

## 기하급수 전개법을 이용한 준해석 민감도의 오차 분석

단 호 진<sup>†</sup>, 이 병 채<sup>\*</sup>

(2002년 3월 23일 접수, 2002년 12월 16일 심사완료)

### Error Estimation for the Semi-Analytic Design Sensitivity Using the Geometric Series Expansion Method

Ho-Jin Dan and Byung-Chai Lee

**Key Words :** Reanalysis(재해석 기법), Semi-analytic Sensitivity(준해석 민감도), Residual Correction Method(나머지 교정법), Geometric Series Expansion(기하급수 전개)

#### Abstract

Error of the geometric series expansion method for the structural sensitivity analysis is estimated. Although the semi-analytic method has several advantages, accuracy of the method prevents it from practical application. One of the promising remedies is the use of geometric series formula for the matrix inversion. Its result of the sensitivity analysis converges that of the global difference method which is known as reliable one. To reduce computational efforts and to obtain reliable results, it is important to know how many terms need to expand. In this paper, the error formula is presented and its usefulness is illustrated through numerical experiments.

#### 1. 서론

지금까지 구조물의 설계에 필요한 기본 정보인 민감도를 계산하기 위하여 현재 구조 거동 해석에 보편적으로 사용하는 유한 요소법과 관련하여 많은 연구가 이루어졌다. 구조물의 민감도 해석에는 크게 해석적인 방법, 전체 유한 차분법 그리고 준해석법이 있다. 해석적인 방법은 정확한 값을 얻을 수 있지만 형상 설계 변수에 대한 요소 강성행렬의 민감도를 구하는 수식이 매우 복잡해지고 요소의 엄밀한 수식을 잘 모를 때는 적용이 불가능하다.<sup>(8)</sup> 이에 반하여 전체 유한 차분법은 설계 변수에 변동을 주고 그에 따라 새로 구성된 구조를 해석하여 관심 거동의 변화를 살피는 것이다. 이 방법은 비교적 강건하고 정확한 민감도 결과를 얻을 수 있다고 알려져 있지만 구조 해석에 드는 노력이 많이 들기 때문에 설계 변수가 많아 질 경우

효용성이 적다. 해석적인 방법과 전체 유한 차분법의 단점을 극복하기 위하여 나온 방법이 준해석법이다.

준해석법은 설계 변수 변동에 의해 발생하는 요소 강성과 하중 변동에 대한 섭동 방정식을 얻고 고차 항을 무시하여 설계 변동의 모든 영향이 고려된 가상 하중을 구하고 이를 풀어 민감도를 구한다. 이 방법은 기존에 얻은 강성 정보 특히 역행렬 정보를 이용하면서도 요소와는 독립적인 민감도 모듈 구성이 가능하여 실제 적용이 용이하다는 장점이 있다. 이런 장점에도 불구하고 얻어진 민감도 결과의 신뢰도가 떨어진다고 알려져 있다.<sup>(1,2)</sup> 특히 형상 설계 변수의 경우 간단한 보 요소에 준해석법을 적용하는 경우에도 요소의 크기가 작아질수록 오차가 커지는 결과를 보였다. 이런 현상은 강성행렬의 변동에 대한 근사를 중앙 차분법등을 이용하여 고차 근사할 경우 개선된다.<sup>(7)</sup> 다른 접근 법으로는 요소 강성을 보다 정확히 근사하는 방법 그리고 강제 모드를 이용한 개선과 기하급수를 이용한 방법이 있다. 전자는 요소의 회전이 있는 문제의 경우 오차가 크게 발생한다는 점에 착안하여 강제 모드의 가상일 항을

<sup>†</sup> 한국과학기술원 기계공학과

<sup>\*</sup> 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : bclee@sys713.kaist.ac.kr  
TEL : (042) 869-3031 FAX : (042) 869-3210

이용하여 개선하고자 하였고,<sup>(5,6)</sup> 후자의 경우 전체 유한 차분법이 비교적 정확하고 강건한 방법이므로 그것에 준하는 결과를 얻기 위한 것으로 행렬의 기하급수 전개를 이용하여 변위를 수렴하는 점열로 근사한다.<sup>(3,4)</sup>

