

# 회전하는 유체이송 외팔 파이프의 동특성 해석

## The Dynamic Characteristics of Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid

윤한익<sup>†</sup> · 손인수<sup>\*</sup>

Han-Ik Yoon and In-Soo Son

(2002년 7월 23일 접수 ; 2002년 12월 17일 심사완료)

**Key Words** : Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid(유체이송 회전 외팔 파이프), Natural Frequency(고유진동수), Dynamic Characteristics(동적 특성), Follower Force(종동력)

### ABSTRACT

The vibrational system of this study is consisted of a rotating cantilever pipe and the flow in the pipe. The equation of motion is derived by using Lagrange equation. The influences of the rotating angular velocity and the velocities of fluid flow in the pipe have been studied on the dynamic characteristics of a rotating cantilever pipe by numerical method. The tip-amplitude of axial vibration and maximum tip-deflection of axial direction of cantilever pipe are directly proportional to the velocity of fluid and rotating angular velocity of pipe in the steady state, respectively. The bending tip-amplitude of cantilever pipe is inversely proportional to the velocity of fluid in the steady state. When the rotating angular velocity is 5 rad/s, the velocity of fluid increase with increasing the natural frequency of axial vibration at second mode and third mode, but the natural frequency axial direction of first mode is decreased. The natural frequency of lateral direction is decreased due to increase of the rotating angular velocity. It identifies that the influence of velocity of fluid give much variation lower mode of vibration in lateral direction. And the influence of velocity of fluid give much variation higher mode of vibration in axial direction.

### 1. 서 론

이송유체를 갖는 회전 외팔 파이프의 형태는 대표적으로 스프링 쿨러를 들 수 있으며, 추진력을 받는 미사일, 회전 날개, 파이프 배관계의 내부를 흐르는 유체에 의한 진동문제 등 비보존력을 받는 탄성계의 동적 특성 및 안정성의 문제는 많은 분야에서 관심의 대상이 되어져 왔다. 파이프의 끝단에 집중 종동력으로 작용하는 비점성 유체의 분사력은 탄성계의 동특

성과 안정성에 큰 영향을 미친다. 이러한 영향을 고려한 회전하지 않는 유체유동 외팔 보에 관한 연구에 비해 회전하는 유체유동 외팔보에 관한 연구는 그리 활발하지 않은 실정이다.

유체유동에 의한 송수관의 진동과 안정성에 대한 연구는 Ashley와 Haviland<sup>(1)</sup>에 의해 비롯되어 동역학에 대한 이론적 연구와 실험적 연구<sup>(2,3)</sup>를 통해 송수관이 양단 단순지지 된 경우는 유동유체의 힘은 보존적이고, 계는 어떤 임계유속 이상에서 발산형 불안정을 일으키지만 유체가 나오는 유출 끝단이 자유인 경우는 유동유체의 힘이 비보존적이며, 계는 어떤 임계유속 이상에서 플러터(flutter) 불안정을 일으킨다는 것을 제시하였다. 또, 회전운동을 하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 Southwell<sup>(4)</sup>로부터 비롯하여

<sup>†</sup> 책임저자, 정희원, 동의대학교 기계산업시스템공학부

E-mail : hiyoon@dongeui.ac.kr

Tel : (051) 890-1645, Fax : (051) 890-2232

<sup>\*</sup> 정희원, 동의대학교 대학원 기계공학과

많은 연구자들에 의해 연구<sup>(5-8)</sup> 되어 졌다. 최근들어 회전 운동을 하는 외팔보에 대한 연구는 회전하는 유연 매니플레이터의 비선형 자유진동해석,<sup>(9)</sup> 이동질량을 갖는 회전 매플레이터의 진동수 평가,<sup>(10)</sup> 그리고 끝단질량을 갖는 곡선보의 회전운동의 동특성 해석<sup>(11)</sup> 및 회전 유체튜브의 동특성 해석<sup>(12)</sup> 등 광범위하게 연구되어지고 있다.

이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 종동력이 작용하는 계를 고려하였으며, 계의 운동방정식은 가정모드방법과 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치해석 하였다. 또, 유체의 속도는 안정유속 즉, 임계유속의 범위 내에서 전체 계의 동특성을 해석하였다. 수치해석을 통하여 이송유체의 속도와 파이프의 회전 각속도에 따른 파이프의 동적특성 즉, 회전 외팔 파이프 끝단의 축방향 및 횡방향의 변위 및 고유진동수를 3차 모드까지 해석하였으며, 특히 유속과 파이프의 회전각속도가 외팔 파이프 각 방향의 고유진동수에 미치는 영향을 비교, 고찰하였다.

