

동하중에서 변환된 등가정하중에 의한 최적화 방법의 수학적 고찰

박경진[†] · 강병수^{*}

(2002년 4월 19일 접수, 2002년 12월 31일 심사완료)

Mathematical Proof for Structural Optimization with Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads

Gyung-Jin Park and Byung-Soo Kang

Key Words : Dynamic Response Optimization(동적반응최적화), Equivalent Static Load(등가정하중), Karush-Kuhn-Tucker Necessary Condition(캐러시-쿤-터커 조건), Structural Optimization(구조최적설계)

Abstract

Generally, structural optimization is carried out based on external static loads. All forces have dynamic characteristics in the real world. Mathematical optimization with dynamic loads is extremely difficult in a large-scale problem due to the behaviors in the time domain. The dynamic loads are often transformed into static loads by dynamic factors, design codes, and etc. Therefore, the optimization results can give inaccurate solutions. Recently, a systematic transformation has been proposed as an engineering algorithm. Equivalent static loads are made to generate the same displacement field as the one from dynamic loads at each time step of dynamic analysis. Thus, many load cases are used as the multiple loading conditions which are not costly to include in modern structural optimization. In this research, it is mathematically proved that the solution of the algorithm satisfies the Karush-Kuhn-Tucker necessary condition. At first, the solution of the new algorithm is mathematically obtained. Using the termination criteria, it is proved that the solution satisfies the Karush-Kuhn-Tucker necessary condition of the original dynamic response optimization problem. The application of the algorithm is discussed.

기호설명

- | | |
|--|---|
| \mathbf{b} : 설계변수벡터 | t : 시간 |
| $b_{p+1,kl}$: p+1 번째 반복에서 설계변수벡터의 k 번째 요소에 대한 하한값 | g_{ju} : u 번째 시간에서의 j 번째 제한조건 |
| $b_{p+1,ku}$: p+1 번째 반복에서 설계변수벡터의 k 번째 요소에 대한 상한값 | y_u : 과도응답해석에서 얻은 u 번째 시간에서의 변위벡터 |
| b_{kl} : 설계변수벡터의 k 번째 요소에 대한 상한값 | \dot{y}_u : 과도응답해석에서 얻은 u 번째 시간에서의 속도벡터 |
| b_{ku} : 설계변수벡터의 k 번째 요소에 대한 하한값 | \ddot{y}_u : 과도응답해석에서 얻은 u 번째 시간에서의 가속도벡터 |
| f_{eq}^q : q 번째 시간에서 얻은 등가정하중벡터 | ϕ : 목적함수 |
| | \mathbf{M} : 질량행렬 |
| | \mathbf{K} : 강성행렬 |
| | z_q : q 번째 시간에서 얻은 등가정하중에 의한 변위벡터 |
| | v_q : q 번째 시간에서 얻은 등가정하중에 의한 속도벡터 |

[†] 책임저자, 회원, 한양대학교 기계설계학과
E-mail : gjpark@hanyang.ac.kr
TEL : (031)400-5246 FAX : (031)407-0755
^{*} 한양대학교 기계설계학과 대학원

- a_q : q 번째 시간에서 얻은 등가정하중에 의한 가속도벡터
- p : 제안한 알고리즘에서의 반복횟수
- P : 등가관성력

1. 서론

지난 수 십년 동안, 구조물을 설계하기 위한 최적화 이론은 큰 발전을 이루었다.⁽¹⁻⁶⁾ 더욱이 유한요소법의 발달과 더불어, 개발된 최적화 이론을 적용할 수 있는 실제 공학 문제의 범위도 훨씬 넓어졌다. 이를 바탕으로 산업 현장에서는 이미 상업적인 범용 최적설계 소프트웨어들이 사용되고 있다. 이렇듯 구조최적설계는 최적화 이론이 매우 잘 적용되고 있는 분야라 할 수 있다.^(1,2)

구조최적설계는 정적 유한요소 해석과 함께 이루어지는 것이 보통이다. 구조최적설계를 위해 해석을 수행할 경우, 구조물에 가해지는 하중은 대부분 정하중(static load)이다. 이것은 지금까지 구조최적설계의 이론이 대부분 정하중이 가해지는 구조물에 바탕을 두고 개발되었기 때문이다. 그러나 실제로 구조물에 가해지는 하중은 동하중(dynamic load)이다. 따라서 현재의 구조최적설계 기술을 이용하려면 동하중을 정하중으로 적절히 변환하는 과정이 필요하다. 그런데 동하중을 정하중으로 변환하기 위해 동적확대계수(dynamic factor)를 사용하는 등의 종래의 방법들은 그 변환과정 및 최적화 결과가 충분히 합리적이지는 않다.