기하급수를 이용하여 점열을 구해갈 때 문제에 따라 수렴하는 속도가 다르므로 현재 어느 정도의 오차 범위내에 들어왔는지 예측하는 것은 대단히 중요하다. 본 연구에서는 나머지 교정법(residual correction method<sup>(9)</sup>)의 오차 분석 기법을 기하급수를 이용한 민감도 해석의 오차에 적용하였다. 기하급수를 이용할 때 오차의 특성을 해석하였고 연속된 점열과정에서 쉽게 얻을 수 있는 정보를 이용하여 오차의 크기를 예측하였다. 2 장에는 민감도 해석에 기하급수를 이용하는 것에 대한 논의와 기하급수법의 수렴에 관한 오차 분석을 하였다. 3 장에서 간단한 수치예제를 통하여 논의를 검증한다.

제시된 오차 예측을 이용하면 신뢰성있는 민감도 결과를 얻기 위하여 필요한 전개항을 추측할 수 있기 때문에 기하급수 전개를 민감도 해석에 쉽게 이용할 수 있게 되었다.

## 2. 기하급수 전개에 의한 민감도 해석

### 2.1 기하급수 전개를 이용한 민감도 해석

설계변수에 섭동이 가해졌을 때 전방 차분에 의한 준해석 민감도법은 고차항을 무시하여 기존 정보를 활용하도록 하는 방법이다. 이에 반하여 급수 전개법을 이용하여 민감도를 구하는 방법은 기존 강성행렬 정보를 활용하면서 전체 유한 차분에 의한 민감도 정밀도를 유지하고자 하는 방법이다. 전체 유한 차분에 의한 민감도가 비교적 신뢰도가 높다고 알려져 있으므로 전방 차분법에서 지적된 요소의 대표 크기가 작아질 때 발생하는 오차의 확대문제를 피해가면서 신뢰도 높은 결과를 기대할 수 있다. 설계변수의 섭동에 의하여 다음과 같이 강성행렬, 처짐 그리고 외부 하중에 변화가 생긴다.

$$(K + \Delta K)(u + \Delta u) = f + \Delta f \quad (1)$$

전방 차분에 의한 방법은 좌변을 전개하여  $\Delta K \Delta u$  항을 무시하는 방법이다.

이에 반하여 기하급수를 이용한 방법은 적당한 수렴 범위 안에서  $K + \Delta K$  의 역행렬을 정확하게 계산하는 것이다.  $r_\sigma(K^{-1}\Delta K) < 1$  일 때 다음의 식이 성립하는 것을 이용한다. 단,  $r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$  는 행렬  $A$  의 고유치의 집합  $\sigma(A)$  에서 크기가 가장 큰 고유치를 의미한다.<sup>(9)</sup>

$$(K + \Delta K)^{-1} = (I + K^{-1}\Delta K)^{-1}K^{-1} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-K^{-1}\Delta K)^n \right] K^{-1} \quad (2)$$

이 식을 섭동식에 적용하여  $\Delta u$  를 구하면 다음과 같다.

$$\Delta u = \sum_{n=0}^{\infty} (-K^{-1}\Delta K)^n K^{-1} (\Delta f - \Delta K u) \quad (3)$$

$n = m$  번째까지의 합을 이용하여 구한 값을  $\Delta u^{(m)}$  이라고 하자. 기하수열을 이용하여  $\Delta u \cong \Delta u^{(m)}$  라고 근사했을 때 설계 변수  $b$  에 대한 민감도는 다음과 같이 추정한다.

$$\frac{\partial u}{\partial b} \cong \frac{\Delta u^{(m)}}{\Delta b} \quad (4)$$

$m=1$  일 때 표준적인 전방차분을 이용한 준해석 방법이 된다.  $m$  이 증가할수록 근사의 정확도가 증가하여 전체 유한 차분 정도의 오차로 민감도를 구할 수 있다.

