

하이브리드 트레프츠 평판 요소의 변분 수식화와 성능 평가

추연석* · 이병채†

(2002년 8월 10일 접수, 2002년 12월 23일 심사완료)

Variational Formulation of Hybrid-Trefftz Plate Elements and Evaluation of Their Static Performance

Yeon Seok Choo and Byung Chai Lee

Key Words : Hybrid-Trefftz Element(하이브리드 트레프츠 요소), Plate Element(평판요소), Flat Shell Element(평면 셸 요소)

Abstract

Hybrid-Trefftz plate bending elements are known to be robust and free of shear locking in the thin limit because of internal displacements fields and linked boundary displacements. Also, their finite element approximation is very simple regardless to boundary shape since all element matrices can be calculated using only boundary integrals. In this study, new hybrid-Trefftz variational formulation based on the total potential energy principle of internal displacements and displacement consistency conditions at the boundary is derived. And flat shell elements are derived by combining hybrid-Trefftz bending stiffness and plane stress stiffness with drilling dofs.

1. 서론

하이브리드 트레프츠 방법은 유한 요소 수식화에서 내부 변위와 경계 변위를 독립적으로 근사하는 방법이다.^(1,2) 내부 변위의 형상 함수로는 평판 이론의 지배 방정식을 만족하는 함수를 사용하고 경계 변위는 절점 변위를 독립 변수로 하는 일반적인 형상 함수를 사용한다. 위와 같은 두 가지 독립적인 변위를 사용함으로써 변분 원리를 간결하게 하고 적분 과정을 경계에서만 수행하도록 하는 장점을 가진다. 또한 지배 방정식을 만족하는 내부해를 사용함으로써 변위 정확성을 높이고 경계에서의 선 적분과 내부 변위해의 결합으로 요소당 왜곡에도 강건한 특성을 보인다. 하이브리드 트레프츠 방법은 내부 변위가 평판 이론의 지배 방정식을 만족시키도록 근사 되기 때문에 특이해에 대한 선택적인 하중조건 적용이 가능해진다.

Jirousek 은 분포 하중이 가해지는 평판 요소에서 특이해를 이용하여 하중 조건을 근사한 경우에 성능이 우수함을 입증하였다.⁽⁶⁾ 또한 최종적인 선형 연립식에서는 절점 변위를 독립 변수로 하기 때문에 다른 유한 요소 프로그램과 유연하게 결합될 수 있고 경계에서만 적분이 행해지기 때문에 요소 개발에서 경계 변위의 수식화는 요소의 형상과는 무관하게 같은 방법을 이용할 수 있다.

본 논문에서는 내부 변위장의 전 포텐셜 에너지 범함수에 내부 변위장과 경계 변위장의 일치 조건을 결합하는 변분 원리를 이용하여 하이브리드 트레프츠 평판 요소의 수식화를 유도하고, 하이브리드 트레프츠 평판 요소를 적용한 평면 셸 요소를 구성하고 성능을 평가한다.

2. 하이브리드 트레프츠 변분 수식화

2.1 변분 수식화

하이브리드 트레프츠 방법은 내부에서의 변위장과 경계에서 변위장을 독립적으로 근사한다. 요소의 내부에서는 지배 방정식을 만족하는 함수들을

* 한국과학기술원 기계공학과

† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : bclee@mail.kaist.ac.kr

TEL : (042)869-3031 FAX : (042)869-3095

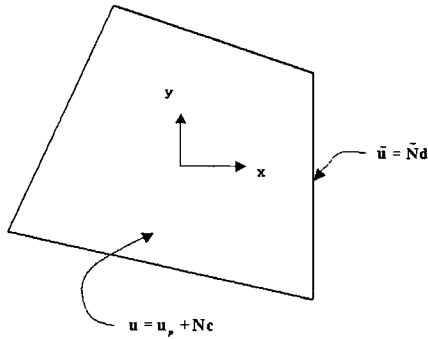


Fig. 1 Hybrid Trefftz displacements fields

이용한 변위장으로 근사하고, 경계에서는 요소 사이의 연속성을 고려해서 절점 변위를 독립 변수로 하는 일반적인 유한 요소의 형상 함수를 이용한 변위장으로 근사한다. 그리고 각각 독립적으로 근사된 내부 변위장과 경계 변위장은 하이브리드 트레프츠 범함수의 변분 원리를 이용하여 두 변위 사이의 관계를 만들고, 경계에서의 변위장, 즉 절점 변위가 미지 변수가 되는 선형 연립식을 구성하게 된다. 다음 과정에서 하이브리드 트레프츠 변분 원리를 유도한다.