따라서 정하중을 사용하지 않고 동하중을 직접 구조최적설계에 반영하려는 연구들이 시도되어왔다. 이들은 목적함수나 제한조건함수에서 구조물의 동적인 거동을 직접 고려하려는 연구들이다.^(1,2,7-15) 그러나 동적반응최적화로 불리는 이 연구들에서는 대부분 함수 계산에 드는 비용이 높은 편이다. 특히 민감도 해석에 있어서는 그것이 모든 시간영역에서 계산되어야 하기 때문에, 해석 비용이 매우 높으며 그 과정 또한 복잡하다. 이 문제에 대처하기 위해 일단의 연구자들은 제한조건이 위배되는 시간구간에서, 원래의 제한조건을 시간에 대해 적분하여 시간에 관계없는 등가제한조건으로 변환하는 방법을 시도하였다.^(2,9) 또 다른 연구에서는 시간 종속 제한조건의 수를 줄이기 위해 제한조건의 최대치가 일어나는 시간만을 고려하는 최악조건방법(worst case)을 시도하기도 하였다.^(11, 10-13)

그러나 등가제한조건을 사용한 최적화에서는 최적해 근처에서 미분 불가능성이 존재하는 것으로 알려져 있다. 뿐만 아니라, 이 방법으로 구한

최적해는 원래 문제의 최적해가 아닐 수 있다.⁽¹¹⁾ 최악조건방법을 사용하려면 극점을 찾기 위한 부가적인 비용이 요구된다. 또한 최대치가 일어나는 시간만을 고려하게 되면 최적해의 진동 현상이 일어날 수 있다. 이 진동 현상을 피하기 위해 여러 개의 국부 최대치를 고려하도록 추천하고 있다.⁽¹¹⁾ 이것은 결국 모든 시간 영역에서 제한조건을 고려하는 것과 최대치가 생기는 곳에서만 제한조건을 고려하는 것 사이에서, 최적화 결과의 질과 최적화 과정의 효율을 염두에 둔 절충안을 제안하는 것이다. 무엇보다 이들의 연구에서는 근본적으로 최적화가 시간영역에서 이루어지기 때문에 비용면에서 정적최적화에 비해 매우 불리하다. 특히, 대형 구조물의 변위나 응력에 관한 제한조건은 그 수가 매우 많기 때문에, 이들의 연구에서 진동중인 구조물의 변위나 응력을 제한조건으로 삼은 경우는 없다. 오직 강체동역학에서의 작은 규모의 문제만을 다루고 있다.

최근에 저자들은 대형 구조물의 동적반응최적화를 위한 새로운 공학 알고리즘을 제안한 바 있다.^(17,18) 이것은 잘 발달된 정적최적화 기술을 이용한다. 이 알고리즘에서는 먼저 유한요소법과 과도응답해석을 이용하여 매 시간에 구조물의 각 절점에 생기는 가속도와 속도 및 변위를 계산한다. 그 후, D'Alembert의 법칙을 적용하여 계산된 가속도와 속도 및 변위로부터 등가정하중을 계산한다. 계산된 등가정하중은 모든 시간 영역에서 모든 유한요소 절점에 가해지도록 한다. 이 등가정하중의 특징은 특정 시간에 과도응답해석을 통해 얻은 변위와 동일한 변위를 만들어내는 것이다. 따라서 등가정하중을 사용하여 모든 시간 영역에서 과도응답해석에 의한 변위와 동일한 변위를 얻어내려면, 과도응답해석에서의 시간 분할 개수와 동일한 수의 등가정하중이 필요하다. 이는 종래의 동적확대계수를 사용하는 것에 비하면 매우 합리적인 변환법이다. 이렇게 얻어진 등가정하중들을 다중하중조건으로 구조최적설계에 적용한다. 다중하중조건 처리는 현대 구조최적설계에서는 더 이상 문제가 되지 않는다.

제안한 등가정하중을 사용한 정적최적화가 완료되면 설계변수가 갱신된다. 그런데 제안한 등가정하중은 기본적으로 설계변수의 함수이다. 따라서 설계변수가 갱신되면, 갱신된 설계변수를 사용한 과도응답해석을 통해 새로운 등가정하중을 계산하여야 한다. 이렇게 다시 계산된 등가정하중을 사용하여 새로운 정적최적화 문제를 푸는 과정을 반복한다. 이 반복과정은 등가정하중이 더 이상 변하지 않을 때까지 계속된다.

이 알고리즘은 정적최적화를 이용하기 때문에 관성력에 관한 민감도 정보를 사용하지 않는다. 그러나 반복적인 등가정하중 계산과 정적최적화로써 관성력에 관한 민감도 정보를 사용하지 않는 것을 보상한다. 또 정적최적화는 잘 발달되어 있고 그 비용도 매우 저렴하기 때문에, 이 방법은 대형 구조물의 최적화에 쉽게 적용될 수 있다. 실제로 제안한 방법의 유용성은 여러 수치 예제들을 통해서 이미 입증하였다.⁽¹⁷⁻²⁴⁾

이 연구에서는 제안한 방법을 수학적으로 고찰 하려 한다. 최적해는 캐러시-쿤-터커 조건(Karush-Kuhn-Tucker Necessary Condition; KKT Condition)을 만족하여야 한다.⁽²⁵⁾ 먼저 제안한 알고리즘에 의해 얻어진 최적해가 가지는 KKT 조건을 유도할 것이다. 그리고 과도응답해석을 위한 평형방정식이 등식제한조건으로 포함되는, 원래의 동적반응최적화에 대한 KKT 조건을 유도할 것이다. 마지막으로 이 두 조건에 의한 해가 동일함을 보임으로써 제안한 방법이 수학적으로 타당함을 입증할 것이다. 또한, 저자들의 과거 연구에서는 가속도와 속도가 포함된 예를 보이지 않았다. 이 연구에서는 가속도와 속도에 대한 등가정하중도 소개하고 있다. 이 경우에도 제안한 방법의 수학적 타당성을 입증할 수 있다.