### 2.2 전개항 $m$ 에 따른 수렴 오차 해석

$m$  이 무한대로 접근하면 적절한 조건 하에서 수렴이 보장되지만 실제로 많은 항을 사용할 수는 없다. 따라서 어느 정도의 항을 추가하면 충분히  $\Delta u \cong \Delta u^{(m)}$  를 근사할 수 있는가를 알아내는 것이 중요하다. 앞 절의 이론과 관련하여 강성을  $K_b \equiv K$  과  $K_{b+\Delta b} - K_b \equiv \Delta K$  와 같이 새로 정의하고 처짐과 관련하여  $u_b \equiv u$ ,  $u_{b+\Delta b} \equiv u + \Delta u$  그리고  $u_{b+\Delta b}^{(m)} \equiv u + \Delta u^{(m)}$  라고 정의하자. 논의를 간단하게 하기 위하여  $\Delta f = 0$  라고 하자. 이런 가정은 대부분의 문제에 해당하는 것으로 심각한 제약 사항이 아니다. 새로운 정의에 의하여 식 (3)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$u_{b+\Delta b}^{(m)} = \sum_{n=0}^m (I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b})^n u_b \quad (5)$$

$K_{b+\Delta b} u_{b+\Delta b} = f$  이고  $K_b u_b = f$  인 점을 고려하면

$$(I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b})(u_{b+\Delta b} - u_b) = (u_{b+\Delta b} - u_b) - (I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b})u_b \quad (6)$$

이 된다. 보다 일반적으로  $m$  의 지수승 하였을 때

$$(I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b})^m (u_{b+\Delta b} - u_b) = (u_{b+\Delta b} - u_b) - \sum_{n=1}^m (I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b})^n u_b \quad (7)$$

의 관계를 얻는다. 최종적으로 식 (5)와 (7)을 더하면 다음과 같은  $u_{b+\Delta b}^{(m)}$  에 대한 오차식을 얻는다.

$$u_{b+\Delta b} - u_{b+\Delta b}^{(m)} = (I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b})^m (u_{b+\Delta b} - u_b) \quad (8)$$

이 식으로부터  $r_\sigma(I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b}) < 1$  일 때  $u_{b+\Delta b}^{(m)}$  이  $u_{b+\Delta b}$  으로 수렴함을 알 수 있다. 윗식은 적절한 행렬norm과 벡터norm을 이용하여 다음과 같이 Schwartz 부등식으로 정리할 수 있다.

$$\|u_{b+\Delta b} - u_{b+\Delta b}^{(m)}\| \leq \|I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b}\|^m \|u_{b+\Delta b} - u_b\| \quad (9)$$

$c = \|I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b}\| < 1$ 은 수렴이 보장되는 충분 조건으로 고유치에 의한 수렴 조건보다 제한적이다. 즉, 행렬norm 조건을 만족시키면 고유치 수렴 조건을 만족시키게 된다.

다음 부등식으로부터

$$\|u_{b+\Delta b}^{(m+1)} - u_{b+\Delta b}^{(m)}\| \geq \|u_{b+\Delta b}^{(m)} - u_{b+\Delta b}^{(m-1)}\| - \|u_{b+\Delta b}^{(m)} - u_{b+\Delta b}^{(m+1)}\| \quad (10)$$

최종적으로 연속된 벡터에 의한 오차 상한을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\|u_{b+\Delta b} - u_{b+\Delta b}^{(m+1)}\| \leq \frac{c}{1-c} \|u_{b+\Delta b}^{(m+1)} - u_{b+\Delta b}^{(m)}\| \quad (11)$$

수렴이 느린 문제에 대하여  $c \ll 1$ 인가를 검토해보는 것은 중요하다. 식 (11)에서  $\|u_{b+\Delta b}^{(m+1)} - u_{b+\Delta b}^{(m)}\|$  항은 연속된 점열간의 거리를 나타내는데, 그 거리가 가깝다고 하더라도 구하고자 하는 해와는 여전히 거리  $\|u_{b+\Delta b} - u_{b+\Delta b}^{(m+1)}\|$ 가 멀 수도 있기 때문이다.

