韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2003, 2. 제 42권, 제 1호, 11-18.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Feb. 2003, Vol. 42, No. 1, 11-18.

수학 교육에서 '이해'의 의미와 구조에 대한 고찰

정 인 철 (공주대학교 과학교육연구소)

I. 시작하는 말

학교 수학 수업에서 교사들은 국가에서 인준한 교육과정을 기본으로 하여 나름대로 개발하고 연구한 교수법을 통해 학생들에게 수학적 개념을 가르친다. 때로는 실물을 이용한 수업으로 때로는 그룹 활동으로 그리고 가장 흔한 방법으로 칠판을 주 매개 도구로 하여 학생들의 개념 형성을 돕고 더 나아가서는 실제로 이들 앞에 주어진 문제풀이에 형성된 개념을 효과적으로 적용할 수 있도록 일련의 잘 짜여진 수업지도안을 계획하고 실시한다. 교과서에 제시된 각각의 수학적 개념의 견지에서 보면 위 활동의 반복을 통하여 초·중등학교 수학교육은 이루어진다.

초·중등학교 교육과정에서는 각 학년의 수준에 맞는 엄선된 수학적 개념을 순서에 맞추어 시간이 지나면서 학습자의 개념 형성 여부에 심히 개의치 않고 순차적으로 끊임없이 나타난다. 어떤 개념은 전혀 새로운 것이기도 하고 어떤 개념은 기존의 개념을 확장하거나 아니면 연계성이 있는 형태로 제시되기도 한다. 새로운 것이 되었든 아니면 확장되거나 연계성이 있는 것이든 교사는 학습자가 개념을 올바르게 형성하도록 도와주고 학습자는 나름대로의 노력과 다양한 방법으로 개념의 형성에 노력한다.

이때 교사는 수업 중간 중간에 빼놓지 않고 하는 말이 있다. "자, 모두 이해하겠어요?" 혹은 "혹시 이해가 가지 않는 부분이 있나요?"라는 말을 자주 한다. 교사는 이미 알고 있는 개념인지라 이들에게 전혀 새로운 것이 아니지만 이들은 학생들로 하여금 수학적 개념을 형성하도록 도와주고, 다른 말로 말하면 학습자들이 잘 이해하여 문제를 효과적으로 잘 풀 수 있도록 하는 것이 이들의 가장 큰 목표인 것이다. 이에 학생들은 "네"라고 짧게 답하면서 자신들 스스로가 이해했음을 확인하거나 아니면 "아뇨, 잘 이해가 안가요." 혹은 "저기까지는 이해가 가는데 그 뒤는 잘 이해가 안가요."라고 반응을 한다.

단지 수학뿐만 아니라 우리 생활의 주변에 '이해'라는 말을 사용하는 것을 쉽게 들을 수가 있다. 특히, 수학수업 중 교사와 학생사이에서 일어나는 상호 관계에서 교사는 학생의 이해를 위해 학생들은 새로 소개되는 개념의 형성을 위해 많은 노력을 기울인다. 하지만 우리가 흔히 사용하는 '이해'라는 말의 진정한 의미는 무엇이고 실제로 이것을 사용하는 이들이, 특히 수학교육과 관련하여, 이것의 의미를 이해하면서 '이해'라는 용어를 사용하는지 생각해보고자 한다.

Eisenhart et al.(1993)은 수학교육에서 '이해한다'는 것이 얼마나 중요한 지를 다음과 같이 표현하고 있다: "이해를 목표로 수학을 가르치는 것이 수학 교사교육에서 최우선시 되어야 한다."(p. 8) 또한, NCTM(1989)도 수학교사들이 학생들의 이해를 증진시키는데 더욱 더 많은 관심을 가지고 노력을 기울여야 함을 강조하고 있다. 그리고 NCTM(1991)은 교사가 학교에서 수학이 지도되는 방법을 바꾸는 가장 중요한 열쇠를 가지고 있음을 밝힌 바 있다.

Byers와 Herscovics(1977)는 일찍이 이러한 질문을 제기했다: "수학을 이해한다는 것은 무엇을 의미하는가?"(p. 24) 이들은 이 질문에 대한 답을 직접 제시하기보다는 '이 질문은 보기보다 훨씬 복잡하다'라고만 하여 이 의미를 파악하는 것이 난해함을 밝혔다. 또한, Hiebert(1986)도 단순히 수학을 가르치는 것이 아니라 이해를 목표로 수학을 가르치는 것은 참으로 복잡한 과정이라고 말한다. 더구나 Hiebert와 Carpenter(1992)는

* 2002년 12월 투고, 2003년 2월 심사 완료.
* ZDM분류 : D30
* MSC2000분류 : 97D30
* 주제어 : 이해, 수학 교육, 수학적 연계성, 수학적 의사 소통, 수학적 개념의 이해