2. 등가정하중을 이용한 구조최적설계

일반적인 동적반응 최적화와 등가정하중을 이용한 최적화에 대해 간략하게 기술한다.

2.1 일반적인 동적반응 최적화

시간 영역을 이산적으로 구분한 동적반응 최적화를 위한 정식화는 다음과 같다.

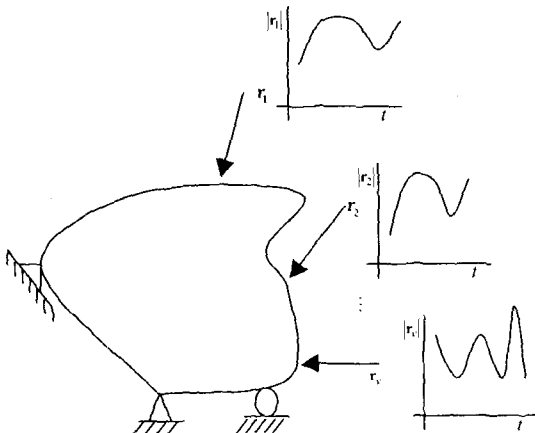


Fig. 1 A structure under dynamic loads

$$\begin{aligned}
 &\text{Find} && \mathbf{b} \\
 &\text{to minimize} && \varphi(\mathbf{b}) && (1) \\
 &\text{subject to} && \mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{y}}_u + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{y}_u = \mathbf{r}(t_u) && (2) \\
 &&& \mathbf{g}_{ju}(\mathbf{b}, \mathbf{y}_u, \dot{\mathbf{y}}_u, \ddot{\mathbf{y}}_u) \leq 0 && (3) \\
 &&& \mathbf{b}_{kl} \leq \mathbf{b}_k \leq \mathbf{b}_{ku} && (4) \\
 &&& u = 1, \dots, q \\
 &&& j = 1, \dots, m \\
 &&& k = 1, \dots, w
 \end{aligned}$$

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^w$ 는 설계변수이고, 식 (2)는 과도응답해석을 위한 지배방정식이다. $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 은 각각 질량 행렬, 강성 행렬, 하중 벡터, 변위 벡터이다. $\dot{\mathbf{y}}_u$ 와 $\ddot{\mathbf{y}}_u$ 는 u 번째 시간에서 \mathbf{y}_u 를 구하기 위한 속도와 가속도 벡터이다. φ 은 목적함수, \mathbf{g}_{ju} 는 u 번째 시간에서의 j 번째 제한조건함수이다. \mathbf{b}_{kl} 와 \mathbf{b}_{ku} 는 k 번째 설계변수의 하한치와 상한치이다. m, w, q, n 은 각각 부등식제한조건의 수, 설계변수의 수, 과도응답해석상의 시간 분할 개수, 시스템의 자유도이다.

목적함수는 종종 상태변수벡터 $\mathbf{y}_u, \dot{\mathbf{y}}_u, \ddot{\mathbf{y}}_u$ 의 함수로 표현되기도 한다. 상태변수는 시간영역에서 정의된다. 따라서 목적함수는 다음과 같이 최대값의 최소화 문제가 될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize maximum} && \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{y}_u, \dot{\mathbf{y}}_u, \ddot{\mathbf{y}}_u) && (5) \\
 &&& u = 1, \dots, q
 \end{aligned}$$

부가변수를 사용하여 식 (5)는 다음과 같이 변형될 수 있다.^(1-3, 26)

$$\text{minimize} \quad \mathbf{b}_{w+1} \tag{6}$$

$$\text{subject to} \quad \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{y}_u, \dot{\mathbf{y}}_u, \ddot{\mathbf{y}}_u) - \mathbf{b}_{w+1} \leq 0 \tag{7}$$

$$u = 1, \dots, q$$

식 (6)은 식 (1)과 같은 표현이고 식 (7)은 식 (3)

