

# 궤도형상 데이터를 이용한 베어링 파라미터 규명

이경백\*, 정찬범\*\*, 김영배\*\*\*

## Identification of Parameter for Bearing Using Orbit Data

Kyung-Baek Lee\*, Chan-Bum Jung\*\*, Young Bae Kim\*\*\*

### ABSTRACT

This paper presents the identification of rotor dynamic parameters. The solution of the system equation can be obtained using least square method. The sensitivity analysis is performed to extract optimized solution, which is considered to be insensitive to inherent measurement errors. The cosine and sine term of orbit shapes can be obtained through the by experiment of the orbit analysis at a different speed after doing orbit analysis at an arbitrary selected speed. This values measured time domain are used to search the stiffness and damping coefficients of rotor bearing.

**Key Words** : Rotor Bearing System (회전체 베어링계), Over-determined System(과잉해 시스템), Least Square Method(최소자승법), Sensitivity Analysis(민감도 해석), Orbit Shape(궤도형상)

### 기호설명

- $\bar{L}$  Transformed mass and inertia matrix
- $\bar{G}$  Transformed gyroscopic matrix.
- $S$  Characteristic matrix
- $S_f$  Insensitivity function
- $\lambda_{\min}$  Minimum eigenvalue
- $P_B$  Unknown parameter

### 1. 서론

현대의 산업용 회전기계는 고속, 고정밀도를 필요로 하게 되고, 따라서 높은 강성과 정밀도를 갖는 베어링을 요구하게 된다. 그러나 대부분의 회전기계는 유체를 윤활제로 사용하는 유체 베어

링이나 볼 혹은 로울러를 전동체로 사용하는 구름 베어링에 의해 지지되고 있다. 회전체 베어링계는 회전운동을 하는 회전체와 이를 지지하는 베어링으로 이루어진 구조물을 의미하며, 이러한 계는 회전체의 자이로 효과와 유체윤활 베어링의 회전 속도 증속성 때문에 회전 속도가 변화함에 따라 그 동력학적 특성이 변화하는 경향을 갖는다.

회전체의 동특성 연구는 그 구조가 간단하면 서도 많은 성분의 조합으로 정확한 동적 해석이 어려워 보통 많은 가정 하에서 이루어진다. 다시 말하면, 미소한 변위와 회전, 불평형, 일정한 각속도 등이다. 이러한 회전체 동적 해석에 기본적인 몇 가지 가정에 대해 연구도 되었다.<sup>1</sup> 회전체 동특성 해석 방법은 유한요소법, 전달행렬법, 두 방법의 장점을 조합한 복합해석법(hybrid method,

2002년 8월 12일 접수  
 \* 한영대학 자동차과  
 \*\* 전남대학교 기계공학과 대학원  
 \*\*\* 전남대학교 자동차공학부

FETM) 범위에서 수행되고 있으며, 고유치 문제를 이용한 임계속도계산, 시스템 성능을 극대화를 위한 파라미터 값의 선정, 유체베어링에 지지되는 유연 회전체의 안정성과 임계속도, 베어링으로부터 얻은 불규칙 응답신호 해석을 기초로 비선형 강성 파라미터 추정, 고유진동수와 모드 계산 프로그램 개발 등이 연구되었고, 최근에는 신경회로망과 유전알고리즘을 이용하여 회전기계의 기계적 결함 부위를 추정할 수 있는 고장진단 연구 등이 이루어졌다.<sup>2,3</sup>

회전체 파라미터 규명에 있어서는 일반적으로 가장 비중이 높고, 회전속도에 종속되는 베어링에 대한 강성과 감쇠를 들 수 있으며, 불균형이 추가되기도 한다.<sup>4,5</sup> 그 외 볼베어링 예압과 틈새, 유체 베어링인 경우 유압과 유압방향, 유체 시일(seal) 등이 있다.<sup>6</sup> 동특성 해석의 영역별 연구수행은 대부분 주파수영역(frequency domain)과 시간영역(time domain)에서 단순모델(Jeffcott model)에 대하여 응용할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 중점을 두었다.<sup>7</sup> 그러나 컴퓨터의 발달과 회전기계의 동특성 해석의 연구가 활발해짐에 따라 오버형(overhung)된 모델, 디스크가 다수인 모델, 비등방성인 경우 등 점점 복잡한 형상의 모델들까지 그 응용범위가 확대되었으며 회전체 시스템 해석을 수행하였다.<sup>8</sup>