다음 변분 수식화 과정에서 내부 변위장을 u , 경계 변위장을 \tilde{u} 로 정의한다(Fig. 1). 내부 변위장은 지배 방정식을 만족하는 함수들로 구성되어 있다. 또한 변형률 정의식, 변형률에 의한 응력식이 미리 정의되어 있다. 이 세 가지를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + f = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^u = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3}$$

여기서 σ_{ij} 는 응력, ε_{ij} 는 변형률, ε_{ij}^u 는 변위에 의한 변형률, $W = W(\varepsilon_{ij})$ 는 변형률 에너지 밀도 함수를 나타낸다. 그리고 경계 변위장은 절점 변위를 독립 변수로 갖는 일반적인 유한 요소의 변위장인데, 절점 변위 근사에 의해서 요소와 요소 사이의 변위 연속성을 만족한다.

따라서 실제로 전 포텐셜 범함수에서 추가적으로 만족시켜야 하는 조건은 내부 변위의 경계값과 같은 위치에서 경계 변위의 동일성이다. 이 추가

조건을 라그랑지안 승수를 이용하여 하이브리드 트레프츠 범함수를 구성하게 되면 범함수는 다음의 식 (4)와 같다.

$$J(u, \tilde{u}) = \int_{\Omega} \{W + \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^u - \varepsilon_{ij}) - f_i u_i\} d\Omega - \int_{\Gamma_c} t_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \hat{t}_i u_i d\Gamma \tag{4}$$

이미 정의된 변형률 정의식 (3)과 변분을 적용하게 되면 식(4)의 변분식의 최종적인 형태는 다음과 같이 된다.

$$\delta J(u, \tilde{u}) = - \int_{\Gamma_c} \delta t_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma - \int_{\Gamma_c} t_i \delta \tilde{u}_i d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \hat{t}_i \delta \tilde{u}_i d\Gamma \tag{5}$$

여기서 δ 는 해당 변수의 일차 변분량을 나타낸다. 최종적인 범함수식 (5)에서 독립 변수인 u, \tilde{u} 의 변분량 $\delta u, \delta \tilde{u}$ 에 대한 식을 각각 쓰면 식 (6)이 된다.

$$\int_{\Gamma_c} \delta t_i (u_i - \tilde{u}_i) d\Gamma = 0 \tag{6}$$

$$\int_{\Gamma_c} t_i \delta \tilde{u}_i d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \hat{t}_i \delta \tilde{u}_i d\Gamma = 0$$

첫 번째 식은 요소 경계에서 u 와 \tilde{u} 가 동일함을 의미하고, 즉 경계에서의 변위 일치 조건을 만족한다는 것이며, 두 번째 식은 경계에서 트랙션 경계 조건을 만족한다는 것이다.

2.2 유한 요소 근사

2.1 절에서 변분 원리에 의해서 얻어진 식 (6)에 유한 행렬식으로 근사한 두 개의 독립적인 변위장을 바탕으로 유한 요소 근사를 적용한다. 내부 변위장은 지배 방정식을 만족하는 함수들의 행렬을 이용하고, 경계 변위장은 일반적인 형상 함수 행렬을 이용하여 근사한다.

내부 변위장과 경계 변위장은 다음과 같이 표현한다.

(a) 내부 변위장(Fig. 1):

$$\{u\} = \{u_p\} + \sum_{j=1}^m \{N_j\} c_j = \{u_p\} + [N] \{c\} \tag{7}$$

내부 변위장의 경우, 지배 방정식을 만족하는 균일해(homogeneous solution)와 특이해로 구분한다.

여기서 $[N]$ 은 지배 방정식을 만족하는 균일해들의 행렬을 나타내고, $\{c\}$ 는 미지 계수를 나타낸다. 그리고 $\{u_p\}$ 는 지배 방정식을 만족하는 특이해 행렬이다.

(b) 경계 변위장(Fig. 1)

$$\{\tilde{u}\} = [\tilde{N}]\{d\} \quad (8)$$

경계 변위장의 경우 절점 변위를 독립 변수로 갖는 일반적인 유한 요소법과 같다. 본 논문에서는 경계를 선형 선 요소로 근사한다. 따라서 $[\tilde{N}]$ 은 선형 선 요소의 형상 함수 행렬, $\{d\}$ 는 절점 변위 벡터를 나타낸다.