"수학교육에서 연구와 이에 병행하는 실행의 목표는 이해를 동반한 학습을 증진시키는 것에 기여해야 한다"라고 주장한다. (p. 65) 이렇게 '수학의 이해'가 중요시되고 있고, 또한 많은 학자들이 '이해'에 대해 정의를 제시하고 있다. 하지만 아직 모든 사람이 동감하고 더 이상 반박할 수 없는 그런 정의는 아직은 없다. '이해'에 대한 우리들의 의미 파악이 쉽지 않지만 이제까지 제시된 정의들이 공통점이 있고 또한 각각의 나름대로 특색이 있다. 본고에서는 이해의 본질과 다양한 이해에 대한 정의를 알아보고 이들이 가지고 있는 서로의 공통점과 특색을 알아보고 '이해'의 의미에 대한 우리들의 이해의 증진을 목표로 한다.

II. 이해에 대한 이론적 배경

1. 이해의 본질

실제로 지금 현직에 있는 여러 수학교사들에게 수업시간 중에 학생들에게 '이해했니?'라는 말을 자주 사용하느냐고 물었을 때 '그건 당연한 것이지 않느냐'는 눈빛으로 "그렇다"라고 답을 했다. 하지만 그 다음 질문에 대해서는 상황이 달랐다: "그럼 선생님께서 자주 사용하시는 '이해한다'는 말의 의미를 구체적으로 설명해주시겠어요?" 한결 같이 조금은 황당해하는 첫 반응을 이들의 얼굴에서 읽을 수 있다. 한 번도 이것에 대한 질문을 받아본 적이 없었고 더구나 '이해한다'는 말의 의미를 되새겨본 적이 없었던 그들은 그런 질문이 그들에게 너무 낯설었고 쉽게 답할 수 있을 것 같으면서도 명료하게 의미를 전달할 수가 없었다. 이들뿐 아니라 우리 대부분 모두가 '이해한다'는 의미를 그저 당연시 여겨온 것이 사실이다. 실제로 이들은 대부분 '이해한다(understand)'는 것의 의미를 '안다(know)'의 의미와 같이 생각했다. 다시 말하면 어떤 특정한 개념에 대해 이해한다는 말은 학생이 그런 개념을 알고 주어진 문제를 풀 수 있다는 것을 의미했다. 반대로 학생이 문제를 풀 수 있다는 얘기는 그 안에 담긴 개념을 알고 있다는 것으로 교사는 받아들이고 있었다.

여기서 우리는 이해가 가지고 있는 속성, 즉 본질을 짚어보고자 한다. 이해에 대한 정의를 위해서는 이해가 가지고 있는 구조와 성분을 좀 더 심도 있게 분석하여 앞으로 전개될 이해의 의미에 대한 우리 스스로의 인지력을 승화시키고자 한다. Brownell과 Sims(1946)는 일찍이 이해에 대한 명쾌한 의미를 정의하기보다는 심리학적인 한 과정으로 그리고 교육학적인 결과물로 '이해'가 가지고 있는 특성을 다음의 여덟 가지로 제시했다. Brownell과 Sims는 '이해란 무엇이다'라고 문서화하지는 않았지만 이해의 의미를 재고해 보고자 하는 기회를 우리에게 제공했다는 데 큰 의미가 있다.

첫째, 학습자는 주어진 상황에 대해 스스로 행동하고 느끼고 지적으로 생각할 때 이해한다고 할 수 있다. 여기서 특히 주어진 상황이라 함은 학습자의 인지구조의 조정을 필요로 하는 상황을 의미한다. 그리고 지적인 반응을 보이기 위해서 학습자는 이 상황에 대한 명쾌한 이해를 필요로 한다.

둘째, 이해는 어떤 것에 대한 모든 것이거나 혹은 아무것도 아님을 의미하기보다는, 즉 양극의 첨예한 대립보다는 명확성과 완벽성에 있어 다양하게 제시된다. 이러한 요소들은 학습자가 겪은 과거의 경험과 기존의 학습자가 구성한 이해와 더불어 다양하게 나타난다.

셋째, 추구되는 이해의 완벽성은 상황에 따라서 그리고 많은 변수와 더불어 주어진 학습 환경에 따라서 다양하게 나타난다. 그래서 학습자가 무엇을 이해해야 하는지 그리고 어느 정도 깊이까지 이해를 성취해야 하는지를 인지하는 것을 의미하며 또한 이는 교육적인 견지에서 아주 중요하다.