파라미터 규명에 이용되는 해를 구하는 기법은 최소자승법이 폭넓게 사용되고 있으며 그 외에 IV(Instrumental variable)법, 특이해 분해법(singular value decomposition method), QR 법 등이 있다.<sup>9,10</sup> 그 응용으로 칼만 필터(kalman filter)와 함께 IV 방법을 사용하여 깊이가 다른 크랙이 있는 회전체 모델에 디스크의 변위를 측정하여 물리적 파라미터를 규명하기도 하고, 동적 회전체 시스템의 결함 규명과 유체 필름베어링 해석에는 특이해 분해법을 이용하기도 한다. 또한 최소자승법과 IV 방법을 이용하여 회전체 베어링 동특성 파라미터 규명하기도 하였다.

본 논문에서는 각 베어링의 위치에서 이론적으로 불균형 응답신호를 이용하여 복소표기법에 의한 방법으로 궤도형상을 분석하고<sup>11</sup>, 임의의 두 속도에서의 궤도형상데이터를 통해 슬리브 황동지지 베어링 파라미터인 강성과 감쇠를 두 속도에서의 궤도형상 데이터를 이용하여 추정하고자 한다.

## 2. 운동방정식

본 논문에서는 Fig. 1 과 같은 두 개의 베어링으로 지지하고 한 개의 디스크로 구성하여 하나의 강체 회전체 모델로 연구를 수행 하였으며, Fig. 2 는 각 베어링과 고유의 불평형에 대한 위치를 나타낸다. 이 모델에 대한 최종 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

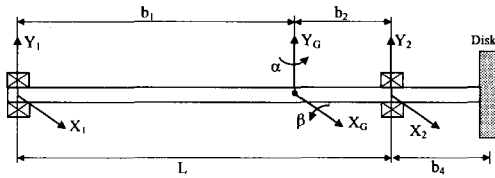


Fig. 1 Rigid rotor model

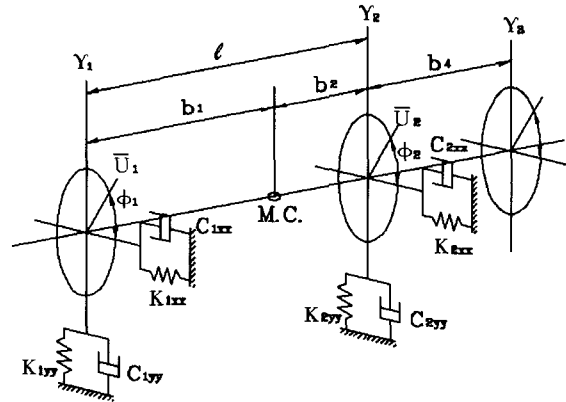


Fig. 2 Bearing, imbalance force and location

$$[\bar{L}]\{\dot{p}\} + [C_{ol}]\{[C] - \omega[\bar{G}]\}\{p\} + [C_{ol}][K]\{p\} = \{F^u\} \quad (1)$$

식(1)의 각각의 계수는 부록에 정의하였으며, 이를 조화운동으로 가정하여 일반 좌표계의 특이해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{p\} = \{p_c\}\cos(\omega t) + \{p_s\}\sin(\omega t) \quad (2)$$

여기에서 아래첨자 c 와 s 는 각각  $\cos(\omega t)$  과  $\sin(\omega t)$  성분을 나타낸다. 위의 값 P 를 식(1)에 대입하고  $\cos(\omega t)$  과  $\sin(\omega t)$  항을 합하여 시간항을 제거하면 8 개의 선형 독립의 행렬 방정식이 생성되고, 시스템 방정식의 형태는 다음과 같다.