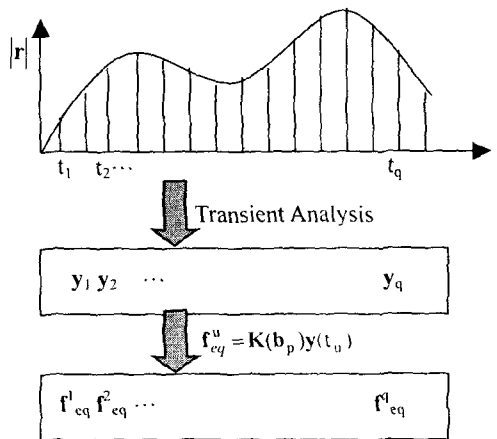


Fig. 2 An example of calculating equivalent static loads from a dynamic load

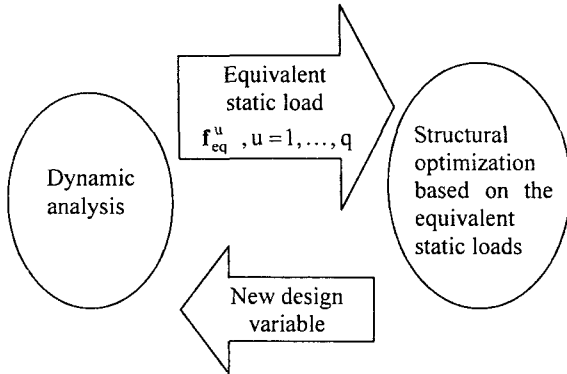


Fig. 3 A schematic process of the proposed algorithm

과 같은 표현이다. 따라서 식 (1)-(4)는 일반적인 동적반응최적화를 위한 정식화가 될 수 있다. 식 (1)-(4)는 후반에서 기술할 동적반응최적화에서 사용될 것이다.

식 (2)는 과도응답해석을 위한 지배방정식이면서, 동시에 등식제한조건이다. 이것은 시간영역에서 항상 만족되어야 한다. 일단의 연구자들은 가속도를 목적함수로 하는 문제를 연구하였다.^(2,27) 따라서 그들은 정식화 (5)에서 최대 가속도를 최소화하는 문제를 다루었다. 그런데 이들의 대부분은 최악조건방법을 사용하였다.^(2,10-12) 이 방법은 최대값이 생기는 시간이 거의 변하지 않아야만 좋은 결과를 얻는다. 그러나, 실제로는 설계변수가 변경될 때에 최대값이 생기는 시간과 그 크기가 변할 수 있다. 또한 이들의 연구에서는 시간영역에서 제한조건을 다루기 때문에, 설계변수가 많은 문제를 다룰 경우 민감도 해석을 위한 비용이 높다. 따라서 이들의 연구에서는 작은 규모의 문제만을 다루고 있다. 그러나 오늘날의 공학문제에서는 대형 구조물을 다루어야 하는 경우를 자주 만날 수 있다. 위에서 서술한 전통적인 접근법이 이론적으로는 비교적 성공적이라 할 수 있으나, 대형 구조물에 적용하기에는 이 결과 서론에서 밝힌 바와 같은 현실적인 어려움이 있다.

2.2 등가정하중을 이용한 최적화 알고리즘

최근 저자들은 동적반응 최적화에 관한 새로운 알고리즘을 제안하였다. 동적반응 최적화는 식 (1)-(4)로 정의된다. 이 절에서는 편의상 속도와 가속도가 포함된 제한조건은 다루지 않고 후반에 다룰 것이다. Fig. 1의 구조물이 Fig. 2의 동하중에 대해 최적화된다고 가정하자. 제안한 알고리즘은 다음과 같다.

단계 1. $p=0, \mathbf{b}_p=\mathbf{b}_0$

단계 2. 식 (2)에서 \mathbf{b} 를 \mathbf{b}_p 로 두고 과도응답해석을 수행한다.

단계 3. 다음과 같이 모든 시간영역에서 등가정하중을 계산한다.

$$\mathbf{f}_{eq}^u = \mathbf{K}(\mathbf{b}_p)\mathbf{y}_u \quad u=1, \dots, q \quad (8)$$

여기서 q 는 식 (2)에서의 분할된 시간의 개수이고 \mathbf{y}_u 는 u 번째 시구간에서의 변위이다. 따라서 \mathbf{f}_{eq} 의 개수는 q 개이다. Fig. 2에서 보는 바와 같이, 등가정하중 \mathbf{f}_{eq} 는 모든 시간영역에서 모든 자유도에 가해진다.

단계 4. $p=0$ 이면 단계 5 로 간다.

$$p>0 \text{ 일 때, } \sum_{u=1}^q \|\mathbf{f}_{eq}^u(p) - \mathbf{f}_{eq}^u(p-1)\| < \varepsilon \quad (9)$$

이면 정지, 그렇지 않다면 단계 5 로 간다.

여기서 $\mathbf{f}_{eq}^u(p)$ 는 u 번째 시간에서의 p 번째 반복횟수에서 계산된 등가정하중이다.

단계 5. 다음의 정적최적화 문제를 푼다.

Find \mathbf{b}_{p+1}
to minimize $\varphi(\mathbf{b}_{p+1})$ (10)

subject to $\mathbf{K}(\mathbf{b}_{p+1})\mathbf{z}_u = \mathbf{f}_{eq}^u$ (11)

$g_{ju}(\mathbf{b}_{p+1}, \mathbf{z}_u) \leq 0$ (12)

$b_{p+1,kL} \leq b_{p+1,k} \leq b_{p+1,kU}$ (13)

$u=1, \dots, q$

$j=1, \dots, m$

$k=1, \dots, w$

하중 조건의 수는 q 개이다.