넷째, 일반적으로 학습자는 이 세계와 연관되어 있는 기호뿐만 아니라 우리가 현재 살고 있는 세상의 가치 있는 이해를 추구하고 발전시켜야 한다. 기호의 이해는 이 세상의 상황과 절차 그리고 관계를 이해하는데 큰 기여를 하고 필연적이라 할 수 있다.

다섯째, 대부분의 경우 학습자는 이해한 것에 대해 구두로 표현할 수 있어야 하지만 구두에 의한 표현은 의미가 결여되어 있을 수 있다. 일반적으로 학습의 과정에서 상대적으로 뒤에 나타나는 구두로서의 표현은 학습자의 심리적 구조를 읽을 수 있는 수단임과 동시에 의미가 학습자의 마음속에 자리 잡지 않은 상태에서 단순 반복과 암기에 의한 표현일 수가 있다.

여섯째, 이해는 같은 것을 반복함으로 오는 것이 아니라 다양한 경험을 접하고 직접 참여함으로써 발전된

다. 학습자는 반복된 연습을 통해 성장한다는 말이 반드시 이 학습자가 이해를 성취했다고 할 수는 없다. 오히려 반복된 연습을 하는 동안 문제를 해결해 가는 절차에만 관심을 기울여 학습자에게 온전한 이해를 성취하는데 방해가 될 지도 모른다. 학습자가 분석하고 종합하고 비교하고 일반화하기 위해서는 다양한 경험을 필요로 하고, 이러한 경험들은 이해의 성장에 가장 중요한 요소이다.

일곱째, 학습자의 이해는 많은 경우에 있어 교사가 제시하는 다양한 방법으로부터 영향을 받는다. 학습자의 연령, 자라온 배경, 그리고 주어진 상황에 따라 자연스럽게 이해의 범위의 경계가 정해진다. 예를 들어, 도시의 아이가 쌀이 재배되는 과정에 대한 이해는 시골의 아이가 같은 상황을 이해하는 정도의 측면에서 다른 점을 우리는 기대할 수 있다.

여덟째, 학습자의 이해의 종류와 깊이는 학습자가 하는 언행이나 행위를 관찰함으로써 추론될 수 있다. 학습자가 성취한 이해는 이들의 학습과정을 관찰하고 이들이 사용하는 방법들을 분석함으로써 알 수 있다. 원리를 이해했다는 것은 주어진 상황에 대해 타당성과 유용성을 인식하고 적절한 원리의 사용을 인지하는 것이고 과정을 이해했다는 것은 언제 어떻게 효과적으로 사용해야하는지를 아는 것을 의미한다. 학습자가 학교교육에서 성취한 이해는 실제 생활에서 즉, 학교를 벗어난 상황에서 활용될 수 있어야 하는데 이런 것을 늘 성취하는 것은 쉬운 일이 아니다.

2. 이해에 대한 의미의 체계적 분석과 의미 구현의 발전

Schoenfeld(1992)는 '안다(know)'의 의미에 대해 좀더 풀어서 제시하기를 '우리가 안다는 것은 어떤 것이 명쾌하게 진위임을 입증하는 것이다.'라고 했다. 이와 더불어 지식이라 함은 우리가 아는 것들의 총합체라고 했다. 이를 수학적 지식의 면에서 다시 말하면, 사람의 수학적인 지식은 확신을 바탕으로 올바르게 자유자재로 사용할 수 있는 수학적 성질과 절차들의 일련의 모든 것들을 의미한다. 위의 '안다'는 것의 의미는 주로 수학적 내용의 의미를 학습자가 파악하고 그것을 남에게 제시함에 중심을 두고 있다. 반면 '수학을 배운다(learn)'는 것은 일관된 형태로 수학의 몸체를 구성하는 수학적 성질과 절차들의 일련의 것들을 완벽하게 익히는 것을 의미한다. 이러한 '배움'을 향해서는 연관 있는 수학적 내용을 가능한 한 분명하게 기술할 수 있어야 하겠고 이들 내용들을 세세히 분석하여 교수활동 및 학습자가 직접 연습하고 훈련함으로써 이루어질 수 있는 것이다. Schoenfeld는 학생의 '수학적 이해(mathematical understanding)'에 대한 총체를 이 두 가지의 요소, 즉 '안다(know)'와 '배운다(learn)'의 결합으로 보고 있다.

한편, Lampert(1990)는 '수학을 한다 (doing mathematics)'를 교사에 의해 제시된 규칙을 따른다고 정의하고 '수학을 안다 (knowing mathematics)'를 교사가 질문을 했을 때 올바른 규칙을 기억하고 적용하는 것으로 정의를 했으며 수학적 진위는 교사가 그 답에 대해 승인했을 때에만 결정되는 것으로 보고 있다.