실제적으로  $c$ 를 계산하기는 어렵기 때문에 본 논문에서는 각 단계에서  $c$ 의 근사값을 다음과 같이 구하여 사용했다.

$$c \cong \frac{\|u_{b+\Delta b}^{(m+1)} - u_{b+\Delta b}^{(m)}\|}{\|u_{b+\Delta b}^{(m)} - u_{b+\Delta b}^{(m-1)}\|} \quad (12)$$

이 근사는  $u_{b+\Delta b}^{(m+1)} - u_{b+\Delta b}^{(m)} = (I - K_b^{-1}K_{b+\Delta b})(u_{b+\Delta b}^{(m)} - u_{b+\Delta b}^{(m-1)})$ 의 Schwarz 부등식으로부터 유추된 것이다.  $c$ 의 하한에 대한 정보이기 때문에 엄밀성은 조금 떨어지는 단점이 있지만 축차과정에서 큰 계산 노력없이 얻

을 수 있다는 장점이 있다. 이렇게 추정된  $c$ 를 오차식 (8)에 적용하여 이용하여 현재 축차에서 구한  $u_{b+\Delta b}^{(m)}$ 이 어느 정도의 오차 범위에 들어오는지 가늠해 볼 수 있다.

급수 전개법을 재해석 기법에 적용하는 경우와는 달리 민감도에 이용하고자 할 때에는 설계 변수에 가해지는 섭동이 작고 초기해가 좋은 근사치이므로 비교적 수렴 특성이 좋고, 따라서 추정된  $c$ 를 이용하여도 일반적으로 큰 무리는 없다.

기하급수에 의한 민감도 해석과 전체 유한 차분에 민감도 해석 방법의 차이는 설계 변수의 변동에 따른 변위 필드를  $u_{b+\Delta b}^{(m)}$ 를 사용하는가 혹은  $u_{b+\Delta b}$ 를 사용하는가에 달려있다. 오차식 (11)을 이용하여 두 필드 사이의 거리를 예측할 수 있으므로 전개항의 수를 적절하게 결정할 수 있게 된다.

### 3. 수치 예제

이 장에서는 오차의 예측식 (11)과  $c$ 의 근사식

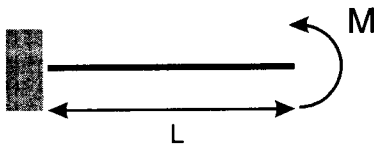


Fig. 1 Cantilever beam

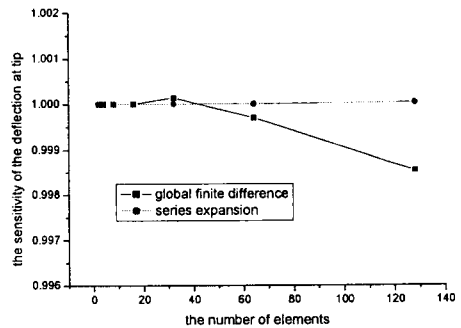


Fig. 2 Sensitivity results of problem 1 corresponding to the number of elements

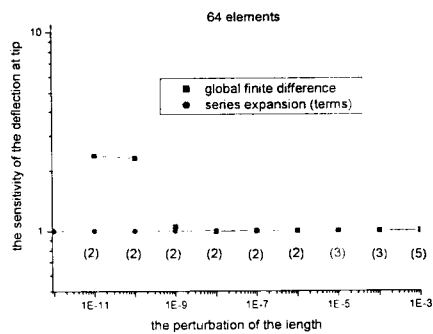
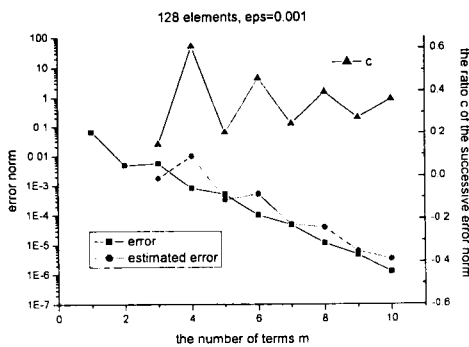


Fig. 3 Cantilever beam (a) Error estimation of the deflection and (b) Sensitivity corresponding to the perturbation

(12)를 몇가지 예제를 통하여 검토한다. 민감도의 결과는 전체 유한 차분법과 비교하였다.