## 2. 이론해석

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경  $r$ 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체를 갖는 유연 외팔 파이프를 모델링한 것이다. 중력의 영향과 이송유체를 가진 외팔 파이프 시스템의 내부, 외부 감쇠는 고려하지 않았으며, 외팔 파이프의 단면은 길이에 비해 아주 작고, 따라서 오일러 가정 및 보 이론을 적용하며, 보는 균질하고, 등방성이라 가정한다.

Fig. 1에서  $x$ 는 외팔 파이프의 고정점  $O$ 로부터 변형전 임의 질점  $P_0$ 까지의 거리를,  $s$ 는 변형전 임의 질점  $P_0$ 에서 변형후의 질점  $P$ 까지 변형할 때

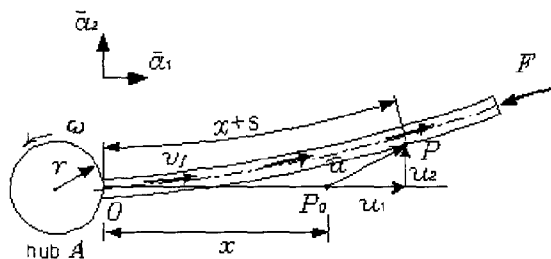


Fig. 1 A schematic diagram of rotating cantilever pipe conveying fluid

파이프가 인장된 길이를 나타내며,  $\bar{u}$ 는 임의 질점의 탄성변위 벡터를 나타낸다. 또,  $r$ 은 파이프가 부착된 고정축의 반경을 나타내며,  $v_f$ 는 유체의 속도를 의미한다. 외팔 파이프의 회전운동 중에 생기는 탄성변형은 가정모드법(assumed-mode method)을 이용하여 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서,  $\phi_{1i}(x)$ ,  $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 축방향과 횡방향 가정모드함수,  $q_{1i}(t)$ ,  $q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표를, 그리고  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ 는 일반화 좌표의 수를 의미한다. 그리고, 각 가정모드함수  $\phi_{1i}(x)$ ,  $\phi_{2i}(x)$ 는 한쪽 단이 고정되고 다른 한쪽은 자유인 외팔보의 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\phi_{1i}(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2l} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2i}(x) = & \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) \\ & + a_i [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \end{aligned} \quad (4)$$

### 2.1 외팔 파이프의 에너지식

변형에 따른 파이프의 임의 질점  $P$ 점의 속도는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$${}^P \bar{v} = {}^O \bar{v} + {}^A \bar{v}^P + \omega(\bar{x} + \bar{u}) \quad (5)$$

여기서  ${}^O \bar{v}$ 는  $O$ 점의 속도,  ${}^A \bar{v}^P$ 는  $P$ 점의  $A$ 점에 대한 상대속도, 그리고  $\omega$ 는 축의 회전각속도를 나타내고 있다. 식 (5)의 각 항들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^O \bar{v} &= (r \times \omega) \bar{a}_2 \\ {}^A \bar{v}^P &= \dot{u}_1 \bar{a}_1 + \dot{u}_2 \bar{a}_2 \\ \bar{x} &= x \bar{a}_1 \\ \bar{u} &= u_1 \bar{a}_1 + u_2 \bar{a}_2 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $(\dot{\cdot})$ 는 시간  $t$ 에 대한 미분을 나타내고,  $u_1$  대신 축방향 변위  $s$ 를 사용하기 위하여  $u_1$ 과  $s$ 사

이의 관계를 다음의 기하학적 제한조건에 의해 결정할 수 있다.

$$s \approx u_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

따라서 중력의 영향을 무시한 외팔 파이프의 운동 에너지( $T_p$ )와 포텐셜에너지( $V_p$ )를 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} m_p \int_0^l (\dot{r}_v \cdot \dot{r}_v) dx \quad (8)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^l \left( EI \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EA_p \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx \quad (9)$$

여기서  $EI$ 는 외팔 파이프의 굽힘 강성계수,  $A_p$ 는 파이프의 단면적, 그리고  $m_p$ 는 외팔 파이프의 단위길이당 질량을 나타내며,  $l$ 은 외팔 파이프의 전체 길이를 의미한다.