그리고 (7)에 의해 정의된 내부 변위장들로부터 변형률 $\{\epsilon\}$, 응력 $\{\sigma\}$, 그리고 경계에서의 트랙션 $\{t\}$ 도 마찬가지로 (9)과 같은 행렬식으로 표현할 수 있다. 2.1 절의 변분 수식화 과정에서 알 수 있듯이 하이브리드 트레프츠 변분 원리에서는 경계 변위에 의한 변형률, 응력, 트랙션은 사용되지 않기 때문에 정의하지 않아도 된다. 지배 방정식의 균일해와 특이해, 미분 연산자, 방향 코사인 행렬을 이용하여 내부 변위에 의한 변형률, 응력, 트랙션을 정의하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \{\epsilon_p\} + [B]\{c\}, \quad \{\epsilon_p\} = [L]\{u_p\} \\ [B] &= [L][N] \\ \{\sigma\} &= [D]\{\epsilon\} = [D](\{\epsilon_p\} + [B]\{c\}) \\ \{t\} &= [A]\{\sigma\} = \{t_p\} + [T]\{c\} \\ \{t_p\} &= [A][D]\{\epsilon_p\}, \quad [T] = [A][D][B] \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 $[L]$ 은 변위로부터 변형률을 구하는 미분 연산자, $[D]$ 는 탄성 계수 행렬, $[A]$ 는 경계에서의 방향 여현 행렬을 의미한다.

행렬식으로 정의된 내부 변위, 내부 변위에 의한 변형률, 응력과 경계 변위의 행렬식을 식 (6)에 대입하고 독립 변수의 변분량 $\delta\{c\}$, $\delta\{d\}$ 에 대해서 정리하면 아래의 식이 된다.

$$\delta\{c\} \left(\int_{r'} [T]^T \{u_p\} d\Gamma + \left(\int_{r'} [T]^T [N] d\Gamma \right) \{c\} - \left(\int_{r'} [T]^T [\tilde{N}] d\Gamma \right) \{d\} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\delta\{d\} \left(\int_{r'} [N]^T \{t_p\} d\Gamma + \left(\int_{r'} [N]^T [T] d\Gamma \right) \{c\} - \int_{r'} [N]^T \{\hat{t}\} d\Gamma \right) = 0 \quad (11)$$

변분량 $\delta\{c\}$ 에 대한 식에서는 내부 변위장의 독립 변수 $\{c\}$ 와 절점 변위 $\{d\}$ 의 관계를 나타내는 다음의 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \{c\} &= -[H]^{-1}\{h\} + [H]^{-1}[G]^T\{d\} \\ [H] &= \int_{r'} [T]^T [N] d\Gamma, \quad \{h\} = \int_{r'} [T]^T \{u_p\} d\Gamma \\ [G] &= \int_{r'} [T]^T [\tilde{N}] d\Gamma \end{aligned} \quad (12)$$

그리고 $\delta\{d\}$ 에 관한 식 (11)에서는 독립 변수 $\{c\}$ 에 대한 선형 연립식이 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} [G]^T\{c\} + \{g\} &= 0 \\ \{g\} &= \int_{r'} [N]^T \{t_p\} d\Gamma - \int_{r'} [N]^T \{\hat{t}\} d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

지금까지의 수식화 과정에 의해서 내부 변위에 대한 선형 연립식이 구해졌다. 하지만 절점 변위를 독립 변수로 하는 일반적인 유한 요소 모델이나 프로그램과 원활한 결합을 위해서 내부 변위장의 미지 변수에 대한 식을 절점 변위를 독립 변수로 하는 식으로 구성하는 것이 좋다. 따라서 식 (12)에서 얻어진 내부 변위장과 경계 변위장 관계식을 식 (13)에 대입하면 최종적으로 다음과 같이 절점 변위를 독립 변수로 하는 일반적인 변위-하중 관계식이 얻어진다.

$$[G]^T [H]^{-1} [G] \{d\} = \{r\} - \{g\} + [G]^T [H]^{-1} \{h\} \quad (14)$$

식 (14)를 정리하면 식 (15)와 같이 간단하게 쓸 수 있다. (15)의 형태에서 알 수 있듯이 최종적인 형태는 절점 변위를 독립 변수로 하는 일반적인 유한 요소의 변위 - 하중 식과 같다.