3.1 끝단에 하중을 받는 보

Fig. 1에 끝단에 하중을 받는 보가 그려져 있다. 이 예제는 준해석법을 사용하여 민감도를 계산할 때 요소의 크기가 작아지면 오차가 커지는 문제를 고찰할 때 많이 사용되는 것이다.<sup>(7)</sup> 본 연구에서는 끝단의 처짐 민감도의 값이 1이 되도록 정규화하였다.

Fig. 2에는 요소가 증가함에 따른 민감도 결과를 도시하였다. 표준 준해석법의 경우 요소가 증가하면 오차가 커지는 경향이 있지만 급수전개법에 따른 민감도 해석의 경우 그런 단점이 없어짐을 알 수 있다.

급수 전개법에서 항수의 전개에 따른 오차 추정과 수렴후 민감도 결과를 Fig. 3에 나타냈다. 수렴 오차의 상한 예측식 (11)은 128개의 요소를 이용하였을 때 전체 차분을 통하여 끝단의 처짐을 구한 것과 비교하여 항의 전개에 따라 오차를 비

교적 정확하게 추정하고 있음을 알 수 있다. 그러나 식 (12)에 따른  $c$ 의 추정이 진동하는 경우가 발생하여 예측식의 신뢰도를 떨어뜨리고 있다.

Fig. 3 (b)로부터 섭동량에 따른 전체 차분법에 의한 민감도 계산과 급수 전개법에 대한 민감도를 64개 요소로 나누어진 보에서 살펴보면 대부분의 구간에서 동일한 결과를  $m=2$ (괄호안은 사용된 전개 항수를 나타낸다.)를 이용하여 구할 수 있음을 알 수 있다.

하지만 오차의 해석이 가능한 최소한의 항은  $m=3$ 이기 때문에 표준 준해석 방법인  $m=2$ 이 좋은 결과를 주었는지 미리 알 수가 없다. 따라서 의미있는 결과를 얻기 위하여 최소한의 항의 수를  $m=3$ 로 하여 오차 해석을 하는 것이 중요하다.

3.2 중앙에 집중 하중을 받는 단순 지지 평판

Fig. 4에 중앙에 집중 하중을 받는 단순 지지 평판을 도시하였다.<sup>(5)</sup> 대칭 조건을 이용하여 1/4이 모델되었으며 32개의 DKT 요소를 이용하여 해석하였다.<sup>(10)</sup>

Fig. 5 (a)에 중앙점의 처짐량의 오차를 전체 증분된 모델에 대하여 항수 전개에 따라 나타내었다 계산 한계로 인한 오차 이외에 매우 빠른 수렴을 보여주는데 이것은  $c$ 의 값을 통해서도 파악할 수 있다. 3.1 절의 예제와는 다르게  $c$ 의 변동이 안정되어 있고 값 자체가 작으므로 빠른 수렴을 보이는 것이다.

Fig. 5 (b)에는 섭동을 달리하여 전체 차분법에 의한 민감도 결과와 비교하였다. 대부분의 구간에서  $m=3$ 을 이용하면 수렴하였지만 섭동이 작은 구간에서  $m=6$ 을 필요로 하였다. 섭동이 매우 작아졌을 경우도 전체 차분법보다는 기계의 계산 오