$$[S] \begin{Bmatrix} p_c \\ p_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_c^u \\ \bar{F}_s^u \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서

$$[S] : \text{특성 행렬 } [8 \times 8] = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

$$A = [C_{o1}][K] - \omega^2[\bar{L}]$$

$$B = \omega[C_{o1}][C] - \omega^2[\bar{G}]$$

$$\{\bar{F}^u\} = \omega^2[C_{o1}]\{\bar{U}\}$$

$$\{\bar{F}_c^u\} = \{\bar{F}^u\} \text{의 } \cos(\omega t) \text{ 성분}$$

$$\{\bar{F}_s^u\} = \sin(\omega t)$$

$$\{\bar{F}^u\} = \{\bar{F}^u\} \text{의 } \sin(\omega t) \text{ 성분}$$

$$\{\bar{U}\} = [U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}]^T$$

위의 벡터  $\{U\}$ 는 각각  $U_1 \cos \phi_1, U_2 \cos \phi_2, U_1 \sin \phi_1, U_2 \sin \phi_2$ 이다.

### 3. 파라미터 규명식

베어링과 회전체에서 8개의 선형방정식과 알 수 없는 12개의 파라미터  $K_{1xx}, K_{2xx}, K_{1yy}, K_{2yy}, C_{1xx}, C_{2xx}, C_{1yy}, C_{2yy}, U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}$ 가 나타난다. 식(3)을 전개하여 구성하면 결국 다음과 같은 식이 된다.

$$\begin{aligned} [p_c]\{K\} + \omega[p_s]\{C\} - \omega^2\{\bar{U}\} \\ = \omega^2[C_{o1}]^{-1}([\bar{G}]\{p_s\} + [\bar{L}]\{p_c\}) \\ [p_s]\{K\} + \omega[p_c]\{C\} - \omega^2[C_{o1}]^{-1}[C_{o2}]\{\bar{U}\} \\ = \omega^2[C_{o1}]^{-1}([\bar{G}]\{p_c\} - [\bar{L}]\{p_s\}) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\{K\}, \{C\}, \{\bar{U}\}$ 는 규명해야 할 회전체 베어링의 파라미터이고,  $[p_c], [p_s]$ 는 측정 행렬이다. 12개의 알 수 없는 파라미터에 대하여 식(4)를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$[S_1]\{P_B\} = [A_1][B_1]\{v\} \quad (5)$$

여기서

$$[S_1] = \begin{bmatrix} [p_c] & \omega[p_s] & -\omega^2[I] \\ [p_s] & -\omega[p_c] & -\omega^2[C_{o1}]^{-1} \cdot [C_{o2}] \end{bmatrix}$$

: [8×12]

$\{P_B\}$  : unknown parameter  $[K_{1xx}, K_{2xx}, K_{1yy}, K_{2yy},$

$C_{1xx}, C_{2xx}, C_{1yy}, C_{2yy}, U_{1x}, U_{2x}, U_{1y}, U_{2y}]^T$

$$[A_1] = \omega^2 \begin{bmatrix} [C_{o1}]^{-1} & 0 \\ 0 & [C_{o1}]^{-1} \end{bmatrix} : [8 \times 8]$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} [\bar{L}] & [\bar{G}] \\ -[\bar{G}] & [\bar{L}] \end{bmatrix} : [8 \times 8]$$

$$\{v\} = [\{p_c\}^T, \{p_s\}^T]^T : [8 \times 1]$$

식(5)는 알 수 없는 12개의 파라미터에 대하여 8개의 식이 존재함으로써  $\{P_B\}$ 를 구하기 위하여 독립된 식이 더 필요하게 된다. 식을 더 추가하기 위해서 임의의 속도  $\omega_1$ 에서 궤도형상을 분석한 후에 다른 회전속도  $\omega_2$ 에서 다시 궤도형상 분석을 하는 방법을 이용하여 베어링 파라미터를 규명하여야 한다. 이를 oSAM(other Speed Analysis Method)라 한다.