$$\begin{aligned} [K]\{d\} &= \{f\} \\ [K] &= [G]^T [H]^{-1} [G] \\ \{f\} &= \{r\} - \{g\} + [G]^T [H]^{-1} \{h\} \end{aligned} \quad (15)$$

3. 평판 요소 수식화

3.1 내부 변위장

내부 변위장은 Reissner-Mindlin 평판 이론을 기본으로 한다. Reissner-Mindlin 평판 이론은 변형 전에 중립면에 수직인 벡터는 변형 후에도 중립면에 반드시 수직일 필요는 없지만 직선을 이론다는 가정을 바탕으로 한다.^(13,14) 따라서 내부 변위장을 구성하는 기저 함수들은 Reissner-Mindlin 가정에 의한 평판 지배 방정식으로부터 구하게 되는데, 본 논문에서는 균일해와 특이해 모두 Jirousek 과 Petrolito 가 제안한 기저 함수들을 사용한다.^(4,5)

3.2 경계 변위장

2 절의 변분 수식화에 의해서 하이브리드 트레프츠 요소의 적분 과정은 모두 경계에서만 행해진다는 것을 알 수 있었다. 따라서 경계 변위의 근사는 요소의 형상과 절점 수에 상관없이 경계의 변에서 선 요소로 근사하면 된다.

일반적인 평판 요소에서는 수직 변위와 회전 변위를 각각 독립적인 변위로 보기 때문에 동일한 형상 함수를 사용하였다. 하지만 전단 구속 현상을 피하기 위해서는 수직 변위와 회전 변위의 적절한 관계식을 정의해 주어야 한다. 따라서, 본 연구에서도 Zienkiewicz 가 제안한 관계 변위를 사용하였다.^(9,10) Zienkiewicz 의 관계 변위를 선 요소에 적용하면 아래와 같은 관계식이 구해진다. 따라서, 아래의 식으로부터 경계 변위장의 행렬식을 구성할 수 있다.

$$\bar{w} = \sum_{j=1}^2 \bar{N}_j \bar{w}_j + \frac{1}{8} \bar{N}_{12} [(\bar{\Theta}_{x_2} - \bar{\Theta}_{x_1}) \Delta x_{21} + (\bar{\Theta}_{y_2} - \bar{\Theta}_{y_1}) \Delta y_{21}] \quad (16)$$

$$\Delta x_{21} = x_2 - x_1, \Delta y_{21} = y_2 - y_1$$

위와 같이 경계 변위장을 선 요소로 근사함으로써 요소의 형상에 상관없이 동일한 과정을 통해서 수식화 할 수 있다. 즉, 사각형 요소와 삼각형 요소는 내부 변위장의 구성 함수의 개수와 조립 과정에서 차이가 있을 뿐 동일한 방법으로 수식화 된다.

3.3 평면 셀 요소

공학해석에서 3 차원 셀 구조물을 해석하는 것은 중요한 문제이다. 이런 3 차원 셀을 근사하는 방법의 하나로 평면 셀 요소를 생각할 수 있다.

평면 셀 요소란 곡률이 없는 평면을 가정하고 평면 응력 요소와 평판 요소를 서로 구속됨 없이 조합하여 쓰는 요소를 말한다. 평면 응력 요소와 평판 요소가 독립적이기 때문에 각각의 영역에서 여러 요소들을 자유롭게 이용할 수 있는 장점이 있다. 또한 3 차원 셀 요소라고 하더라도 현재까지는 모든 문제를 정확하게 근사하는 요소가 없기 때문에, 평면 셀 요소가 구성이 간단하고 비교적 정확하다는 것도 장점이다. 본 논문에서도 평판 영역을 하이브리드 트레프츠 평판 요소를 이용해서 근사하는 평면 셀 요소를 구성한다. 그리고 평면 응력 영역에서는 Allman 의 회전 자유도를 가지는 평면 응력 요소들을 사용하였다.^(11,12) 회전 자유도를 가지는 평면 응력 요소라는 것은 각 절점에서 x, y 방향의 병진 변위에 평면에 수직인 방향을 기준으로 하는 회전량을 독립적인 변위로 가지는 요소를 의미한다. 따라서, 각 절점에서 x, y 방향의 병진 변위와 더불어 z 축을 기준으로 하는 회전량까지 세 개의 자유도를 갖는다. 4 절점 사각형 요소와 3 절점 삼각형 요소 모두 회전 자유도를 가지는 평면 응력 요소를 사용하였기 때문에 평면 응력 상태의 수직 방향 회전 변위를 특별히 고려하지 않아도 전체 6 자유도가 만족되는 입체 요소가 완성된다.