단계 6. $p=p+1$, 단계 2 로 간다.

알고리즘의 전체적인 과정은 Fig. 3에 간략하게 나타내었다. 서두에 기술한 바와 같이, 제안한 알고리즘은 대규모의 구조물에 성공적으로 적용하였다.⁽¹⁷⁻²⁴⁾ 그러나 제안한 방법에 의한 해가 수학적으로 최적해인지에 대한 논의는 이제까지 없었다. 이 연구에서는 제안한 방법에 의한 해의 최적성에 대해 논하려 한다.

3. 제안한 알고리즘에 의한 해의 최적성에 관한 수학적 고찰

제안한 알고리즘에 의한 해가 수학적으로 최적해임을 증명할 것이다. 이 증명 과정은 식 (1)-(4)에서의 KKT 조건이 식 (10)-(13)에서의 KKT 조건과 같음을 보임으로써 완성될 것이다.

식 (9)에 의해 p 번째 반복에서 수렴하였다고 가정하자. 그렇다면 다음이 성립한다.

$$\|f_{eq}^u(p)\| = \|f_{eq}^u(p-1)\| \quad u=1, \dots, q \quad (14)$$

식 (14)는 두 개의 다른 설계변수벡터로 과도응답 해석을 각각 수행하여 얻은 두 개의 등가정하중이 서로 같다는 것을 의미한다. 따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$b_p \neq b_{p-1} \quad (15)$$

$$\frac{\partial f_{eq}^u}{\partial b_i} = \frac{\partial(r(t_u) - M\ddot{y}_u)}{\partial b_i} = 0 \quad \text{at } b = b_p \quad (16)$$

$u=1, \dots, q \quad \& \quad i=1, \dots, w$

여기서 b_i 는 i 번째 설계변수이다. 식 (2)에서

$$r(t_u) - M\ddot{y}_u = Ky_u \quad (17)$$

의 관계를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial(Ky_u)}{\partial b_i} = 0 \quad \text{at } b = b_p \quad (18)$$

$u=1, \dots, q \quad \& \quad i=1, \dots, w$

3.1 일반적인 동적반응 최적화 문제에서의 캐러시-쿤-터커(KKT) 조건

식 (1)-(4)의 KKT 조건을 유도할 것이다. 식 (2)는 미분방정식이면서 동시에 최적화과정에서 사용되는 등식제한조건이다. 따라서 항상 $y_u = y_u(b)$ 로 표현하는 것이 가능하다. 이를 식 (3)의 제한조건에 대입하면 다음과 같은 라그랑지 함수 L 을 얻는다.

$$L = \varphi(b) + \sum_{u=1}^q \sum_{j=1}^m \mu_{ju} g_{ju}(b, y_u) \quad (19)$$

y_u 는 u 번째 시간에서의 식 (2)의 해이다. μ_{ju} 는 u 번째 시간에서의 j 번째 제한조건에 대한 라그랑지 승수이다. 따라서 KKT 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b_i} &= \frac{\partial \varphi(b)}{\partial b_i} \\ &+ \sum_{u=1}^q \sum_{j=1}^m \mu_{ju} \left[\frac{\partial g_{ju}(b, y_u)}{\partial b_i} + \left(\frac{\partial g_{ju}}{\partial y_u} \right)^T \cdot \frac{\partial y_u}{\partial b_i} \right] \quad (20) \\ &= 0 \quad i=1, \dots, w \end{aligned}$$

$$\mu_{ju} \cdot g_{ju} = 0, \quad \mu_{ju} \geq 0 \quad j=1, \dots, m \quad \& \quad u=1, \dots, q \quad (21)$$

3.2 등가정하중을 이용한 최적화 문제의 KKT 조건

제한한 알고리즘에서는 매 반복에서 식 (10)-(13)의 최적화문제를 푼다. 여기서 얻은 해는 항상 그 문제에 대한 KKT 조건을 만족한다. 식 (11)의 등식제한조건은 그 해를 구함으로써 항상 소거할 수 있다. 그리고 b_{p+1} 대신 b 로 표기하면

라그랑지 함수 L 은 다음과 같다.

$$L = \varphi(b) + \sum_{u=1}^q \sum_{j=1}^m \mu_{ju} g_{ju}(b, z_u) \quad (22)$$

KKT 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial b_i} &= \frac{\partial \varphi(b)}{\partial b_i} \\ &+ \sum_{u=1}^q \sum_{j=1}^m \mu_{ju} \left[\frac{\partial g_{ju}(b, z_u)}{\partial b_i} + \left(\frac{\partial g_{ju}}{\partial z_u} \right)^T \cdot \frac{\partial z_u}{\partial b_i} \right] \quad (23) \\ &= 0 \quad i=1, \dots, w \end{aligned}$$

$$\mu_{ju} \cdot g_{ju} = 0, \quad \mu_{ju} \geq 0 \quad j=1, \dots, m \quad \& \quad u=1, \dots, q \quad (24)$$