### 2.2 이송유체의 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도가  $v_f$ 이므로, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 유체의 절대속도의 수직성분, 즉 파이프의 횡방향 성분( $\bar{y}_v$ )과 축방향에 평행한 수평성분( $\bar{x}_v$ )은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{y}_v &= (r\omega + \dot{u}_2 + \omega x + \omega s) + v_f u_2' \\ \bar{x}_v &= v_f(1 - u_1') + \dot{u}_1 - u_2 \omega \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 ( $\dot{\quad}$ )은 축방향 좌표  $x$ 에 대한 미분을 의미한다. 따라서, 유속의 합은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_F = \sqrt{(\bar{x}_v)^2 + (\bar{y}_v)^2} \quad (11)$$

이송유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \int_0^l (V_F \cdot V_F) dx \quad (12)$$

여기서,  $m_f$ 는 유체의 단위 길이당 질량이다.

### 2.3 이송유체의 분사력에 의한 일량

점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은  $x = l$ 인 점에 작용하는 집중

접선 중동력이 된다. 이러한 접선 중동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분된다. 따라서 집중 접선 중동력의 보존력 성분에 의한 일은

$$W_c = \int_0^l \rho A v_f^2 (u_1')^2 dx \quad (13)$$

이고, 집중 접선 중동력의 비보존력 성분에 의한 일은 유체 분사력과 코리올리력의 조합으로서 다음과 같이 표현되어 질 수 있다.

$$\begin{aligned} W_n &= -[\rho A (v_f)^2 u_2'(l, t) \\ &\quad + \rho A v_f \dot{u}_2(l, t)] u_2(l, t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $A$ 는 유체가 통과하는 파이프 내부의 단면적을 나타내며,  $\rho$ 는 이송유체의 밀도이다. 코리올리력은 유체를 갖는 외팔파이프에서 항상 감쇠역할로서 작용을 한다.<sup>(13)</sup>

### 2.4 운동방정식

위의 식 (8)~(14)를 가지고 시스템의 운동방정식은 다음과 같은 라그랑즈 방정식을 이용하여 유도할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (15)$$

여기서  $L$ 은 Lagrangian으로서

$$L = (T_p + T_f) - (V_p) + W_c + W_n \quad (16)$$

이다. 이상의 결과를 종합하면 식 (17)과 같이 행렬 형태의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$M \ddot{\phi} + C \dot{\phi} + K \phi = P \quad (17)$$

여기서  $\phi = [q_{1i}(x) \ q_{2i}(x)]^T$ 이다.

### 2.5 고유진동수 해석

식 (17)의 운동방정식은 자유진동해석에 대해 고유치 문제를 해결하기 위하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\{\ddot{\eta}\} = M^* \{\eta\} \quad (18)$$

여기서 각 항은 각각 다음과 같다.

$$M^* = \begin{bmatrix} [M]^{-1}[C] & [M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} \quad (20)$$

여기서,  $I$  는 단위행렬을 의미한다. 식 (18)~(20)을 이용하여 구해진 고유치는 다음과 같이 복소수 형태의 값을 갖는데 이 값으로부터 고유진동수 ( $\Omega$ )를 구할 수 있다.

$$\lambda = \gamma + \beta i, \quad i = \sqrt{-1} \quad (21)$$

$$\Omega = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$$

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

앞 절에서 유도된 운동방정식을 가지고 이송유체를 갖는 회전 외팔 파이프의 동적특성을 10 차 모드까지 고려하여 수치해석 하였다. 먼저, 파이프의 회전각속도는 회전운동을 일반화하기 위하여 다음과 같은 형태의 함수(spin-up motion)를 사용하였다.

$$\omega = \begin{cases} \Omega_s \left[ \frac{t}{T_s} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \right] & 0 \leq t \leq T_s \\ \Omega_s & t \geq T_s \end{cases} \quad (22)$$