Schoenfeld는 '안다'는 것의 의미는 학습자의 입장에서 스스로가 교사의 도움과 안내를 통해 좀 더 적극적으로 구성하고 남에게 그 구성된 지식을 공표함으로써 인정받는 것을 의미하는 반면 Lampert는 학습자의 소극적인 지식의 축적과정의 일부로써 '안다'의 의미를 제시한다. 이런 경우에 학습자는 스스로 지식을 구성할 수 있는 기회가 박탈되고 교사의 일방적인 안내에 의해 지배되고 기계적인 암기와 훈련으로 이들의 지식이 축적되어 간다. 심지어 학습자에게 주어진 문제에 대한 답도 교사에 의해 인정을 받을 때에만 의미 있는 것이기 때문에 학습자의 추론은 진위여부를 확인하기 전에 심리적으로 위축되어 많은 제한을 받게 된다.

많은 학자들이 '이해'에 대한 관심이 늘 있어 왔지만 이해에 대한 분석과 정의에 대해 특히 관심을 갖고 실제로 문서화된 정의를 내리기 시작한 것은 1970년대 후반 이후였다. 1980년대에 들어와서 문제풀이(problem solving)에 대한 관심이 증폭되면서 많은 이들은 수학적 이해에 대한 지대한 관심이 특별히 집중되었다. 이후에 수학 교사교육의 관심 증대, 각종 테크놀러지의 발전 및 구성주의의 수학교육분야로 진출은 이의 필요성을 더욱 절실하게 요구하였다. 이에 대한 시발점으로서 Richard Skemp(1978)는 Stieg Mellin-Olsen에 의해 제시된 이해에 대한 두 가지 용어-관계적 이해와 도구적 이해-에 지대한 관심을 표명하고 '이해'의 의미를 체계적으로 분석하여 좀 더 우리가 학습자에게서 나타나고 있는 이해

를 자세히 분석할 수 있게 되었고 이론적으로 이해의 의미를 분석할 수 있는 토대를 마련하였다.

Skemp자신도 이전에는 이해라 함은 소위 관계적 이해만을 이해로 간주해 왔다. 그리하여 이 후로 관계적 이해가 설명할 수 없는 부분을 도구적 이해가 담당하여 학습자들의 반응을 분석할 수 있게 되어 또 다른 각도에서의 과학적이고 체계적인 분석을 할 수 있게 되었다. 실제로 Skemp도 이 당시는 관계적 이해와 도구적 이해에 대한 정의를 제시하기보다는 이들이 갖는 특색과 장단점을 열거하여 방향을 제시하는 정도였다. 이 글이 발표된 이후 Byers와 Herscovics (1977)는 Skemp의 과감하고도 획기적인 이해에 대한 초석을 치하하면서 약간의 수정과 보완을 하여 수학적 이해를 도구적 이해, 관계적 이해, 직관적 이해, 그리고 형식적 이해의 네 가지로 구성하여 제시했는데, 이들 각각의 의미는 다음과 같다(p. 26):

도구적 이해는 왜 그런 규칙을 사용해야하는지는 잘 알지 못하고 제시된 문제의 풀이에 적절한 규칙을 사용할 수 있는 능력이다.

관계적 이해는 좀 더 일반적인 수학적 관계로부터 구체적인 규칙과 절차들을 연역해 내는 능력이다.

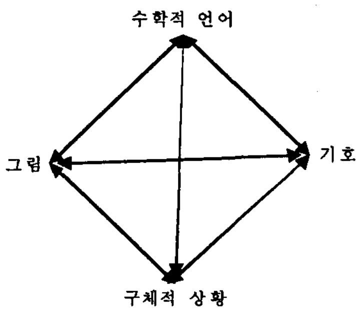
직관적 이해는 주어진 문제에 대해 사전의 분석 없이 곧바로 풀이하는 능력이다.

형식적 이해는 서로 관련 있는 수학적 상징과 기호를 연결하여 논리적 추론에 맞게 결합하는 능력이다.

그리고 바로 이어서 Haylock(1982)은 '이해한다'는 것은 바로 '인지적인 연계성을 구성하는 것으로 본다'고 이해의 정의를 제시했다. 이해의 정도와 유용성은 학습자가 새로운 경험과 선행된 경험 사이에서 구성하는 이해의 정도가 많으면 많을수록 더 크고 특히 새로운 경험이 선행된 연결되지 않은 경험을 연결하는데 역할을 할 수가 있는데 실제로 이런 경우가 발생하게 되면 학습자는 이해에 있어 약진하여 좀 더 세련되고 깊은 정도의 이해를 성취할 수 있게 된다. 한편, 새로운 경험이 이미 선행된 경험과 연결을 짓는데 실패를 하는 경우도 있다. 이렇게 되면 새로운 경험은 홀로 고립되어 학습자의 지식에 한 자리를 차지하게 되고 결국 제한적으로 적절한 상황에 역할을 하지만 오래 지속되지 못하고 학습자의 머릿속에서 소실되는 그런 운명에 처한다. Haylock은 이러한 상황을 '기계식 학습(rote learning)'이라고 하였다. 이는 Skemp의 도구적 이해와 부분적으로 일맥상통하는 개념의 학습이기도 하다.