4. 수치 예제

하이브리드 트레프츠 4 절점 평판 요소와 3 절점 평판 요소의 성능을 평가하고, 평면 응력 요소와 결합한 하이브리드 트레프츠 평면 셀 요소의 성능을 확인한다. 요소의 비교 대상으로는 상용 유한 요소 해석 프로그램인 NASTRAN(QUAD4, TRIA3), ANSYS(SHELL43), ABAQUS(S4, STRI3, S3R)를 이용하였다.

4.1 단순 지지를 받는 사각형 평판

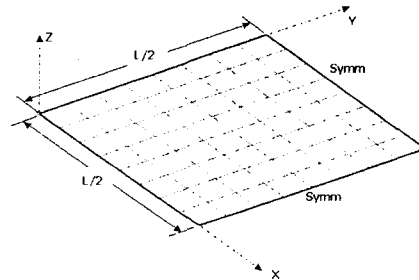


Fig. 2 Uniformly loaded simply supported square plate

Table 1 Square plate : Quadrilateral element

Mesh	present	QUAD4	S4	SHELL43
1	0.96158	0.86895	0.78502	0.79595
2	0.99856	1.01821	0.97703	0.97929
4	1.00015	1.01304	0.99486	0.9954
8	1.00007	1.00459	0.99874	0.99888
16	1.00003	1.00127	0.99969	0.99972
32	1.00001	1.00033	0.99994	0.99994

Table 2 Square plate : Triangular element

Mesh	present	TRIA3	STRI3	SHELL43
1	0.53473	0.82145	1.02433	1.0244
2	0.90154	0.95704	0.9984	0.9984
4	0.97833	0.98877	1.00066	1.00061
8	0.996	0.99715	1.00043	1.00033
16	0.99964	0.99302	1.00021	1.0001
32	0.99974	0.99961	0.99976	0.99978

이 예제는 평판 요소의 기본적인 성능을 평가하고자 함이다.⁽⁷⁾ Fig. 2의 정사각형 평판 구조물은 대칭성을 이용하여 1/4만을 4절점 사각형 요소로 모델링한 형상이다. 탄성 계수 E 는 1.0GPa 이고, 포아송 비 ν 는 0.3, 두께는 0.01m 이고, 길이 L 은 10.0 m 이다. 경계 조건은 단순 지지로서 $w=M_n=\Theta_z=0$ 이고, 균일 분포 하중은 1.0Pa로 주어졌다. 균일 분포 하중이 주어지는 경우에 평판의 중심 절점에서의 변위값을 정규화하여 사각형 요소는 Table 1과 Fig. 3, 삼각형 요소는 Table 2과 Fig. 4에 제시하였다. 정해로는 Mindlin 이론에 근거한 시리즈 해를 이용하였다. 따라서 중심에서의 수직 변위는 식 (17)과 같다.

$$w = c \times \frac{pL^4}{100D} \text{ (m)} \tag{17}$$

여기서 c 값은 두께에 따라서 각각 0.427284($L/t=10$), 0.406446($L/t=100$), 0.406235($L/t=1000$)이다. 사각형 요소와 삼각형 요소 모두 두께에 상관없이 정해로 수렴한다는 것을 확인할 수 있다. 수렴성 뿐만 아니라 정확성에서도 삼각형 요소와 사각형 요소 모두 나쁘지 않은 성능을 가지고 있다. 특히 사각형 요소의 경우는 다른 상용 프로그램들에 비해서 성능이 매우 우수하다.

