

사각형 강체를 포함한 사각평판의 경계조건에 따른 처짐 연구

한근조*, 안찬우*, 김태형**, 심재준***, 한동섭***, 안성찬****

A Study on the Deflection of the Rectangular Plates with the Rectangular Rigid Body with respect to the Boundary Conditions

Geun Jo Han*, Chan Woo Ahn*, Tae Hyong Kim**, Jae Joon Shim***, Dong Seop Han***
and Seong Chan Ahn****

ABSTRACT

This paper investigates the effect of reinforced plate on the deflection of the rectangular plate, when the rectangular plate is reinforced with rectangular rigid body at the centroid of the plate. For two boundary conditions such as simple supported and clamped boundary. This study derives deflection formula of reinforced plates with three kinds of the aspect ratio of a rectangular plate with respect to the elastic modulus ratio and the length ratio of rigid body using the least square method. The results are as follows:

1. As the elastic modulus ratio $r_e \geq 1000$, the maximum deflection with respect to the length ratio r_l converges into constant value.
2. Deflection formula with respect to the length ratio r_l is derived as the third order polynomial.

Key Words : Deflection (처짐), Rectangular plate (사각평판), Rigid body (강체), Bending (굽힘)

기호설명

r_a = Aspect ratio of the rectangular plate
 r_e = Elastic modulus ratio of the rigid body
 r_l = Length ratio of the rigid body
 $w_{s,max}$ = Maximum deflection of a simple supported plate
 $w_{c,max}$ = Maximum deflection of a clamped plate
 μ_s = Deflection coefficient of a simple supported plate
 μ_c = Deflection coefficient of a clamped plate

1. 서론

항공기산업의 발전과 더불어 대두된 가장 큰 문제는 강도를 유지하면서 구조물을 경량화 시키는 방법이라 할 수 있다. 이를 해결하기 위하여 평판을 다양한 형태로 보강하여 사용하게 되는데, 이러한 평판에 대한 이론은 오래 전부터 수많은 공학자들에 의해 다양하게 진행되어왔다. 그러나 복잡한 구조를 갖는 판에 대한 해석은 이러한 이론적인 방법으로 적용하기 곤란하므로 컴퓨터를 이용하여

2002년 8월 23일 접수
* 동아대학교 기계산업시스템공학부
** 경남정보대학 컴퓨터응용기계과
*** 동아대학교 기계공학과 대학원
**** LG OTIS

해결하기 시작하였다!

전자장비가 많이 부착되는 항공기의 경우 사각 평판에 보강재 또는 보강판을 이용하여 그 위에 장비를 부착하게 된다. 본 연구는 단순지지와 완전고정의 두 가지 경계조건에서 일정한 형상비(r_a)를 갖는 사각평판에 보강재가 부착될 때 사각평판의 처짐에 미치는 영향을 평판의 처짐식을 사용하여 살펴보고자 한다. 연구를 위한 설계변수는 각각 사각평판에 대한 강체의 탄성계수비(r_c)와 길이비(r_l)이다.

연구과정은 먼저 유한요소해석을 수행하고 이를 바탕으로 최소자승법을 이용하여 강체를 포함하는 평판의 처짐식을 도출함으로써 현장에서 바로 사용할 수 있는 비교적 단순한 형태의 실험식을 제시하였다.^{2,3}

2. 평판의 굽힘이론

2.1 경계조건에 따른 사각평판의 처짐

일반적으로 사각평판의 처짐은 Ritz법을 이용하여 최소 포텐셜 이론으로서 구할 수 있다.^{4,5} 사각평판에 하중 p 가 작용할 때 한 일 W 는

$$W = \iint_A wp \, dx dy \quad (1)$$

이고, 포텐셜 에너지는 $\Pi = U - W$ 는

$$\Pi = \frac{D}{2} \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - wp \right\} dx dy \quad (2)$$

이다.