일반화된 식(5)의 형태에서 두 식을 조합하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[S_2]\{P_B\} = [A_2]\{\bar{v}\} \quad (6)$$

여기서

$$[S_2] = \begin{bmatrix} [p_c]_1 & \omega_1[p_s]_1 & -\omega_1^2[I] \\ [p_s]_1 & -\omega_1[p_c]_1 & -\omega_1^2[C_{o1}]^{-1} \cdot [C_{o2}] \\ [p_c]_2 & \omega_2[p_s]_2 & -\omega_2^2[I] \\ [p_s]_2 & -\omega_2[p_c]_2 & -\omega_2^2[C_{o1}]^{-1} \cdot [C_{o2}] \end{bmatrix}$$

: [16×12]

$$[A_2] = \begin{bmatrix} [A_1]_1[B_1] & 0 \\ 0 & [A_1]_2[B_1] \end{bmatrix} : [16 \times 16]$$

$$\{\bar{v}\} = [\{v\}_1^T, \{v\}_2^T]^T : [16 \times 1]$$

위의  $[\bullet]_i$ 와  $\{\bullet\}_i$ 는 속도  $\omega_i (i=1,2)$ 에서의 행렬과 벡터를 나타낸다.

식(6)은 16 개의 식으로 알 수 없는 12 개의 파라미터를 구하는 초과결정(overdetermined)된 식으로 이를 구하기 위해서는 최소자승법, QR 법, 특히 해분해법(singular value decomposition method) 등이 있으나 본 논문에서는 일반적으로 많이 사용되는 최소자승법을 사용하였다.

$$A \cdot X = B \quad (7)$$

여기서

- A :  $m \times n$  coefficient matrix ( $m > n$ )
- X :  $n \times 1$  unknown parameter vector
- B :  $m \times 1$  right hand side vector

$$\hat{X} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B \quad (8)$$

그러므로 식(6)은 식(8)을 이용하여 구할 수 있으며, 다시 식(6)으로부터 최소자승법으로 나타내어 유클리드 놈(norm)을 취하면 다음과 같은 식이 된다.

$$\left\| \frac{dX}{dv_i} \right\| = \left( \frac{1}{|\lambda_{\min}| \text{ of } A^T \cdot A} \right) \left\| (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B \right\| \quad (9)$$

식(9)에서  $\lambda_{\min}$  은 고유치의 최소값을 의미하며,  $\lambda_{\min}$  의 값이 커질수록 측정오차에 기인한 파라미터의 섭동(perturbation)이 더 작아지므로 다음과 같이 본 논문에서는 둔감도(insensitivity function) 함수를 정의 하였다.

$$S_f = |\lambda_{\min}| \text{ of } ([S_2]^T \cdot [S_2]) \quad (10)$$

#### 4. 이론 해석 및 고찰

식(6)에서 행렬  $[S_2]$  는 두 개의 다른 속도  $\omega_1, \omega_2$  의 함수이므로 둔감도 함수  $S_f$  는 임의의  $\omega_1$  을 선택한 후에  $\omega_2$  를 0 에서 6000 rpm 까지 계산하였다. 동기응답(synchronous response)은 두 베어링 사이의 불균형 위상각 차를 변화하여 구할 수 있다. 본 논문에서는 모델에 대하여 90 도의 위상각 차를 갖는 것으로 가정하였으며 Fig. 3 에서

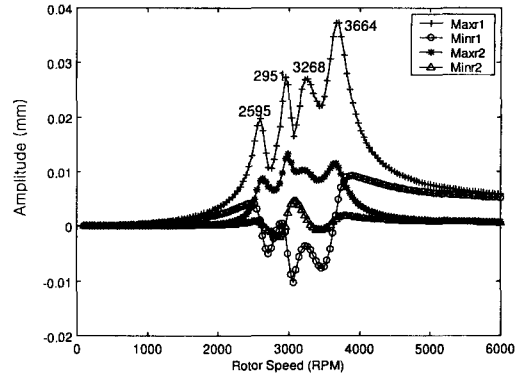


Fig. 3 Synchronous response ( $\phi_1 = 0^\circ, \phi_2 = 90^\circ$ )

는 동기응답 신호를 각 베어링 위치에서 궤도형상(orbit)의 파라미터인 장축과 단축의 변화를 보여주고 있으며 시스템의 네 개의 임계속도가 2595, 2951, 3268, 3664rpm 에서 나타났다. 이는 각각 x, y 축에 대한 임계속도이다. 여기서 2674, 3743 rpm 에서는 원통형 모우드를 나타내었고, 2991, 3387 rpm 에서는 원뿔형 모우드 현상이 발생하여, 평면 1 에서는 후향휘돌림(backward whirl)이 발견되었다. 그리고, 평면 1 의 베어링은 2700rpm 과 3600rpm 두 회전속도 사이에서 후향휘돌림 구간임을 알 수 있었다.