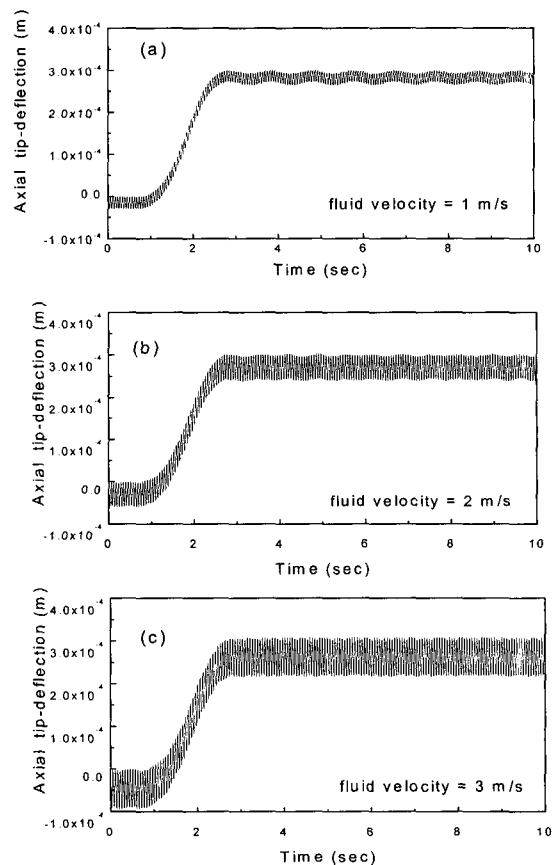
여기서  $T_s$  는 spin-up motion 이 정상상태에 도달하기 위한 시간이며 이 해석에서는  $T_s$  를 3초로 하였다.  $\Omega_s$  는 정상상태에서의 각속도, 그리고  $t$  는 시간이다. Table 1 은 이 연구에서 사용된 입력 변수 값을 나타낸다.

**Table 1** Specifications of rotating cantilever pipe conveying fluid

Mass per unit length (pipe) : $m_p$	kg/m	0.20
Mass per unit length (fluid) : $m_f$	kg/m	0.035
Length of pipe : $l$	m	1.00
Bending stiffness : $EI$	Nm <sup>2</sup>	0.21
Outer diameter of pipe	mm	25.00
Inner diameter of pipe	mm	12.00

Fig. 2 는 외팔 파이프의 회전각속도가 2 rad/s 일 때, 이송유체의 속도변화에 따른 파이프의 축방향 변위를 나타내었다. 이송유체의 속도가 증가하여도 최대 변형량은 거의 변함이 없으나 진폭은 비례하는 것을 알 수 있다. 이송유체의 속도가 1 m/s 일 때 정상상태에서는 전반적으로 굴곡을 가지며 진동을 하고 있으나 속도가 증가할수록 굴곡이 완만해진다. 또, Fig. 2(b)의 이송유체의 속도가 2 m/s 일 때 진폭은 약  $0.5 \times 10^{-4}$  m이고, Fig. 2(c)의 3 m/s 인 경우는 약  $1.0 \times 10^{-4}$  m 정도로 약 2 배의 차이를 보이고 있다.

Fig. 3 은 이송유체의 속도가 2 m/s 인 경우에 파이프의 회전각속도 변화에 따른 파이프의 축방향 변위를 나타내고 있다. 회전각속도가 증가할수록 변형량은 증가하는 경향을 보이지만 진폭은 거의 일정함을 알 수 있다. 정상상태에서 Fig. 2의 유체이송 속도가 저속일 때 보인 굴곡은 Fig. 3에서는 회전각속도가 감소할수록 완만해진다.



**Fig. 2** Axial deflection of cantilever pipe according to variation of fluid velocity

Fig. 4는 외팔 파이프의 회전각속도가 2 rad/s 일 때, 이송유체의 속도에 따른 회전 외팔 파이프의 횡변위를 도시한 것이다. 정상상태에 도달하기전의 입력함수의 영향에 의한 처짐과 정상상태에서의 진폭은 이송유체의 속도에 서로 반비례한다. 또, 정상상태에서의 평균 변형량은 유속이 1 m/s일 때 약  $1.70 \times 10^{-3}$  m 이고, 유속이 3 m/s일 때 약  $4.50 \times 10^{-3}$  m 정도로서 유속이 빠를수록 외팔 파이프의 변형량은 더 크게 나타난다.