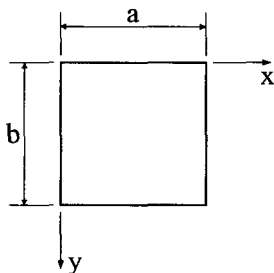


Fig. 1 Coordinate system of a rectangular plate

2.1.1 단순지지경계

단순지지경계에서 사각평판의 경계조건은

$$\begin{aligned} w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x=0, x=a) \\ w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (y=0, y=b) \end{aligned} \quad (3)$$

이므로 다음과 같이 처짐식을 가정할 수 있다.

$$w_s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4)$$

분포하중 p_0 가 작용하고, $a=b$ 일 때 최대처짐은

$$w_{s, \max} = \mu_s \frac{p_0 a^4}{D} \quad (5)$$

여기서, D 는 휨강성계수이며 다음과 같다.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

2.1.2 완전고정경계

완전고정경계에서 사각평판의 경계조건은

$$\begin{aligned} w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (x=0, x=a) \\ w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y=0, y=b) \end{aligned} \quad (6)$$

이므로 다음과 같이 처짐식을 가정할 수 있다.

$$w_c = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) \quad (7)$$

분포하중 p_0 가 작용하고, $a=b$ 일 때 최대처짐은

$$w_{c, \max} = \mu_c \frac{p_0 a^4}{D} \quad (8)$$

2.2 파라메타의 정의

2.2.1 사각평판의 형상비

사각평판의 형상비(r_a)는 사각평판의 가로, 세로의 비를 무차원화하여 나타낸 b/a 이며, 1.0, 1.5, 2.0의 3종류의 모델을 사용하였다.

2.2.2 강체의 탄성계수비

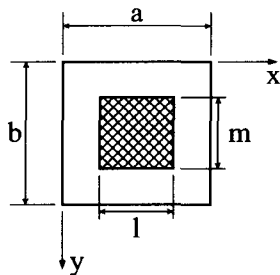
탄성계수비(r_e)는 사각평판의 Young계수 E_p 에 대한 강체의 Young계수 E_r 의 비를 무차원화하여 나타낸 것으로 식(9)와 같다. 탄성계수비는 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000의 7종류의 모델을 사용하였다.

$$r_e = \frac{E_r}{E_p} \quad (9)$$

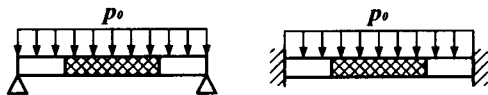
2.2.3 강체의 길이비

길이비(r_l)는 사각평판의 한 변에 대한 강체의 한 변의 길이를 무차원화하여 나타낸 것으로 식(10)과 같다. 길이비는 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9의 9종류의 모델을 사용하였다.

$$r_l = \frac{l}{a} = \frac{m}{b} \quad (10)$$



(a) dimensions of a rectangular plate



(b) simple supported B.C. (c) clamped B.C.

Fig. 2 Dimensions and two boundary conditions of the rectangular plate with a rectangular rigid body (B.C. : boundary condition)

3. 결과 및 고찰

3.1 단순지지경계에서 사각평판의 처짐

단순지지된 사각평판에 분포하중 p_0 가 작용할 때 최대 처짐은 식(4)와 같고, 이때 탄성계수비 $r_e=1$, 길이비 $r_l=0$ 인 경우 즉, 보강되지 않은 순수한 평판의 처짐계수 μ_s 는 $0.00416(r_a=1.0)$, $0.00772(r_a=1.5)$, $0.01012(r_a=2.0)$ 이다. 세 가지 형상비에서 탄성계수비와 길이비변화에 따른 처짐계수 μ_s 를 각각 Table 1, Table 2, Table 3에 나타내었다.