Fig. 4 는 둔감도 함수를 이용하여 2634rpm 에서 파라미터의 변화가 가장 둔감함을 알 수 있었으며 3664rpm( $\omega_1$ )과 2634rpm( $\omega_2$ )의 두 회전속도를 이용하여 파라미터 즉, 강성계수, 감쇠계수, 그리고 불균형 상태를 규명하였다. 그리고

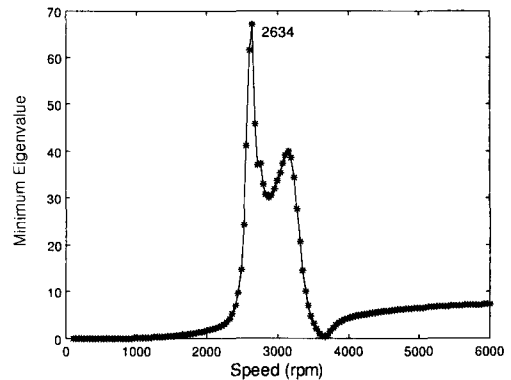


Fig. 4 Parameter insensitivity ( $\omega_1 = 3743\text{rpm}$ )

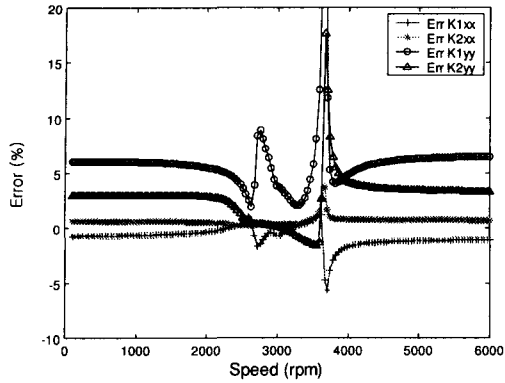


Fig. 5 Identification error of estimated stiffness coefficients (measurement error=10%)

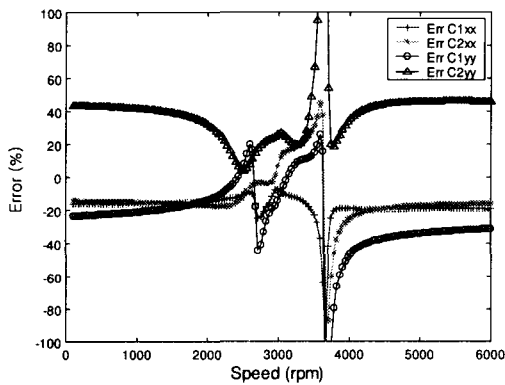


Fig. 6 Identification error of estimated damping coefficients (measurement error=10%)

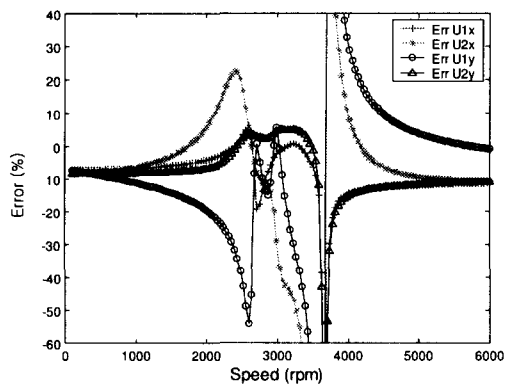


Fig. 7 Identification error of estimated imbalance coefficients (measurement error=10%)

그에 따른 규명오차를 각각 Fig. 5~7 에 나타내었으며, 추정된 파라미터 값들은 Table 1 에 제시하였다.

추정하는 모든 파라미터의 값들은 어느 정도 안정된 오차 규명이 되었지만 이론 해석상 불균형의 위상각 차를 90 도로 가정한 이유 때문에 평면 2 의 x 방향에 대한 감쇠계수와 고유불균형 상태의 오차가 약간 크게 나타난 것으로 생각된다.