3.3 두 문제에 대한 KKT 조건의 비교

두 문제에 대한 KKT 조건은 각각 식 (20)-(21)과 식 (23)-(24)이다. 두 문제의 제한조건은 같은 형태를 취하고 있고 상태 변수는 각각 y_u 와 z_u 이다. 상태 변수 y_u 와 z_u 는 설계 변수 b 의 함수이며, 등식 제한조건인 각자의 평형방정식을 만족해야 한다. 알고리즘이 수렴되었다면, 다음이 성립한다.

$$Kz_u = f_{eq}^u \quad u=1, \dots, q \quad (25)$$

$$Ky_u = r(t_u) - M\ddot{y}_u \quad u=1, \dots, q \quad (26)$$

식 (16)에서 $(r(t_u) - M\ddot{y}_u)$ 는 설계변수 b 의 함수가 아니고, y_u 와 z_u 는 같으므로 다음이 성립한다.

$$Kz_u = Ky_u = f_{eq}^u = \text{constant} \quad u=1, \dots, q \quad (27)$$

$$z_u = y_u = K^{-1} f_{eq}^u \quad u=1, \dots, q \quad (28)$$

식 (27)을 미분하면

$$\frac{\partial K}{\partial b_i} z_u + K \frac{\partial z_u}{\partial b_i} = \frac{\partial K}{\partial b_i} y_u + K \frac{\partial y_u}{\partial b_i} = 0 \quad (29)$$

$u=1, \dots, q \quad \& \quad i=1, \dots, w$

따라서

$$\frac{\partial z_u}{\partial b_i} = K^{-1} \frac{\partial K}{\partial b_i} z_u \quad u=1, \dots, q \quad \& \quad i=1, \dots, w \quad (30)$$

$$\frac{\partial y_u}{\partial b_i} = K^{-1} \frac{\partial K}{\partial b_i} y_u \quad u=1, \dots, q \quad \& \quad i=1, \dots, w \quad (31)$$

식 (28)과 식 (30)-(31)에서 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial z_u}{\partial b_i} = \frac{\partial y_u}{\partial b_i} \quad u=1, \dots, q \quad \& \quad i=1, \dots, w \quad (32)$$

이제 식 (20)과 식 (23)을 비교한다. 두 식에서 목적함수의 미분치인 $\partial \varphi / \partial b_i$ 는 동일하다. 제한조건 의 미분치인 $\partial g_{ju} / \partial b_i$ 도 식 (20)의 것과 식 (23)의 것은 동일하다. z_u 와 y_u 가 동일하기 때문에 $\partial g_{ju} / \partial z_u$ 와 $\partial g_{ju} / \partial y_u$ 또한 동일하다. 마지막으로

식 (32)에 의해 식 (20)과 식 (23)은 완전히 동일한 표현이다. 물론 라그랑지 승수에 관한 식인 식 (21)과 식 (24)도 동일하다. 따라서 두 문제의 KKT 조건은 동일하다.

4. 가속도와 속도가 제한조건에 포함된 경우

위의 증명에서 속도와 가속도가 제한조건에 포함되지 않았다. 그러나 실제의 공학 문제에서는 식 (3)과 같이 속도나 가속도가 제한조건에 흔히 나타난다. 이 문제는 다음과 같이 처리할 수 있다.

4.1 가속도가 제한조건에 나타날 경우

식 (2)에서 다음과 같은 등가관성력 \mathbf{P} 를 정의한다.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_u = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_u = \mathbf{r}(t_u) - \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{y}_u = \mathbf{P}^u \quad (33)$$

여기서 $\ddot{\mathbf{y}}$ 는 식 (2)를 풀어서 얻을 수 있다. 이제 식 (33)을 식 (10)-(13)에 다음과 같이 등식제한조건으로 첨가할 수 있다.

$$\text{Find } \mathbf{b}_{p+1} \quad (34)$$

$$\text{to minimize } \varphi(\mathbf{b}_{p+1}) \quad (34)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{b}_{p+1})\mathbf{z}_u = \mathbf{f}_{eq}^u \quad (35)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{b}_{p+1})\mathbf{a}_u = \mathbf{P}^u \quad (36)$$

$$g_{ju}(\mathbf{b}_{p+1}, \mathbf{a}_u, \mathbf{z}_u) \leq 0 \quad (37)$$

$$b_{p+1,kL} \leq b_{p+1,k} \leq b_{p+1,kU} \quad (38)$$

$$u = 1, \dots, q$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$k = 1, \dots, w$$

따라서, 식 (33)을 이용하여 식 (36)의 등식 제한조건을 추가함으로써 가속도가 포함된 제한조건인 식 (37)도 처리할 수 있다.