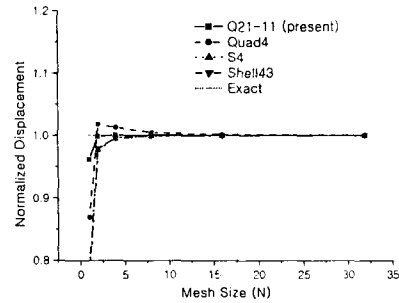


Fig. 3 Square plate : Quadrilateral element

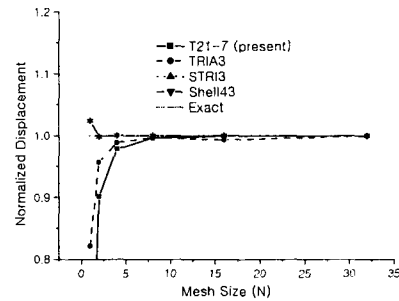


Fig. 4 Square plate : Triangular element

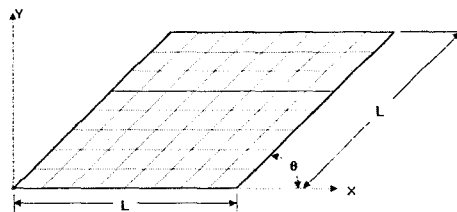


Fig. 5 Morley's rhombic plate

4.2 Morley's 마름모꼴 평판

이 예제는 Morley⁽⁸⁾가 극좌표계와 최소자승법을 이용해 해를 구하였고, 모서리 점에서 굽힘모멘트의 특이성이 있는 마름모꼴 평판 문제이다. 고정 지지된 경계 조건을 갖고 균일 분포 하중이 작용한다. 요소 형상은 Fig. 5와 같다. 탄성 계수 E 는 87.36 MPa, 포아송 비 ν 는 0.3, 밀변의 길이 L 은 8.0m, 두께 t 는 0.08m이다. 그리고 x 축의 양의 방향과 이루는 각은 45°이다. 중심 절점에서 정규화된 변위값은 사각형 요소는 Table 3, Fig. 6에, 삼각형 요소는 Table 4, Fig. 7에 제시되었다. 정해는 Morley의 논문에서 제시된 -0.006032 m을 사용하였다. 사각형 요소 뿐만 아니라 삼각형 요소도 다른 상용 프로그램들의 요소들에 비해서 우수한 성능을 보여준다.

Table 3 Morley's rhombic plate : Quadrilateral element

Mesh	present	QUAD4	S4	SHELL43
2	0.96849	0.35371	0.00424	0.04484
4	0.98507	1.08171	0.80748	0.8166
8	0.99337	1.08754	0.97519	0.97699
16	1.00166	1.03049	0.99662	0.99659

Table 4 Morley's rhombic plate : Triangular element

Mesh	present	TRIA3	S3R	SHELL43
1	0.96817	1.40933	1.85958	1.85967
2	0.98475	1.05923	1.18355	1.18355
4	0.99304	1.01164	1.0432	1.04319
8	1.00133	1.00464	1.01056	1.01055

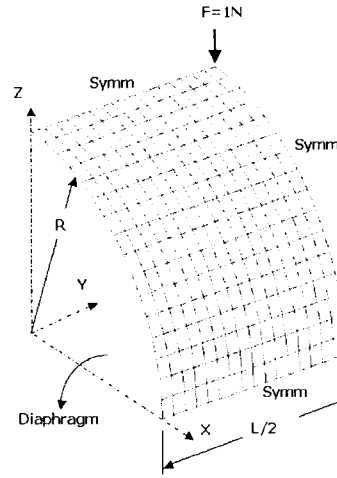


Fig. 8 Pinched cylinder

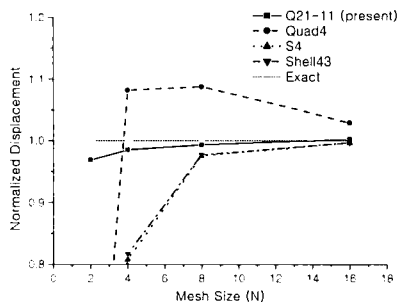


Fig. 6 Morley's rhombic plate : Quadrilateral element

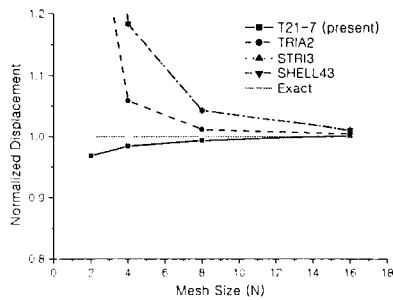


Fig. 7 Morley's rhombic plate : Triangular element

4.3 핀치된 원통 셸 문제

이 예제는 Fig. 8 에 표현한 것과 같이 원통형 셸의 양단이 격막으로 지지 되어 있고 양쪽으로 반경 방향의 압축집중하중이 걸리는 문제이다. Fig. 8 은 대칭성을 고려하여 1/8 만을 모델링한 것이다.