Table 1 Comparison between input and estimated parameter ( $\omega_1 = 3664 \text{ rpm}$ ,  $\omega_2 = 2634 \text{ rpm}$ ,  $\phi_1 = 10^\circ$ ,  $\phi_2 = 100^\circ$ )

Para.	Unit	Input	Estimated	Error%
k1xx	N/m	13000	13099.68	0.77
k2xx		130000	130327.25	0.25
k1yy		10000	10195.26	1.95
k2yy		100000	100454.62	0.45
c1xx	N·sec/m	4	3.62	-9.61
c2xx		6	5.71	-4.78
c1yy		4	4.66	16.61
c2yy		14	15.56	11.11
u1x	N·sec <sup>2</sup>	3.94E-7	4.12E-7	4.57
u2x		-6.95E-8	-6.95E-8	0.11
u1y		6.95E-8	3.80E-8	-45.25
u2y		3.94E-7	4.07E-7	3.44

### 5. 실험 고찰

실험장치의 구성에서 스테인레스강 재질의 주축의 직경은 0.01m, 길이는 0.47m이고, 왼쪽 끝에는 75Kw 모터를 직접체결 방식으로 모터의 회전속도를 직류로 조종한다. 축과 일체로 회전하는 구름요소 베어링인 O-ring을 갖는 황동 재질로 된 두 개의 부싱(busing)으로 축을 지지하였고, 그 Bently-Nevada사에서 제시한 사양은 Table 2와 같다.

Table 2 Spec of bearing

Stiffness coefficient	800 to 1500 lb/in
Damping coefficient	0.02 to 1 lb-sec/in

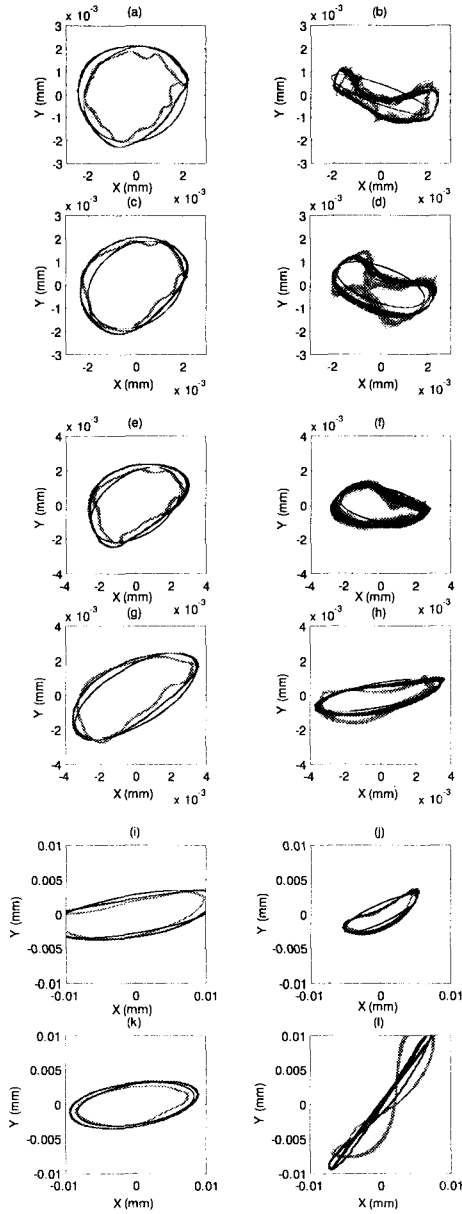


Fig. 8 Orbit shapes of experiment and theory

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| (a) plane 1 of 600 rpm  | (b) plane 2 of 600 rpm  |
| (c) plane 1 of 1200 rpm | (d) plane 2 of 1200 rpm |
| (e) plane 1 of 1800 rpm | (f) plane 2 of 1800 rpm |
| (g) plane 1 of 2400 rpm | (h) plane 2 of 2400 rpm |
| (i) plane 1 of 3000 rpm | (j) plane 2 of 3000 rpm |
| (k) plane 1 of 3600 rpm | (l) plane 2 of 3600 rpm |

또한 반지름이 0.375m, 두께가 0.025m, 질량이 0.8Kg인 디스크는 베어링 2의 0.026m에 위치하여 설치하였으며, 베어링 1과 2의 간격(span)은 0.315m이다.