형상비(r_a)가 1.0인 Table 1을 살펴보면, 각각의 길이비(r_l)에서 탄성계수비(r_e)가 증가함에 따른 처짐계수 μ_s 는 각각 0.00377, 0.00306, 0.00228, 0.00157, 0.00098, 0.00054, 0.00024, 0.00008, 0.00001의 값에 수렴하게 된다.

Table 1 Deflection coefficient (μ_s) of simple supported rectangular plates with respect to the elastic modulus ratio and length ratio when the aspect ratio is 1.0 ($\mu_s \times 10^{-3}$)

$r_e \setminus r_l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	4.03	3.77	3.48	3.19	2.93	2.71	2.52	2.36	2.21
3	3.97	3.60	3.18	2.77	2.41	2.11	1.87	1.68	1.51
4	3.93	3.50	3.01	2.54	2.13	1.79	1.52	1.31	1.15
5	3.91	3.44	2.90	2.39	1.94	1.58	1.30	1.09	0.93
10	3.85	3.28	2.64	2.04	1.52	1.12	0.82	0.62	0.48
100	3.78	3.09	2.33	1.63	1.05	0.61	0.32	0.14	0.07
1000	3.77	3.06	2.28	1.57	0.99	0.55	0.25	0.08	0.02
(∞)	3.77	3.06	2.28	1.57	0.98	0.54	0.24	0.08	0.01

Table 2 Deflection coefficient (μ_s) of simple supported rectangular plates with respect to the elastic modulus ratio and length ratio when the aspect ratio is 1.5 ($\mu_s \times 10^{-3}$)

$r_e \setminus r_l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	7.46	6.96	6.39	5.83	5.34	4.93	4.60	4.33	4.09
3	7.35	6.63	5.82	5.03	4.35	3.80	3.37	3.05	2.79
4	7.28	6.44	5.49	4.58	3.80	3.18	2.72	2.37	2.12
5	7.23	6.32	5.28	4.29	3.45	2.79	2.30	1.96	1.71
10	7.13	6.03	4.79	3.64	2.68	1.95	1.43	1.10	0.88
100	7.00	5.68	4.23	2.91	1.84	1.05	0.53	0.24	0.12
1000	6.99	5.63	4.16	2.82	1.74	0.95	0.43	0.14	0.03
(∞)	6.99	5.63	4.15	2.82	1.73	0.94	0.42	0.13	0.02

Table 3 Deflection coefficient (μ_s) of simple supported rectangular plates with respect to the elastic modulus ratio and length ratio when the aspect ratio is 2.0 ($\mu_s \times 10^{-3}$)

$r_c \setminus r_l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	9.75	9.03	8.20	7.41	6.74	6.20	5.80	5.51	5.27
3	9.59	8.56	7.40	6.31	5.39	4.69	4.18	3.83	3.57
4	9.50	8.31	6.96	5.71	4.67	3.88	3.32	2.96	2.71
5	9.45	8.16	6.71	5.33	4.21	3.37	2.80	2.42	2.18
10	9.32	7.82	6.16	4.60	3.29	2.30	1.69	1.33	1.12
100	9.17	7.40	5.46	3.71	2.30	1.29	0.64	0.28	0.14
1000	9.16	7.34	5.37	3.59	2.16	1.15	0.51	0.17	0.03
(∞)	9.15	7.34	5.36	3.57	2.15	1.13	0.49	0.15	0.02

형상비(r_a)가 1.5인 Table 2를 살펴보면, 각각의 길이비(r_l)에서 탄성계수비(r_c)가 증가함에 따른 처짐계수 μ_s 는 각각 0.00699, 0.00563, 0.00415, 0.00282, 0.00173, 0.00094, 0.00042, 0.00013, 0.00002의 값에 수렴하게 된다.

형상비(r_a)가 2.0인 Table 3을 살펴보면, 각각의 길이비(r_l)에서 탄성계수비(r_c)가 증가함에 따라 처짐계수 μ_s 는 각각 0.00915, 0.00734, 0.00536, 0.00357, 0.00215, 0.00113, 0.00049, 0.00015, 0.00002의 값에 수렴하게 된다.