여기서 이해란 '서로 연계성을 구성하는 것이다'라고 한다면 과연 학습자가 연계성을 구성했는지를 교사가 인식할 수 있어야 효과적인 수업을 진행할 수가 있다. 이를 위해 Haylock(1982)은 학습자의 이해를 인식하기 위한 한 방법으로 다음 네 가지 요소를 그림과 예제를 통해 제시한다: 수학적 언어 (Mathematical language), 그림(Pictures), 구체적인 상황(Concrete situations), 그리고 기호(Symbols). 이들 네 요소는 서로 유기적으로 연결되어 있어 학습자가 구성하는 이해의 정도를 교사로 하여금 인식하도록 하며 교사는 이를 바탕으로 학생들의 필요한 부분을 지도하며 난이도 또한 적절하게 조절할 수 있게 된다(<그림 1> 참조, Haylock, 1982, p. 55)

예를 들어, '사십만 칠십 삼을 그림으로 표현하시오'라는 문제는 '수학적 언어 → 기호'에 대한 그리고 '84 ÷ 28에 알맞은 이야기를 쓰시오.'라는 문제는 '기호 → 구체적 상황'에 대한 학습자의 연계성을 평가하는 각각의 문항이라 할 수 있다(p. 55).



<그림 1> 이해의 연계성에 관한 네 가지 요소

결국 Skemp(1987)도 Byers와 Herscovics에 의해 주어진 이해에 대한 조직적인 분석에 대해 동의하면서 자신이 이미 제시한 이해에 약간의 수정을 가하여 도구적 이해, 관계적 이해, 형식적(논리적) 이해의 세 가지 종류의 이해를 제시했다. 특히, 나중에 다시 그는 '상징적 이해'를 추가하여 제시하는데 이것은 기호 체계와 개념적 구조 사이에서 일어나는 상호 동화작용이라고 하였다. 일반적으로 '기호'는 수학을 학습함에 있어 훌륭한 도구로서 역할을 잘 하고는 있지만 이 기호 자체만으로는 이

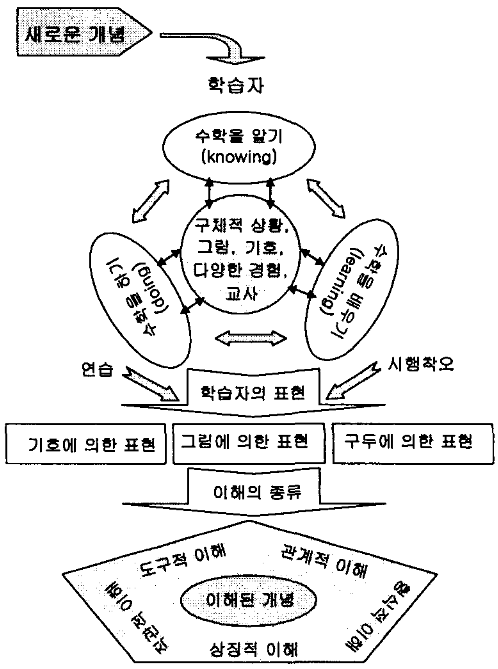
것이 무엇을 하고 있는지 알 수가 없기 때문에 학생이 그 기호를 제대로 이해하여 사용하고 있는 지 판단할 수 없다.

한편 Wiggins(1993)는 이해를 정의하기를 "특별한 혹은 다양한 상황에서 학습자가 지식을 지혜롭게, 능수 능란하게, 유연성 있게 그리고 적절하게 이용하는 능력"(p. 207)이라고 하였다. 이는 이해의 의미를 분석하기 보다는 우리 앞에 제시된 상황에 대해 수학적 내용을 중심으로 이를 이용하여 문제를 해결하는데 중점을 두고 표현하고 있다.