Table 5 Pinched cylinder : Quadrilateral element

Mesh	present	QUAD4	S4	SHELL43
2	0.10646	0.0884	0.04274	0.06228
4	0.57508	0.53488	0.38749	0.39682
8	0.88788	0.89713	0.7563	0.7614
16	0.98618	1.01664	0.94706	0.9478
32	1.02632	1.04646	1.01699	1.01621
64	1.03987	1.04891	1.03809	1.03723

Table 6 Pinched cylinder : Triangular element

Mesh	present	TRIA3	S3R	SHELL43
2	0.08708	0.06495	0.03763	-
4	0.4794	0.49933	0.24142	0.49081
8	0.79307	0.87827	0.60631	0.86701
16	0.94331	0.99098	0.87829	0.98112
32	0.98479	1.0066	0.96142	0.9958

하이브리드 트레프츠 평판 요소를 이용한 평면 셸 요소의 성능을 평가하기 위해서 해석하였다. 이 문제는 하중의 작용점에서 굽힘모멘트 값의 특이성이 있고, 막 응력 상태가 복잡한 문제이다. 탄성 계수 E 는 3.0 MPa, 포아송 비 ν 는 0.3, 반경 R 은 300.0m, 축방향 길이 L 은 600.0 m, 두께 t 는 3.0m 이다. 정해로 많이 사용되는 하중방향 변위값 1.8248×10^{-5} m 로 정규화하여 사각형 요소는 Table 5, Fig. 9, 삼각형 요소는 Table 6, Fig. 10 에 표시하였다. 사각형 요소는 다른 상용 유한 요소 프로그램들과 비슷한 결과를 얻었다. 수렴 속도와 안정성, 정확성 면에서 좋은 성능을 보이고 있다. 삼각형 요소는 다른 상용 프로그램들보다 약간 저조한 성능을 보이고 있다. 마찬가지로

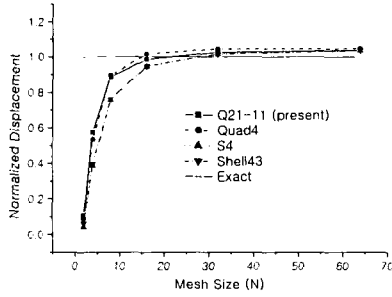


Fig. 9 Pinched cylinder : Quadrilateral element

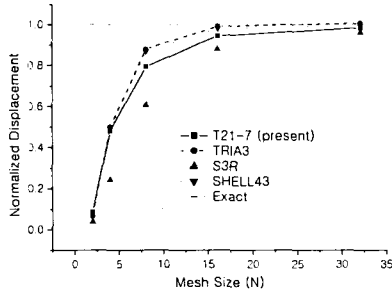


Fig. 10 Pinched cylinder : Triangular element

Table 7 Scordelis-Lo roof

Mesh	present	QUAD4	S4	SHELL43
4	1.06909	1.06109	1.04749	1.04749
8	1.01628	1.01593	1.00548	1.00548
16	1.00378	1.02081	0.99781	0.99781

사각형 요소와 비교해보더라도 성능의 개선이 필요할 것으로 보인다.

4.4 Scordelis-Lo roof 원통 셸 문제

이 예제 역시 평면 셸 요소의 성능을 평가하기 위해서 해석하였다. Fig. 11 에 나타난 바와 같은 형상이고 자중을 받고 있는 80° 원통면의 지붕 모양 셸이다. Fig. 11 의 그림은 대칭성을 고려하여 1/4 만 모델링한 것이다. 하중은 -z 방향으로 단위 면적에 90 Pa 의 힘이 가해진다. 탄성 계수 E 는 432 MPa 이고, 포아송 비 ν 는 0.0 , 길이 L 은 50 m, 반경 R 은 25 m, 두께 t 는 0.25 m 이다. 중심에서 최대 변위값을 정규화하여 Table 7, Fig. 12 에 제시하였다. 이번 예제는 사각형 요소만을 이용하여 풀었다. 상용프로그램의 요소에 비해 뒤 떨어지지 않는 좋은 결과를 보였다.