진동 응답신호는 수평, 수직의 한 쌍으로 각각의 베어링에 최대한 근접한 위치에 설치한 변위 센서에서 베어링 궤도응답을 측정하였다. 측정기기는 B&K 사 모델 3550의 4 채널 FFT 신호 분석기를 사용하여 시간영역(time domain) 응답과 주파수(frequency domain) 응답 그리고 궤적(Orbit) 응답의 데이터를 측정하였다. 시간은 1sec, 최대주파수는 800Hz 를 선택하였고, 창함수는 진동해석에서 가장 많이 이용되고 주기적이거나 비주기적인 정현파에 잘 적용되는 hanning 창을 사용하였다. 600rpm에서 6000rpm 까지 불규칙적인 비동기 성분의 값을 감소시키기 위해 평균화 50 회를 선정 하였다. 그리고 최대 주파수 800Hz 는 정확한 1x 성분을 찾기 위해 선택하였으며 시간간격은 0.488  $\mu$ s로 설정 하였다. Fig. 8 은 실험에 의해 직접 센서로부터 얻어진 데이터를 이용한 궤도형상과 저역통과 필터를 통한 궤도형상, 복소표기법에 의한 궤도형상을 비교하여 나타내고 있다. 여기서 표현한 회전속도는 FFT 해석 과정에서 정확한 1x 에 해당하는 동기신호 성분을 찾기 위하여 60 으로 나누어지는 회전속도를 선택하였다. 거의 원형이나 타원에 가까운 형상은 복소표기법에 의한 푸리에 계수를 실험 데이터 중에서 추출하여 이론적으로 나타낸 것과 저역통과 필터를 사용하여 나타낸 것이다. 그리고, 곡선의 형상이 불규칙적인 것은 FFT 신호 분석기를 이용하여 실제 실험에서 얻은 잡음이 내포된 궤도형상이다. 이에 궤도형상이 복잡해 직접적으로 사용하는데 어려움이 있으므로 저역통과 필터를 이용하여 복소표기법으로 나타낸 궤도형상을 사용하여 해석한 것이다. 저역통과 필터는 MATLAB v5.3 의 SPTOOL 을 이용하여 FIR 필터 중 Kaiser window filter 를 이용하여 만들었다. 이론 해석에서 식(6)의 특성행렬  $[S_2]$ 는 하나의 강체를 조건으로 하여 두개의 다른 회전속도에서 궤도형상의 cos 과 sin 성분을 이용하였다. 하지만 실험에서는 그러한 조건을 만족할 수 없으므로 하나의 속도에서 얻어진 궤도형상의 cos 과 sin 성분을 측정오차 10%를 더하여 구성하였다. 그 결과 각 회전속도에서 파라미터 추정값을 Fig. 9~11 나타내었다.

## 6. 결론

본 논문에서는 고유한 불균형 힘에 의한 동기 신호를 이용하여 베어링의 동적 파라미터인 강성 계수와 감쇠계수를 규명하는 방법으로 이 동기 응답은 특히 임계속도 부근에서 불균형의 크기와 위치에 따른 궤도형상 변화와 진동 모우드의 형태를 관찰할 수 있었다.

시스템 파라미터 규명에 대한 가능성을 제시하였으며, 임의의 두 개의 다른 회전속도를 선정하여 그에 따른 궤도형상(orbit)의 데이터를 추출하여 민감도 해석을 이용하여 알지 못하는 미지의 회전체 베어링에 대한 동적 파라미터를 규명할 수 있었다.

또한 단순히 궤도형상을 측정함으로써 얻어진 데이터를 이용하여 동적 파라미터 값을 추정할 수 있으므로 현장에서 보다 쉽게 회전기계의 동적 거동을 예측하거나 확인할 수 있다.