4.2 속도가 제한조건에 나타날 경우

식 (3)에 속도가 포함된다면 유사등가정하중 (pseudo equivalent static load)을 정의하여 처리할 수 있다. 식 (2)를 시간에 대해 다시 미분하면 다음과 같다. 여기서 모든 상태변수와 외부하중은 미분가능하다고 가정한다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}_u + \mathbf{K}\dot{\mathbf{y}}_u = \dot{\mathbf{r}}(t_u) \quad (39)$$

이제 다음을 정의한다.

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{y}} \quad (40)$$

식 (40)을 식 (39)에 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_u + \mathbf{K}\mathbf{v}_u = \dot{\mathbf{r}}(t_u) \quad (41)$$

식 (41)은 이계미분방정식이므로 과도응답해석을

통해 해를 구할 수 있다. 식 (41)에서 구한 해를 사용하여 유사등가정하중 \mathbf{p}_{eq} 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{p}_{eq}^u = \dot{\mathbf{r}}(t_u) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_u \quad (42)$$

이제 식 (10)-(13)을 다음과 같이 확장하여 표현할 수 있다.

$$\text{Find } \mathbf{b}_{p+1} \quad (43)$$

$$\text{to minimize } \varphi(\mathbf{b}_{p+1}) \quad (43)$$

$$\text{subject to } \mathbf{K}(\mathbf{b}_{p+1})\mathbf{z}_u = \mathbf{f}_{eq}^u \quad (44)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{b}_{p+1})\mathbf{a}_u = \mathbf{P}^u \quad (45)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}_{p+1})\mathbf{v}_u = \mathbf{p}_{eq}^u \quad (46)$$

$$g_{ju}(\mathbf{b}_{p+1}, \mathbf{a}_u, \mathbf{z}_u, \mathbf{v}_u) \leq 0 \quad (47)$$

$$b_{p+1,kL} \leq b_{p+1,k} \leq b_{p+1,kU} \quad (48)$$

$$u = 1, \dots, q$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$k = 1, \dots, w$$

식 (44)-(46)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{aug} \mathbf{z}_{aug} = \mathbf{f}_{aug} \quad (49)$$

여기서

$$\mathbf{K}_{aug} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\mathbf{z}_{aug} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_u \\ \mathbf{a}_u \\ \mathbf{v}_u \end{Bmatrix} \quad (51)$$

$$\mathbf{f}_{aug} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{eq}^u \\ \mathbf{P}^u \\ \mathbf{p}_{eq}^u \end{Bmatrix} \quad (52)$$

이다. 식 (49)는 식 (11)을 확장한 형태이다. 따라서 식 (43)-(48)을 이용하여 얻은 해의 최적성에 관한 증명은 식 (10)-(13)을 이용하여 얻은 해의 최적성에 관한 증명과정이 동일하게 적용될 수 있다. 그러므로 다음 정리가 가능하다.

정리 : 2.2절의 과정이 수렴한다면, 단계 5에서 식 (43)-(48)을 적용하여 얻은 마지막 KKT조건은 식 (1)-(4)의 동적반응최적화를 위한 KKT조건과 동일하다.

위의 정리에 의하면, 제안한 알고리즘에 의한 최적해는 원래의 동적반응최적화 문제의 최적해라고 할 수 있다.

5. 결론

등가정하중을 이용한 동적반응최적화를 위한 수학적 근기를 제시하였다. 이를 위해 일반적인

동적반응최적화에 대한 KKT 조건과 제안한 방법에 대한 KKT 조건이 동일함을 보였다.

제안한 알고리즘에 의하면, 시간 영역에서의 동하중은 다수의 등가정하중으로 변환되어야 한다. 제안한 등가정하중은 동하중이 특정 시간에 만들어내는 가속도장, 속도장, 변위장과 동일한 장들을 만들어 낸다. 따라서 시간 영역을 이산적으로 구분할 경우, 동하중의 효과를 등가정하중으로 동일하게 재현하기 위해서는 구분한 시구간(time grid)의 개수와 같은 수의 등가정하중을 만들어 구조물에 가하여야 한다. 반복적인 최적화 과정은 등가정하중이 더 이상 변하지 않을 때에 중지하도록 하였으며, 이것이 수렴조건이다. 제안된 알고리즘은 여러 수치 예제를 통해 그 유용성을 입증하였다.

이 연구에서의 증명 과정은 해가 수렴했다는 가정에서 출발한다. 그러나 제안한 방법에 의한 해가 수렴한다는 보장은 아직까지 없다. 다시 말하면, 제안한 알고리즘이 등가정하중이 변하지 않는 설계점을 항상 찾을 수 있다는 보장은 아직까지 없다. 비록 모든 수치 예제에서 제안한 알고리즘이 수렴하는 것을 경험하였으나, 이 알고리즘의 수렴성에 대한 이론적인 연구가 필요하다. 또한 제안한 방법을 사용하여 동하중을 받는 대형 구조물에 대한 최적화가 계속 시도되어야 한다.