Fig. 5는 외팔 파이프의 이송유체의 속도가 2 m/s 일 때, 외팔 파이프의 회전각속도에 따른 유체이송 회전 외팔 파이프의 횡변위를 나타낸 것이다. 회전각속도가 1 rad/s 일 때 정상상태에 도달하기 전의 최대 처짐은 약  $3.50 \times 10^{-3}$  m 이고, 회전각속도가 3 rad/s 인 경우 약  $1.10 \times 10^{-2}$  m로 약 3.1 배 정도의 차이를 보여주고 있으며, 정상상태에서의 외팔 파이프의 평균 변형량은 1 rad/s인 경우  $2.20 \times 10^{-3}$  m, 그리고 3 rad/s일 때는 약  $7.60 \times 10^{-3}$  m로서 약 3.5 배 정도의 차이를 나타낸다. 즉, 정상상태에 도달하기전의 파이프의 최대 처짐과 정상상태에서의 평균 변형량, 그리

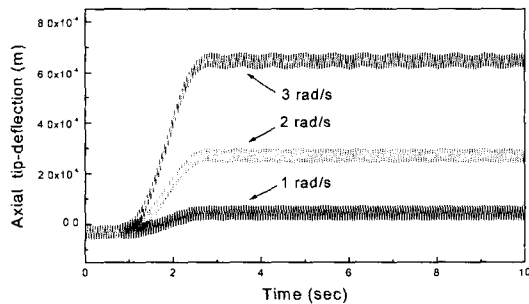


Fig. 3 Axial deflection of cantilever pipe according to variation of rotating angular velocity

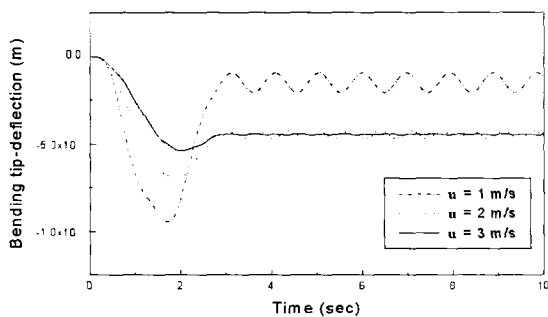


Fig. 4 Bending tip-deflection of cantilever pipe according to variation of fluid velocity

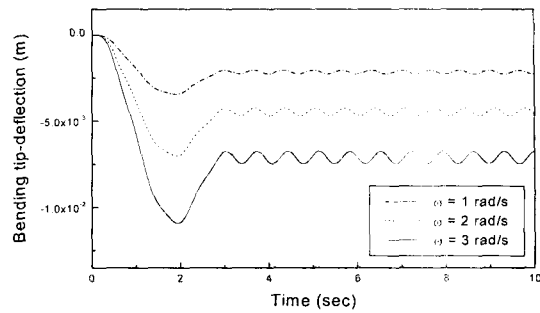
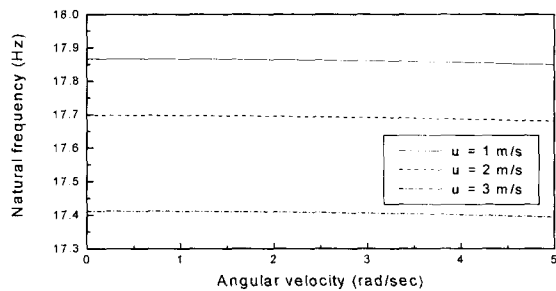
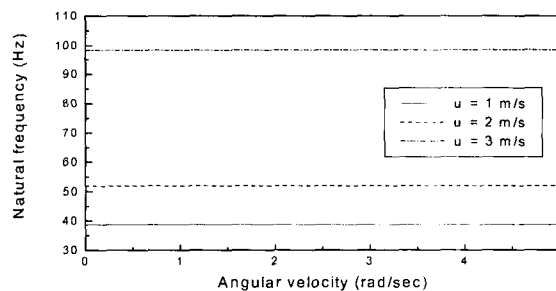


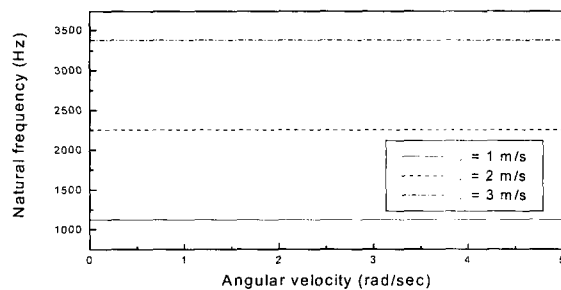
Fig. 5 Bending tip-deflection of cantilever pipe according to variation of rotating angular velocity



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

Fig. 6 Natural frequency of cantilever pipe according to variation of fluid velocity (axial direction)

고 정상상태에서의 외팔 파이프의 진폭은 각각 회전 각속도에 비례함을 알 수 있다.