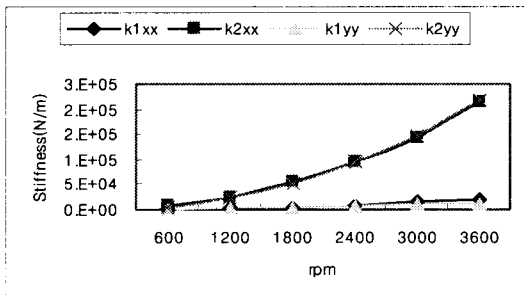


Fig. 9 Experimental Identification of stiffness

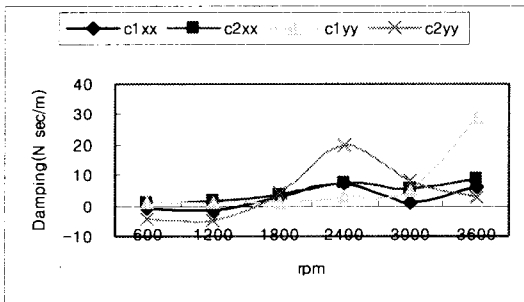


Fig. 10 Experimental Identification of damping

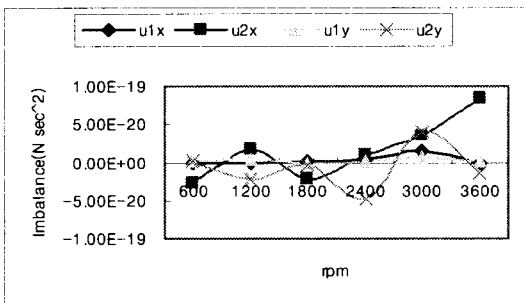


Fig. 11 Experimental Identification of imbalance

$S_f$  로 정의한 둔감도 함수는 계산된 파라미터 값에서 가장 작은 섭동값을 예측할 수 있으므로

## 참고문헌

1. Genta, G., Delprete, C. and Busa, E., "Some Considerations on the Basic Assumptions in Rotordynamics," Journal of Sound and Vibration, Vol 227, No. 3, pp. 611-645, 1999.
2. Friswell, M. I., Garvey, S. D., Penny, J. E. T. and Smart, M. G., "Computing Critical Speeds for Rotating Machines with Speed Dependent Bearing Properties," Journal of Sound and Vibration, Vol. 213, No. 1, pp. 139-158, 1998.
3. Rajan, M., Rajan, S. D., Nelson, H. D. and Chen, W. J., "Optimal Placement of Critical Speed in Rotor-Bearing Systems," Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 109, pp. 152-157, April 1987.
4. Raffa, F. A. and Vatta, F., "The Dynamic Stiffness Method for Linear Rotor -Bearing System," Transactions of the ASME, Vol. 118, pp. 332-339, 1996.
5. Jho, Y. D., "Complex Modal Testing and Parameter Identification of Rotor-Bearing Systems," KAIST, 1992.
6. Roemer, M. J. and Mook, D. J., "Mass, Stiffness, and Damping Matrix Identification: An Integrated Approach," Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 114, pp. 358-363, 1992.
7. Carsten Schedlinski and Michael Link, "Identification of Rigid Body Properties Using Base Excitation and Measured Interface Forces," ESA Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing, Noordwijk, The Netherlands, 1996.
8. Tiwari, R. and Vyas, N. S., "Non-Linear Bearing

Stiffness Parameter Extraction from Random Response in Flexible Rotor-Bearing Systems," Journal of Sound and Vibration, Vol. 203, pp. 389-408, 1997.

9. Ting, T., "Design Sensitivity Analysis of Structural Frequency Response," AIAA Journal, Vol. 31, No. 10, pp. 1965-1967, 1993.
10. Redmond, I., "Defect Identification in Rotordynamic System," Proceeding of the 15th International Modal Analysis Conference," IMAC, 1997.
11. Lee, C. W., "Vibration Analysis of Rotors," Kluwer Academics publishers, 1993.

$$\{F^u\} = \begin{Bmatrix} F_{x1}^u \\ F_{x2}^u \\ F_{y1}^u \\ F_{y2}^u \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{Bmatrix} U_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ U_2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ U_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ U_2 \sin(\omega t + \phi_2) \end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{F^u}\} = [C_{01}] \{F^u\}$$

### 부 록

최종 방정식의 계수정의

$$\overline{L} = L \cdot T$$

$$\overline{G} = G \cdot T$$

$$L = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_t \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_p \\ 0 & 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{01} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -b_1 & b_2 \\ b_1 & -b_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$