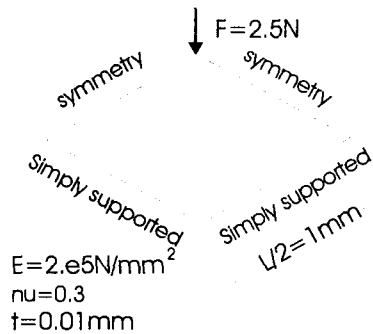


Fig. 4 Simply supported plate

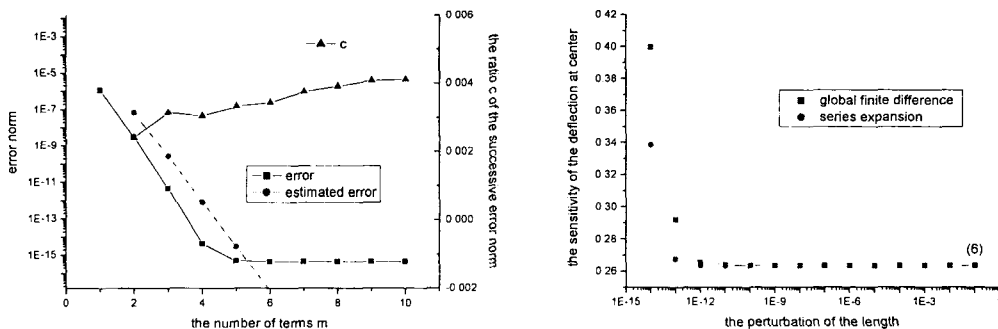


Fig. 5 Simply supported plate under the concentrated loading, 32 DKT elements (a) Error estimation of the deflection and (b) Sensitivity corresponding to the perturbation

차에 강건한 특징을 보인다.

3.3 평면 요소로 모델된 보

Fig. 6 에는 4×200 의 표준 평면 요소로 모델된 보가 나타나있다. 8 점 평면 변형률 요소를 이용하였다.<sup>(5)</sup>

Fig. 7 (a)에는 끝단에서 중앙점의 처짐을 전체 증분에 의하여 구한 처짐과 비교하여 오차를 나타내었다. 사용된 증분은 0.001 이다.  $c$  의 경향을 보면 매우 큰 폭의 진동을 하고 값도 작지 않은 것을 알 수 있고 이것은 오차의 예측이 정확하지 않다는 것을 의미하며 결과적으로 수렴에 많은 항이 필요하였다. 이 문제의 경우 기계적인 계산 오차의 영향도 커서 급수 전개법에 의한 결과가  $10^{-8}$  정도의 오차를 가지고 수렴함을 알 수 있다. 이것은 민감도의 계산에서 작은 섭동으로 나누는 양이 되어 확산된다.

Fig. 7(b)에서 섭동의 변동에 따른 민감도 계산 결과가 도시되어 있는데 다른 문제에 비하여 좁은 영역만이 좋은 결과를 주는 것을 알 수 있다.

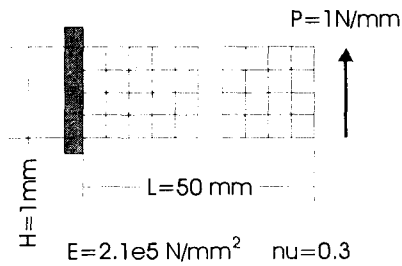


Fig. 6 Cantilever beam modeled by the plane element

4. 결론

본 연구에서는 기하급수 전개를 이용한 민감도 해석에서 급수 전개 항에 따른 오차의 특성을 분석하고 전체 차분법에 의한 민감도 해석의 정밀도를 유지하기 위한 항의 개수를 고찰하였다. 급수 전개법에서 구해지는 점열은 선형 수렴성을 보이며 민감도 해석에 이용하는 경우 설계 변수의 변동이 적으므로 극한점에 잘 수렴하게 된다. 점열이 극한점으로 수렴하는 것은 기하급수 전개를 민감도 계산에 이용할 경우 전체 유한 차분의 결과로 수렴함을 의미한다. 전체 유한 차분으로 민감도를 구하는 것은 계산량이 많은 단점에도 불구하고 결과의 신뢰도가 높다고 알려져 있으므로 급수 전개에 충분한 항을 이용할 경우 고무적인 결과를 얻을 수 있다.