Fig. 6은 회전각속도의 증가에 따른 축방향의 고유진동수를 이송유체의 속도에 따라 도시한 것이다. Fig. 6(a)의 1차 모드에서는 이송유체의 속도와 고유진동수는 서로 반비례하지만 Fig. 6(b)와 (c)의 2차, 3차 모드에서는 서로 비례함을 알 수 있다. 또 1차 모드에서는 유체이송 속도에 관계없이 회전각속도가 증가할수록 고유진동수는 약 0.1% 정도 감소하는 경향을 보이지만, 수치적으로 볼 때 2차, 3차 모드에서는 0.01% 정도의 미소량이지만 회전각속도가 커질 수

록 고유진동수는 증가하는 경향을 보인다. 그리고, 회전각속도가 5 rad/s 일 때 유체이송 속도가 1 m/s 인 경우와 3 m/s 사이의 고유진동수 변화량은 1차 모드에서는 거의 변화가 없고, 2차 모드에서는 1.5배, 그리고 3차 모드에서는 2배 정도의 차이를 보이고 있다. 따라서, 유체를 이송하는 회전 외팔 파이프의 축방향 고유진동수는 고차 모드로 갈수록 유체이송 속도의 영향을 더 크게 받을 수 있다.

Fig. 7은 회전각속도의 증가에 따른 횡방향의 고유진동수를 이송유체의 속도에 따라 표현하였다. 전 모드에 걸쳐서 고유진동수는 회전각속도와 서로 반비례적이며, 이송유체의 속도와 비례적임을 알 수 있다. 유체의 이송속도가 2 m/s인 경우 1차 모드에서는 회전각속도가 5 rad/s 까지 증가할 때 1차 모드에서는 약 18.38% 감소하였고, 2차 모드에서는 2.31%, 그리고 3차 모드에서는 0.34% 감소하였다. 또, 외팔 파이프의 회전각속도가 5 rad/s 일 때 이송유체의 속도가 1 m/s와 3 m/s를 비교해 보면 Fig. 7(a)의 1차 모드에서는 약 1.6배 정도 증가하고, Fig. 7(b)의 2차 모드에서는 약 36.9%, 그리고 Fig. 7(c)의 3차 모드에서는 14.3% 정도 증가한다. 즉, 외팔 파이프의 횡방향 고유진동수는 저차 모드에서 유체이송 속도에 더 민감하게 변화한다는 것을 판단할 수 있다.

#### 4. 결론

이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력이 의하여 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 종동력이 작용하는 계를 모델링하여 수치해석 하였으며 수치해석을 통하여 이 계의 동적특성, 즉 외팔 파이프 끝단의 축방향 변위와 횡방향 변위 및 각 방향의 고유진동수에 미치는 이송유체의 속도 및 외팔 파이프의 회전각속도의 영향을 연구하였으며, 연구결과에 대한 결론은 다음과 같다.

(1) 정상상태에서 이송유체의 속도에 관계없이 외팔 파이프의 끝단에서의 축방향 최대 변형량은 거의 일정하고, 유속과 진폭은 서로 비례하며, 회전각속도가 증가할수록 최대 변형량은 증가하는 경향을 보이지만 진폭은 거의 일정하다.

(2) 정상상태에 도달하기전의 외팔 파이프의 끝단 횡방향 최대 변위와 정상상태에서의 파이프 진폭은 이송유체의 속도와 서로 반비례한다.