이상 종합해 볼 때, 탄성계수비가 1000이상이면 사각평판 내부에 존재하는 사각형 부분을 강체로

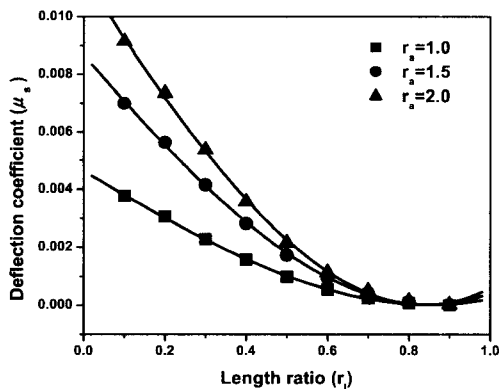


Fig. 3 Deflection coefficient (μ_s) of simple supported rectangular plates with respect to the length ratio (r_l) at the elastic modulus (r_c) is infinite

Table 4 Parameters for deflection coefficient formula of simple supported rectangular plates with the rectangular rigid body with respect to the aspect ratio ($\mu_s = A_0 + A_1 r_l + A_2 r_l^2 + A_3 r_l^3$)

$r_a \setminus A$	A_0	A_1	A_2	A_3
1.0	0.00463	-0.00836	0.00059	0.00338
1.5	0.00868	-0.01657	0.00299	0.00533
2.0	0.01145	-0.02267	0.00527	0.00655

보아도 무방하다고 할 수 있다. 따라서 각각의 형상비에서 내부에 사각형 강체($r_c \geq 1000$)를 갖는 사각평판의 강체크기에 따른 처짐계수(μ_s) 변화추이를 최소자승법을 이용하여 Fig. 3과 같이 나타낼 수 있다. 그래프의 형태상 3차식 이상이면 1.0×10^{-5} 이 내의 표준편차와 0.999의 신뢰도를 갖게 되므로 3차 다항식의 형태로 처짐계수를 수식화 하여 Table 4에 나타내었다. 이를 살펴보면 세 가지 형상비에서 길이비가 각각 0.84($r_a=1.0$), 0.79($r_a=1.5$), 0.77($r_a=2.0$)이상이면 강체가 존재하지 않는 평판에 비해 처짐이 1/100로 줄어들음을 알 수 있다.

3.2 완전고정경계에서 사각평판의 처짐

완전고정된 사각평판에 분포하중 p_0 가 작용할 때 최대 처짐은 식(7)과 같고, 이때 탄성계수비 $r_c=1$, 길이비 $r_l=0$ 인 경우 즉, 보장되지 않은 순수한 평판의 처짐계수 μ_c 는 0.00126($r_a=1.0$), 0.00220($r_a=1.5$), 0.00253($r_a=2.0$)이다. 세 가지 형상비에서 탄성계수비와 길이비변화에 따른 처짐계수를 각각 Table 5, Table 6, Table 7에 나타내었다.

형상비(r_a)가 1.0인 Table 5를 살펴보면, 각각의 길이비(r_l)에서 탄성계수비(r_c)가 증가함에 따른 처짐계수 μ_c 는 각각 0.00111, 0.00087, 0.00063, 0.00042, 0.00026, 0.00014, 0.00006, 0.00002, 0의 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

형상비(r_a)가 1.5인 Table 6을 살펴보면, 각각의 길이비(r_l)에서 탄성계수비(r_c)가 증가함에 따른 처짐계수 μ_c 는 각각 0.00195, 0.00153, 0.00110, 0.00074, 0.00045, 0.00024, 0.00011, 0.00003, 0.00001의 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다.