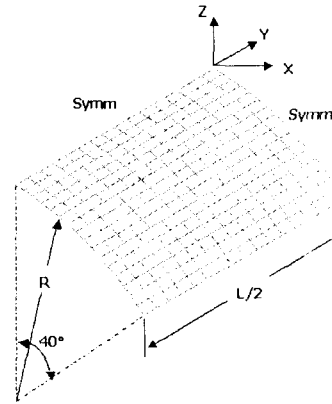


Fig. 11 Scordelis-Lo roof

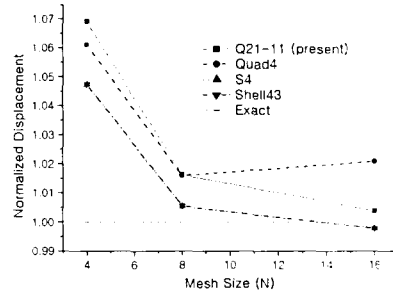


Fig. 12 Scordelis-Lo roof

5. 결 론

내부 변위장의 전 포텐셜 범함수에 독립적인 두 변위장의 일치조건을 부가한 새로운 하이브리드 트레프츠 변분 원리를 유도하고, 그에 따른 선 적분 수식화로 4 절점 사각형 평판 요소와 3 절점 삼각형 평판 요소를 구성하고 평가하였다. 또한 하이브리드 트레프츠 평판 요소와 평면 응력 요소를 결합한 평면 셸 요소를 구성하여 상용 유한 요소 프로그램들과 성능을 비교하였다.

사각형 요소와 삼각형 요소의 수치 실험 과정에서 사각형 요소와 삼각형 요소를 선 적분 수식화라는 하나의 과정으로 구성할 수 있었고, 두 요소 모두 평판 문제에서 우수한 성능을 보였다. 균일한 요소망에 대해서는 상용 프로그램과 비슷한 정도의 성능을 보이고 있고, 왜곡이 있는 요소망에 대해서는 상용 프로그램보다 더 나은 결과를 보여주고 있다. 평면 셸 요소의 경우도 마찬가지로 상용 프로그램과 비슷한 정도의 정확성을 보여주고 있다. 이와 같은 결과로부터 하이브리드 트레프츠 평판 요소의 성능이 우수함을 확인할 수

있다.

하이브리드 트레프트즈 요소는 그 특성 상 여러 가지 새로운 시도들이 가능하다. 지배 방정식을 만족하는 내부 변위장 함수들의 다양화를 통한 성능 향상과 실제적인 자유 요소의 개발이 주 목표가 될 것이다. 그리고 현재 개발되어 있는 하이브리드 트레프트즈 평면 응력 요소와 평판 요소를 결합한 평면 셀 요소의 개발과 평면 셀 요소에서 더 나아가 응축 셀 요소의 개발도 시도할 수 있다.

참고문헌

- (1) Jirousek, J. and Leon, N., 1977, "A Powerful Finite Element for Plate Bending," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 12, pp. 77~96.
- (2) Jirousek, J. and Guex Lan, 1986, "Hybrid-Trefftz Finite Element Model and Its Application to Plate Bending," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 651~693.
- (3) Jirousek, J., 1993, "Variational Formulation of Two Complementary Hybrid-Trefftz FE Models," *Communication in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 9, pp. 837~845.
- (4) J. Petrolito, 1990, "Hybrid-Trefftz Quadrilateral Elements for Thick Plate Analysis," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 78, pp. 331~351.
- (5) Jirousek, J., Wroblewski, A. and Szybinski, B., 1995, "A New 12 DOF Quadrilateral Element for Analysis of Thick and Thin Plates," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 2619~2638.
- (6) J. Petrolito, "Triangular thick plate elements based on a hybrid-Trefftz approach," *Computers & Structures*, Vol. 60, pp. 883-894, 1996.
- (7) MacNeal, R. H. and Harder, R. L., 1985, "A Proposed Standard Set of Problems to Test Finite Element Accuracy," *Finite Elements in Analysis and Design 1*, pp. 3~20.
- (8) Morley, L. S. D., 1964, "Bending of Clamped Rectilinear Plates," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 17, pp. 293~317.
- (9) Zienkiewicz, O. C., 1993, "Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Elements : Part I – A Simple Quadrilateral," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3043~3056.
- (10) Zienkiewicz, O. C., 1993, "Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Elements : Part II – A Simple Triangle," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 36, pp. 3057~3066.
- (11) Allman, D. J., 1984, "A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 19, pp. 1~8.
- (12) MacNeal, R. H. and Harder, R. L., 1988, "A Refined Four-Node Membrane Element with Rotational Degrees of Freedom," *Computers & Structures*, Vol. 28, pp. 75~84.
- (13) Reissner, E., 1945, "The Effect of Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 12, pp. 69~76.
- (14) Mindlin, R. D., 1951, "Influence of Rotatory Inertia and Shear in Flexural Motion of Isotropic Elastic Plates," *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 18, pp. 31~38.