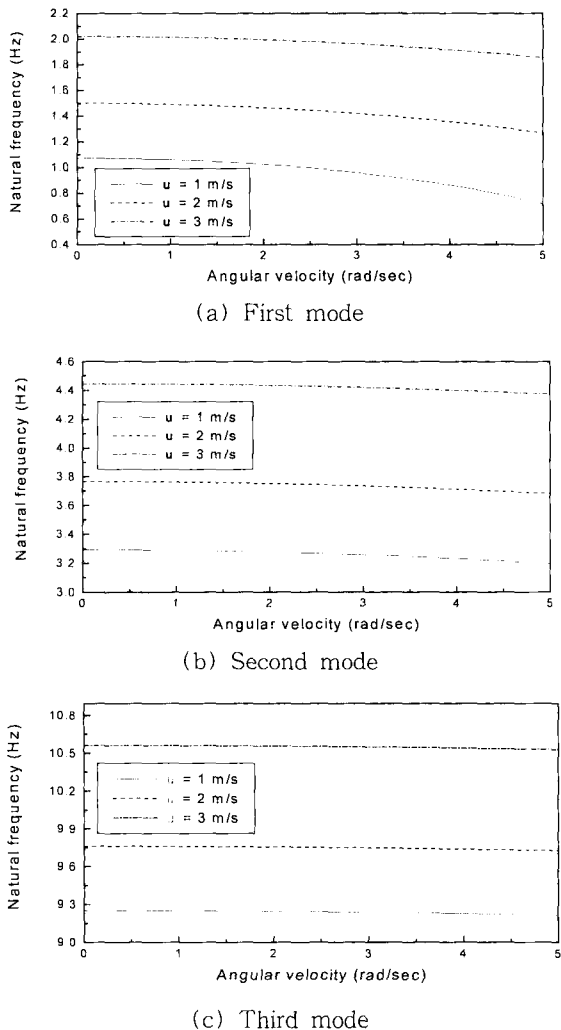


Fig. 7 Natural frequency of cantilever pipe according to variation of fluid velocity (lateral direction)

(3) 정상상태에 도달하기전의 외팔 파이프의 끝단에서의 횡방향 최대 변위와 정상상태에서의 평균 진폭은 회전각속도에 비례한다.

(4) 외팔 파이프의 축방향 고유진동수는 횡방향 고유진동수에 비해 매우 큰 값을 나타내며, 축방향 고유진동수는 고차 모드에서, 횡방향 고유진동수는 저차 모드에서 유체이송 속도에 더 큰 영향을 받음을 판단할 수 있다.

(5) 위의 연구결과인 유체이송을 갖는 회전하는 외팔 보 형태의 기계적 시스템을 구성하는 설계변수들의 특성과 이들의 특징적 연성관계를 바탕으로 스프링 쿨러, 로봇의 유연한 매니퓰레이터, 그리고 우주항공 구조물 등의 다양한 기계적 장치의 축방향 및 횡진동을 제어하기 위한 연구에 응용될 수 있을 것이다.

### 후 기

이 논문은 동의대학교 대학자체일반연구과제비 지원에 의하여 연구되었음(2002AA143).

### 참 고 문 헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, pp. 229~232.
- (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid(I. Theory)," *Proceedings of the Royal Society (London)*, Series A, Vol. 261, pp. 457~486.
- (3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiments)," *Proceedings of the Royal Society (London)*, Series A, Vol. 261, pp. 487~499.
- (4) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A. R. C. Reports and Memoranda No. 766*.
- (5) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force," *NACA TN No. 516*.
- (6) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *Journal of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, 25, pp. 28~30.
- (7) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *Journal of Sound and Vibration*, 181(2), pp. 261~278.
- (8) 최창민, 유홍희, 양현익, 2000, "회전 외팔보의 과도상태 진동시 발생하는 응력분포 연구", *한국소음진동공학회논문집*, 제 10 권, 제 2 호, pp. 306~311.
- (9) Hamdan, M. N. and Al-Bedoor, B. O., 2001, "Non-linear Free Vibrations of a Rotating Flexible Arm," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 5, pp. 839~853.
- (10) Fung, E. H. K. and Yau, D. T. W., 2001, "Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 241, No. 5, pp. 857~878.
- (11) Park, J. H. and Kim, J. H., 1999, "Dynamic Analysis of Rotating Curved Beam with a Tip Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 5, pp. 1017~1034.
- (12) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-plane And Out-of-plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-tube Cantilever," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 14, pp. 1~24.
- (13) Chen, S. S., 1987, "Flow-induced Vibration of Circular Cylindrical Structures." Washington : Hemisphere Publishing Corporation.
- (14) 윤한익, 손인수, 2002, "이동질량을 가진 유체 유동 외팔파이프의 동특성", *한국소음진동공학회논문집*, 제 12 권, 제 7 호, pp. 550~556.