Ⅲ. 이해에 대한 공통성 탐구

학습자가 새로 접하는 수학적 개념은 이미 이해하고 있는 그런 지식의 연장일 수도 있고 기존의 이해된 개념과 통합하여 적어도 이들의 조절을 통하여 이해의 성취가 이루어질 수도 있고 아니면 초기단계부터 새로운 개념 형성을 위한 노력과 에너지를 필요로 할 수도 있다. 위에 제시된 각종 이해의 정의와 이와 관련된 학자들의 주장을 종합해 보면 대부분의 경우 학교 교육에서와 같이 공식적인 교육 기관을 통해서 학습자는 교사의 지도 하에 새로운 개념의 구조를 파악하게 되고 수학을 직접 하고(do mathematics), 배우는(learn) 과정을 통해 수학을 알게(know mathematics)되어 다양한 방법으로 학습자는 기호의 형태로(symbolic representation), 그림의 형태로(pictorial representation), 그리고 구두의 형태로(verbal representation) 그들의 이해를 표현한다(Jung, 2002). 때로는 논리적으로 설명할 수 없는 학습자의 직관에 의한 이해를 성취하는 경우도 있지만 대부분의 경우 학습자는 다양한 경험과 시행착오를 통해 개념을 익히게 된다. 하지만 학습자가 새로운 개념을 단순히 이해했다고 해서 안정된 단계의 것은 아니고 이해된 개념이 필요한 경우엔 언제든지 활용될 수 있도록 이미 구성된 이해의 구조 안에 자리를 차지하고 있으면서 다양한 경험을 통해 서로 연계를 맺음으로서 적절한 때에 지혜로운 방법으로 활용될 준비를 갖추게 되는 검증 과정을 거친 후에라야 된다. 비로소 새로운 개념은 익힘의 단계를 벗어나 직접 사용하게 되고 그리하여 결국은 전반적인 수학적 이해에 도약의 발판을 마련하게 되는 것이다.

다음의 <그림 2>는 새로운 개념을 학습자가 이해하는 과정을 나타내 본 것으로서, 학습자는 처음 접하는 개념을 구체적 상황, 그림, 기호, 다양한 경험, 및 교사의 지도를 통해 수학을 배우고(learn) 알고(know) 또 직접 한다(do). 이러한 과정을 겪는 동안 학습자는 많은 연습과 더불어 자신이 기대하지 않았던 시행착오를 거쳐 그들 자신이 원하는 방식으로 이해된 개념을 표현하는데 이는 기호에 의한 표현, 그림에 의한 표현, 그리고 구두에 의한 표현의 세 가지로 분류된다. 여기서 기호는 수학적인 기호를 의미하고 그림은 그래프, 테이블, 도형 등을 의미하고, 구두에 의한 표현은 단순 암기된 지식을 구두로 표현함을 의미하는 것이 아니라 이해된 개념을 자신의 언어로 구사함을 의미한다. 이런 일련의 과정을 거쳐 학습자는 이해된 개념을 다섯 가지의 다양한 형태로 학습자의 기존의 지식의 구조와 연결되어 자리 잡게 되고 필요할 때마다 적절한 시기에 문제해결에 사용한다.



<그림 2> 학습자의 수학적 개념 이해의 과정

이와 같이 새로운 개념은 학습자가 이미 구성한 기존

의 이해 조직과 어떤 연계성을 이루면서 그 힘이 필요할 때 올바른 방법으로 적용되는데 새로운 개념의 종류를 학습자가 이해된 개념으로까지 성취하는데 있어 그 특징에 따라 다음 세 가지로 나눈다.

첫째, *단순 확장형*. 학습자가 경험하는 새로운 개념을 사고의 과정에서 특별한 장애물이 없이 이미 형성된 개념의 일부로 편입되거나, 혹은 이미 학습자 안에 구성된 구조를 약간 변화하여 흡수되고 정착되는 개념을 일컫는다. 이 과정에서 학습자는 자신이 이미 형성하고 있던 개념을 새로이 맞이하는 개념을 통해 더욱 공고히 하는 계기가 되고 이 새로운 개념은 기존의 개념과 곧바로 조화를 이루게 되며 필요할 때면 언제든 활용될 수 있는 준비단계에 바로 들어가게 된다. 예를 들어, '$y=x^2+2x-5$'에 대하여 이것을 그래프로 그릴 수 있고 최소값의 의미를 알고 정확히 구할 수 있는 학습자는 '$y=-x^2+4x+9$'의 그래프는 물론 최대값의 의미를 쉽게 이해하고 찾을 수 있음을 의미한다. 또한, 더 나아가 이런 종류의 다양하고 반복된 경험을 통해 최고차항의 계수가 양수이면 최소값을 그리고 음수이면 최대값을 갖는다는 일반적인 성질을 스스로 발견할 수 있다.