후 기

이 연구는 한국과학재단지정 최적설계신기술센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Haftka, R.T., and Gurdal, Z., 1993, *Elements of Structural Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- (2) Haug, E.J., and Arora, J.S., 1979, *Applied Optimal Design*, John Wiley and Sons, New York, New York.
- (3) Vanderplaats, G.N., 1982, "Structural Optimization-Past, Present, and Future," *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 7, pp. 992-100.
- (4) Ashley, H., 1982, "On Making Things the Best - Aeronautical Uses of Optimization," *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No. 21, pp. 5-28.
- (5) Schmit, L.A., 1981, "Structural Synthesis-Its Genesis and Development," *AIAA Journal*, Vol. 19, No. 10, pp. 1249-1263.
- (6) Hansen, S.R., and Vanderplaats, G.N., 1990, "Approximation Method for Configuration Optimization of Trusses," *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 1, pp. 161-168.
- (7) Cassis, J.H., and Schmit, L.A., 1976, "Optimum Structural Design with Dynamic Constraints," *ASCE, Journal of Structural Division*, ST10, pp. 2053-2071.
- (8) Rangachargulu, M.A.V., and Done, G.T.S., 1979, "A Survey of Structural Design under Dynamic Constraints," *Shock and Vibration Digest*, Vol. 11 No. 12, pp. 15-25.
- (9) Feng, T.T., Arora, J.S., and Haug, E.J., 1977, "Optimal Structural Design under Dynamic Loads," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 39-52.
- (10) Grandhi, R.V., Haftka, R.T., and Watson, L.T., 1986, "Design-Oriented Identification of Critical Times in Transient Response," *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 649-656.
- (11) C.C. Hsieh and J.S. Arora, 1984, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Dynamic Response," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 43, pp. 195-219.
- (12) Kim, M.S., and Choi, D.H., 1997, "Multibody Dynamic Response Optimization with ALM and Approximate Line Search," *Multibody System Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, Vol. 1, No. 1, pp. 47-64.
- (13) Greene, W.H., and Haftka, R.T., 1989, "Computational Aspects of Sensitivity Calculations in Transient Structural Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 32, No. 2, pp. 433-443.
- (14) Mills-Curran, W.C., and Schmit, L.A., 1985, "Structural Optimization with Dynamic Behavior Constraints," *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 1, pp. 132-138.
- (15) Chahande, A.I., and Arora, J.S., 1993, "Development of a Multiplier for Dynamic Response Optimization Problems," *Structural Optimization*, Vol. 6, pp. 69-78.
- (16) Sienkiewicz, Z., and Wilczynski, B., 1996, "Shape Optimization of a Dynamically Loaded Machine Foundation Coupled to a Semi-Infinite Inelastic Medium," *Structural Optimization*, Vol. 12, pp. 29-34.
- (17) Kang, B.S., Choi, W.S., and Park, G.J., 2001, "Structural Optimization Under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement," *Computers & Structures*, Vol. 79, pp. 145-154.
- (18) Choi, W.S., 1999, "Transformation of dynamic loads into equivalent static loads and structural optimization," Ph.D. Dissertation, Hanyang University, Seoul, Korea.
- (19) Choi, W.S., Park, G.J., Shin, M.J., and Kim, D.S., 1995, "Transformation of a Dynamic Load into an Equivalent Static Load and Shape Optimization of the Road Arm," *KSME Fall Conference*, Vol. I, pp. 609-614.
- (20) Choi, W.S., Kang, S.C., Shin, M.J., and Park, G.J., 1996, "Transformation of a Dynamic Load into an Equivalent Static Load and Shape Optimization of the Road Arm in Self-Propelled Howitzer," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 20, No. 12, pp. 3767-3781.

- (21)Choi, W.S., Kang, B.S., Park, G.J., and Ryu, J.B., 1998, "Optimization of Self-propelled Howitzer for Weight Reduction under Equivalent Static Load," *KSME Fall Conference*, Vol. A, pp. 402~407.
- (22)Kang, B.S., Choi, W.S., and Park, G.J., 2000, "Structural Optimization under Equivalent Static Loads Transformed from Dynamic Loads Based on Displacement," *Transactions of the KSME, A*, Vol. 24, No. 8, pp. 1949~1957.
- (23)Choi, W.S., and Park, G.J., 1999, "Transformation of Dynamic Loads into Equivalent Static Loads Based on Modal Analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 29~43.
- (24)Choi, W.S., and Park, G.J., 2002, "Quasi-Static Structural Optimization Using Equivalent Static Loads Transformed Dynamic Loads at All the Time Intervals," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp. 2105~2122.
- (25)Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, and Shetty, C. M., 1993, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithm*, John Wiley & Sons, Inc..
- (26)Taylor, J.E., and Bendsoe, M.P., 1984, "An Interpretation for Min-Max Structural Design Problems Including a Method for Relaxing Constraints," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 4, pp. 301~314.
- (27)Kegel, M.S. Butinar, B.J., and Oblak, M.N., 1992, "Optimization of Mechanical Systems: On Strategy of Nonlinear First Order Approximation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 223~234.