본 논문에서는 기하급수 전개를 이용할 때 어떤 방식으로 수렴하는가 하는 것을 고찰하였다. 수렴이 보장 받는 방법이라고 해도 어느 정도의 항을 구해야 하는 가를 예측하지 못하면 실제적으로 사용하기에 어려움을 겪게 된다. 이 때 본문에서 유도된 식 (11)과 (12)를 이용하여 수렴 여부를 감지할 수 있다.  $c=1$  인 경우에는 매우 더딘 수렴이 예상되고,  $c>1$  의 경우에도 반드시 수렴에 실패하는 것은 아니므로 수렴을 판단하는데 유의할 필요가 있다.

준해석법은 요소의 내부 구조를 잘 알지 못하는 경우에 사용할 수 있기 때문에 해석과 민감도 부분의 분리를 통한 모듈화를 꾀할 수 있고 계산량에도 유리한 부분이 있다. 기하급수 전개를 이용하고 본 연구에서 제시된 오차 예측을 이용하면 계산 결과의 신뢰도 문제를 충분히 극복할 수 있

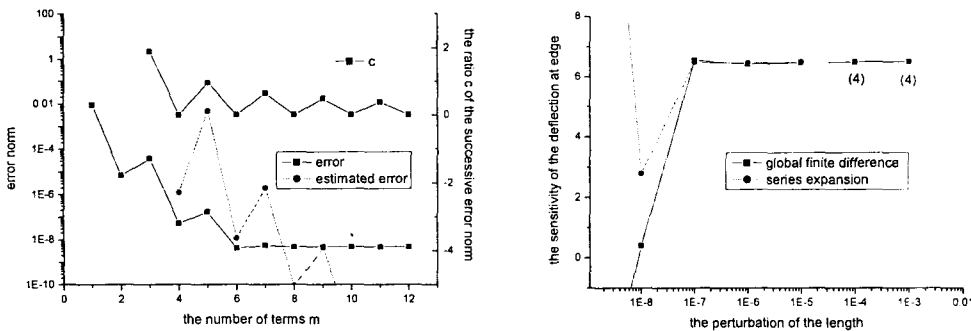


Fig. 7 Cantilever beam, 800 plane strain 8 node serendipity elements (a) Error estimation of the deflection ( $\epsilon=1.e-3$ ) and (b) Sensitivity corresponding to the perturbation

게 된다. 결과적으로 기존에 개발된 해석기에 적은 노력으로 신뢰도 있는 민감도 모듈을 더할 수 있게 되어 최적설계 모듈과의 연동을 쉽게 모색할 수 있다.

### 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

### 참고문헌

- (1) Bartherlemy, B., Chon, C. T. and Haftka, R. T., 1988, "Accuracy Problems Associated with Semi-Analytic Derivatives of Static Response," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 4, pp. 249~265.
- (2) Cheng, G., Gu, Y. and Zhou, Y., 1989, "Accuracy of Semi-Analytic Sensitivity Analysis," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 6, pp. 113~128.
- (3) Kirsh, U. and Taye, S., 1988, "High Quality Approximations of Forces for Optimum Structural Design," *Computers & Structures*, Vol. 30(3), pp. 519~527.
- (4) Oral, S., 2000, "A Mindlin Plate Finite Element with Semi-Analytical Shape Design Sensitivities," *Computers & Structures*, Vol. 78, pp. 467~472.
- (5) Keulen, F. V. and Boer, H. De, 1998, "Rigorous Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities by Exact Differentiation of Rigid Body Motions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, pp. 71~91.
- (6) Parente Jr., E. and Vaz, L. E., 2001, "Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities of Non-Linear Structures Using Equilibrium Relations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 2127~2142.
- (7) Lee, K.-W. and Park, G.-J., 1997, "Accuracy Test of Sensitivity Analysis in the Semi-Analytical Method with Respect to Configuration Variables," *Computers & Structures*, Vol. 63(6), pp. 1139~1148.
- (8) Haug, E. J., Choi, K. K. and Komkov, V., 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, Inc., Orlando.
- (9) Atkinson, K. E., 1989, *An Introduction to Numerical Analysis*, 2<sup>nd</sup>, John Wiley & Sons, Inc., Singapore.
- (10) Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J. and Babu, C. R., 1985, "An Alternative Explicit Formulation for the DKT Plate-Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1289~1293.