둘째, *상호 조절형*. 이러한 형태는 이미 학습자가 형성하고 있는 개념의 체계의 변동을 의미하며 학습자는 기존의 개념과 새로운 개념의 차이를 인식하게 되고 곧바로 학습자는 문제풀이에 적용하지 못하거나 하더라도 불안함을 느낀다. 대신 시행착오와 연습을 통하여 기존의 개념 체계와 타협을 거쳐 결국은 기존의 개념체계와 상호 보완을 통하여 학습자의 개념 체계 속으로 안착한다. 이러한 과정을 겪으면서 학습자는 자신이 구축한 개념과 새로 접하는 개념의 특징 및 사용 용도를 정확히 인지한다. 이런 과정은 학습자에게 기존의 구축된 개념의 새로운 면을 인식하는 계기를 제공하고 더욱 더 세련되고 다양한 각도로 기존의 개념과 새로운 개념을 보충 및 조화를 추구하는 새로운 경험을 한다. 그리하여 수학적 내용의 다양성뿐만 아니라 새로이 확장되고 깊이 있는 인지구조의 기반을 마련한다. 단, 새로운 개념을 정착시키는 과정에서의 실패는 새로운 개념의 정립을 기대하기는 어려울 뿐만 아니라 이미 기존의 개념도 그 기반이 약화되어 학습자로 하여금 자신감을 잃게 할 수도 있다. 예를 들어, 이원일차연립방정식, '$2x+3y=4$'와 '$-x+4y=7$'의 근을 찾는데 있어 대수적으로 답을 찾지 않고 행렬을 이용하여, 즉, 역행렬을 이용하여, 해결하는 상황이 이에 해당한다. 같은 문제에 대해 전혀 다른 방법으로의 문제 풀이는 학습자의 호기심을 자극하고 신비함을 경험할 수도 있겠지만 자신이 선호하는 방법만을 고집하여 오히려 생각의 폭을 넓히는데 장애가 될 수 있고 만일 개념 형성에 실패하면 학습자는 적지 않은 혼란에 빠질 수도 있다. 결론적으로 이미 정착된 개념의 구조를 변형 확장하는 것은 학습자에게 새로운 도전이 될 수 있다.

셋째, *기반 구축형*. 이는 학습자가 이미 구성한 개념과 전혀 별개의 개념 형성을 의미하거나 아니면 관련이 있다 하더라도 그 정도가 극히 미약한 새로운 개념의 형성을 의미한다. 학습자에게 새로운 개념의 형성은 이제까지 경험한 것과는 새로운 도전을 의미하며, 특히 학습자는 처음 접하는 개념을 정복해야하는 부담을 가지게 되고 이제까지 그가 학습한 방식을 채택하거나 새로운 방법으로 그 개념이 잘 형성될 수 있도록 하는, 즉 모든 것을 새로 시작하는 것과 같은 그런 상황에서 개념 형성을 시도한다. 성공하면 기존의 형성된 개념 구조에 새로운 영역을 추가하여 개념의 형성 구도가 더욱 넓어지고 이에 연결된 작은 규모의 개념을 받아들일 준비가 되어 학습자는 진일보하는 개념의 구축을 하는 계기가 된다. 하지만 실패하게 되면 학습자는 심리적 고통과 부담을 안게 되어 정신적 충격을 받을 수도 있다. 힘들고 어려운 개념에 대한 기피 현상과 자신의 능력을 최대한 발휘하는데 큰 장애가 될 수 있다. 예를 들어, 수열과 각종 함수를 배운 학생이라 할지라도 극한의 개념은 학습자에게 기존의 구도에 과감한 도전장을 던진다. 이 개념의 성공은 앞으로 계속 배우는 미분과 적분의 이해에 대한 초석을 마련해주지만 실패는 이에 대한 부담을 과중시킬 수가 있다. 하지만 유한의 세계에서 무한의 세계로의 연장선상에서 보면 전혀 관계가 없는 것은 아니다. 단지 학습자가 기존의 개념 구조를 몇 계단 상승할 정도의 변화를 잘 처리하여 구축해야 하는 것이다.

학습자가 새로운 개념을 자신의 것으로 만드는 데는 지적 및 정신적 노력을 필요로 한다. 교사의 안내로 시작한 새로운 개념의 세계는 학습자에게 새로운 경험을 제공하는 동시에 연습을 요구하며 시행착오의 과정을 거쳐 새로운 개념의 형성을 추구한다. 이리하여 쌓은 개념은 나름대로의 통합적인 네트워크를 형성하여 결국은 가

장 효과적으로 적절한 개념을 적용하여 학습자에게 주어진 문제를 가장 경제적이고 효과적인 방법으로의 해결을 유도한다.