형상비(r_a)가 2.0인 Table 7을 살펴보면, 각각의 길이비(r_l)에서 탄성계수비(r_c)가 증가함에 따른 처짐계수 μ_c 는 각각 0.00227, 0.00183, 0.00135, 0.00090, 0.00054, 0.00028, 0.00012, 0.00004, 0.00001의 값에

Table 5 Deflection coefficient (μ_c) of clamped rectangular plates with respect to the elastic modulus ratio and length ratio when the aspect ratio is 1.0 ($\mu_c \times 10^{-3}$)

$r_c \backslash r_l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	1.21	1.13	1.04	0.97	0.93	0.89	0.87	0.84	0.78
3	1.19	1.06	0.94	0.84	0.77	0.72	0.69	0.66	0.60
4	1.17	1.03	0.89	0.76	0.67	0.61	0.58	0.55	0.50
5	1.16	1.01	0.85	0.71	0.61	0.54	0.50	0.47	0.43
10	1.14	0.95	0.76	0.59	0.46	0.38	0.32	0.29	0.26
100	1.12	0.88	0.65	0.44	0.29	0.17	0.10	0.06	0.04
1000	1.11	0.87	0.63	0.42	0.26	0.14	0.07	0.02	0.01
(∞)	1.11	0.87	0.63	0.42	0.26	0.14	0.06	0.02	0.00

Table 6 Deflection coefficient (μ_c) of clamped rectangular plates with respect to the elastic modulus ratio and length ratio when the aspect ratio is 1.5 ($\mu_c \times 10^{-3}$)

$r_c \backslash r_l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	2.11	1.96	1.81	1.70	1.62	1.57	1.54	1.49	1.38
3	2.07	1.85	1.64	1.46	1.34	1.27	1.22	1.17	1.07
4	2.05	1.79	1.53	1.32	1.17	1.08	1.03	0.98	0.89
5	2.03	1.75	1.46	1.23	1.06	0.95	0.89	0.85	0.77
10	2.00	1.66	1.31	1.02	0.80	0.65	0.57	0.52	0.48
100	1.96	1.55	1.13	0.77	0.49	0.29	0.17	0.10	0.07
1000	1.95	1.53	1.11	0.74	0.45	0.24	0.11	0.04	0.01
(∞)	1.95	1.53	1.10	0.74	0.45	0.24	0.11	0.03	0.01

수렴하게 됨을 알 수 있다. 즉, 단순지지와 마찬가지로 탄성계수비가 1000이상이면 강체로 보아도 무방하다고 할 수 있다. 따라서 각각의 형상비에서 내부에 사각형 강체($r_c \geq 1000$)를 갖는 사각평판의 강체크기에 따른 처짐계수(μ_c) 변화추이를 최소자승법을 이용하여 Fig. 4와 같이 나타낼 수 있다. 그래프의 형태상 3차식 이상이면 1.0×10^{-5} 이내의 표준편차와 0.999의 신뢰도를 갖게 되므로 3차 다항식의 형태로 처짐계수를 수식화 하여 Table 8에 나타내었다. 이를 살펴보면 세 가지 형상비에서 길이비가 각각 $0.82(r_a=1.0)$, $0.79(r_a=1.5)$, $0.77(r_a=2.0)$ 이상이면 강체가 존재하지 않는 평판에 비해 처짐이 1/100로 줄어들음을 알 수 있다.

Table 7 Deflection coefficient (μ_c) of clamped rectangular plates with respect to the elastic modulus ratio and length ratio when the aspect ratio is 2.0 ($\mu_c \times 10^{-3}$)

$r_c \backslash r_l$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	2.43	2.24	2.06	1.93	1.85	1.82	1.80	1.75	1.61
3	2.39	2.15	1.89	1.65	1.52	1.46	1.43	1.39	1.26
4	2.37	2.09	1.80	1.53	1.33	1.24	1.20	1.17	1.05
5	2.35	2.06	1.75	1.45	1.19	1.09	1.04	1.01	0.92
10	2.32	1.97	1.60	1.26	0.96	0.74	0.66	0.63	0.58
100	2.28	1.85	1.38	0.95	0.61	0.36	0.20	0.12	0.09
1000	2.28	1.83	1.35	0.91	0.54	0.29	0.13	0.05	0.01
(∞)	2.27	1.83	1.35	0.90	0.54	0.28	0.12	0.04	0.01

