 몇몇 요소들을 추출하고, 얻어진 요소들에 관련된 다양한 수학 문제들을 체계화하여 사슬의 형태로 제시하였다. 이를 통해, 수학 문제의 교육적 의의를 고찰하고, 이를 교수-학습 과정에 활용할 수 있도록 하는 한 가지 전형을 제시하였다.

본 연구에서 바탕이 된 문제는 '삼각형 ABC의 중선 $\overline{AM}$에 대해, $2\overline{AM} < \overline{AB}+\overline{AC}$임을 증명하여라.'인데, 이 문제로부터 수학적 지식의 측면과 수학적 탐구 방법의 측면에서 수학적으로 유의미한 몇몇 아이디어를 추출하였다.

이 문제로부터 얻은 유용한 수학적 지식은 '삼각형에서 중선 길이의 두 배는 중선의 한 끝점을 공유하는 두 변의 합보다 작다.'이며, 이것을 문제해결의 바탕으로 사용하는 수학 문제의 사슬 문제 2, 문제 3(1), 문제 3(2)를 살펴보았다.

본 연구에서는 문제들을 사슬의 형태로, 즉 서로 관련되도록 조직하였다. 이처럼 사슬로 구성된 문제들은 학생들이 각각의 문제를 통해 얻은 수학적 지식을 다음 문제의 해결 과정에서 의식적으로 반복할 수 있는 기회를 제공하고, 각각의 수학 문제를 해결하고 난 후에 반성의

과정을 의식적으로든 무의식적으로든 가질 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

한편, 문제 1에 대해 수학적 탐구 방법의 측면에서 ① 문제해결의 탐색 과정에서 '주어진 것'과 '구하는 것'을 상세하게 분석하여 주어진 것들을 상응하는 작도에 나타내기; ② 중선의 연장선에 중선과 같은 선분을 보조선으로 작도하기; ③ 증명을 위한 보조 요소로써 삼각형을 이용하기; ④ 삼각형에 관련된 부등식의 증명에 삼각 부등식을 이용하기 등을 추출하였다.

'문제해결의 탐색 과정에서 주어진 것과 구하는 것을 상세하게 분석하여, 주어진 것들을 상응하는 작도에 나타내기'가 문제해결의 바탕이 되는 아이디어인 문제의 사슬로 문제 4, 문제 5, 문제 6을 제시하였고, '중선의 연장선에 중선과 같은 선분을 보조선으로 작도하기'가 문제해결의 바탕 아이디어인 문제의 사슬로 문제 7, 문제 8, 문제 9를 제시하였다.

'부등식의 탐구에서 삼각 부등식을 활용하기'와 관련하여, 평면과 공간에 관련된 문제의 사슬로 문제 10, 문제 11, 문제 12, 문제 13, 문제 14를 제시하였다. 특히, 이들 문제는 문제 1과 관련될 뿐만 아니라, 이 문제들 자체도 서로 유기적인 관계를 맺고 있기 때문에, 학생들에게 수학 문제를 통해 알게 되는 수학적 지식이나 방법들을 효과적으로 반복할 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

김진락 (1990). 수학 문제 분류와 그 실제, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 29(1), pp.1-6, 서울: 한국수학교육학회.

남승인 · 류성림 (2002). 문제해결 전략 지도의 실제, 서울: 형설출판사.

방승진 (1995). 수학 문제 제작 사례 연구 1, 2. 대한수학교육학회 논문집 5(2), pp.85-100, 서울: 대한수학교육학회.

신현성 · 김경희 (1999). 수학적 문제해결, 서울: 경문사.

임문규 (1996). 문제설정에서 사고 활동의 조사 · 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 35(1), pp.1-14, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2002). 오일러 공식의 다양한 증명들, 한국수학사학회지 15(2), pp.33-48, 서울: 한국수학사학회.

한인기 (2001a). 코시 부등식에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 40(1), pp.103-112, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2001b). 수학 문제의 구조 규명에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 11, pp.279-290, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 · 강인주 (2000). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 10, pp.143-154, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (1999). 작도 문제 해결 방법, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 9, pp.153-164, 서울: 한국수학교육학회.

Butts T. (1980). Posing problems properly, In Eds. Krulik S. & Reys R.E. *Problem Solving in School Mathematics. Verginia*: NCTM. pp.23-33.

Dolan D.T. & Williamson J. (1983). *Teaching problem-solving strategies*, Menlo Park: Addison-Wesley Pub. Company.

Gardiner A. (1998). *Discovering mathematics: The arts of investigation*, Oxford: Oxford science publication.

Gengzhe C. (1990). Remarks on proposing problems for mathematics competition, In Ed. Chinese Mathematical Olympiad Committee/ *Mathematical Olympiad in China*. China: 湖南省教育出版社. pp. 177-199.

Lenchner G. (1983). *Creative problem solving in school mathematics*, Boston: Houghton Mifflin Company.

Polya G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*, Princeton: Princeton University Press.

Polya G. (1957). *How to solve it. Princeton*: Princeton University Press.

Polya G. (1962). *Mathematical discovery*, New York: John Wiley & Sons, Inc.

Schonfeld A.H. (1980). Heuristics in the classroom. In Eds. Krulik S. & Reys R.E./ *Problem Solving in*

School Mathematics, Verginia: NCTM. pp. 9-22.

Sharygin I.F. (2000). *Two articles and two hundred problems*, Moscow.

A Study on the Educational Analysis of a Mathematical Problem and Systematization of Related Problems

Han, Inki

Gyeongsang National University

In this paper we analyze educational aspects of a mathematical problem. As a result of the analysis, we extract five meaningful mathematical knowledge and ideas. Corresponding with these we suggest some chains of mathematical problems that are expected to activate student's self-oriented mathematical investigation.

* ZDM classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* key word : mathematical problem, chain of problems, proof, educational analysis of problem