IV. 맺는말

1980년대에 들어서면서 수학교육에서 문제풀이에 대한 관심이 증폭되고 특히, 다양한 테크놀러지의 도입과 더불어 많은 사람들은 학습자의 이해의 성장을 기대해왔다. 실제로 이해를 위한 수학교육을 근간으로 하여 교사중심보다는 학습자 중심으로의(Hannafin, Hill, & Land, 1997) 연구가 활발히 진행되고 있다. 실제로 현재 '수준별 교육과정'이라는 별칭을 가진 제7차 교육과정은(교육부, 1997) 특히, 수학에 대한 학생들 개개인의 능력을 고려하여 이에 알맞은 교육을 추구하는 것이 이 교육과정의 가장 기본 중 하나이다. 대중교육 안에서도 개개인의 학습 효과를 최대로 하기 위한, 다시 말하면 학습자 개개인이 수학적 개념을 정확히 이해하고 실제로 문제 풀이에 활용할 수 있는 능력을 키울 것을 염두에 둔 것이다. 이를 위해 과감하게 과목의 선택은 물론 이수 과정에 대해서 어느 정도 자율성을 부여한 것은 과거의 집단대중 교육과는 다른 면모를 우리에게 보여주고 있다. 이와 더불어 학생이 직접 참여하는 학습활동의 증가는 눈에 띄는 가장 큰 변화의 시도 중 하나라고 할 수 있다. 이러한 시대의 변화 속에 있으면서 우리가 흔히들 말하는 '이해'의 의미를 고찰하고 학습자가 성취하는 이해는 무엇이며 그들이 성취했다는 이해를 분석하여 이해의 성장에 도움을 주기 위한 연구는 꼭 필요하다 할 수 있다. 학교 교육이 학습자의 수학적 개념에 대한 이해의 성장을 유도하기 문제유형도 바뀌어 왔고 과감한 재정지원을 통해 각종 미디어를 이용한 수학교육 등이 대두되었다. 참된 수학교육의 실현을 위해서 잘 준비된 교사가 학습자를 잘 아는 것은 필수적이라 할 수 있다. 학습자를 안다는 것은 다른 말로 하면 이들의 필요한 부분 혹은 격려해야 할 사항을 잘 안다는 것을 의미한다. 이를 위해 이해에 대한 의미의 분석은 학습자와 교사가 하나가 되고 올바른 방향으로의 수학교육을 기대할 수 있게 해 준다. 앞으로 이해에 관한 연구가 더욱 많이 진행되어 이해의 본질을 알고 이에 필요한 대처 방안을 강구하여 수학의 교육의 장에 새로운 전기를 마련하기를 바란다.

참 고 문 헌

교육부 (1997). 제 7차 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서 주식회사.

Brownell, W.A. & Sims, V.M. (1946). The nature of understanding. In N. B. Henry (Ed.), *The forty-fifth yearbook of the National Society for the Study of Education. Part I: The Measurement of Understanding* pp.27-43, Chicago: The National Society for the Study of Education.

Byers, V. & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics, *Mathematics Teaching* 81, pp.24-27.

Eisenhart, M.A.; Borko, H.; Underhill, R.G.; Brown, C. A.; Jones, D. & Agard, P.C. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding, *Journal for Research in Mathematics Education* **24**, pp.8-40.

Hannafin, M.J.; Hill, J. & Land, S. (1997). Student-centered learning and interactive multimedia: Status, issues, and implications. *Contemporary Education* **68**(2), pp.94-99.

Haylock, D.W. (1982). Understanding in mathematics: Making connections. *Mathematics Teaching* **98**, pp.54-56.

Hiebert, J .(1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* pp.65-97, New York: Macmillan.

Jung, I. (2002). *Student representation and understanding of geometric transformations with technology experience*. Unpublished Doctoral dissertation.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal 27*, pp.29-63.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* pp.334-370, New York: Macmillan.

Skemp, R.R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher* 26, pp.9-15.

Skemp, R.R. (1987). *Psychology of learning mathematics*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wiggins, G.P. (1993). *Assessing students performance: Exploring the purpose and limits of testing*, San Francisco: Jossey-Bass.

Meaning and Structure of Understanding in Mathematics Education

Jung, Inchul

Institute of Science Education, Kongju National University, 182 Shinkwan-dong Kongju,
Chungnam-do, Seoul, Korea, 314-701
E-mail : ijung@kongju.ac.kr

One of the terms that are most often used in mathematics classrooms by either teachers or students might be about 'understanding' of mathematical concepts. Although 'understanding' in mathematics teaching and learning has been highly emphasized by many people, there is no exact and undebatable definition of 'understanding' as of yet. This paper tries to contribute to unfolding the meaning and the structure of understanding in mathematics education along with various literature and finally enhance our understanding of 'understanding' in mathematics education.

* ZDM classification : D30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D30
* key word : Understanding, Mathematics Education, Mathematical Connection, Mathematical Communication, Understanding mathematical concepts