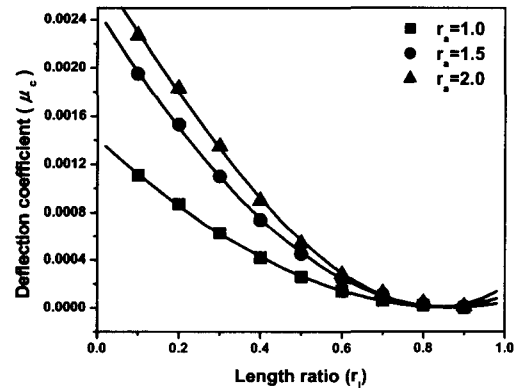


Fig. 4 Deflection coefficient (μ_c) of clamped rectangular plates with respect to the length ratio (r_l) at the elastic modulus (r_c) is infinite

Table 8 Parameters for deflection coefficient formula of clamped rectangular plates with the rectangular rigid body with respect to the aspect ratio ($\mu_c = B_0 + B_1 r_l + B_2 r_l^2 + B_3 r_l^3$)

$r_a \backslash B$	B_0	B_1	B_2	B_3
1.0	0.00141	-0.00307	0.00142	0.00029
1.5	0.00248	-0.00538	0.00240	0.00059
2.0	0.00282	-0.00532	0.00061	0.00207

4. 결론

단순지지경계와 완전고정경계에 대해 세 가지 사각평판의 형상비에서 강체의 탄성계수비와 길이비를 설계변수로 하여 사각형 강체를 포함한 사각평판의 처짐의 변화를 최소자승법을 이용하여 계산한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 경계조건과 형상비에 관계없이 탄성계수비(r_c)가 1000이상이면 각각의 길이비(r_l)에서 처짐계수가 일정한 값에 수렴하게 되어 사각형 내부에 포함된 사각형 부분을 강체로 간주할 수 있음을 알 수 있다.

2. 단순지지된 사각평판에서 길이비에 따른 처짐계수(μ_s)를 최소자승법을 이용하여 0.999의 신뢰도를 갖는 3차 다항식의 형태로 나타낼 수 있으며, 세 가지 형상비에서 길이비가 각각 0.84($r_a=1.0$), 0.79($r_a=1.5$), 0.77($r_a=2.0$)이상이면 강체가 존재하지 않는 평판에 비해 처짐이 1/100로 줄어들음을 알 수 있다.

3. 완전고정된 사각평판에서 길이비에 따른 처짐계수(μ_c)를 최소자승법을 이용하여 0.999의 신뢰도를 갖는 3차 다항식의 형태로 나타낼 수 있으며, 세 가지 형상비에서 길이비가 각각 0.82($r_a=1.0$), 0.79($r_a=1.5$), 0.77($r_a=2.0$)이상이면 강체가 존재하지 않는 평판에 비해 처짐이 1/100로 줄어들음을 알 수 있다.

참고문헌

1. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., "Theory of Plates and Shells," McGraw-Hill Co., pp. 180-228, 1959.
2. Hoffman, J., "Numerical methods for engineers," McGraw-Hill, Co., Singapore, 1992.
3. 한근조, 안성찬, 심재준, 이현철, 장활수, "면적비와 위치변화가 점용접된 두 사각평판의 좌굴응력에 미치는 영향," 한국정밀공학회지, 제18권, 제12호, pp. 54-59, 2001.
4. Ugural, A. C., "Stresses in Plates and Shells," McGraw-Hill Co., pp. 59-93, 1981.
5. 오세욱, 재료역학, 동명사, pp. 393-395, 1992.