

# 불확실성의 경계치 적응기법을 가진 슬라이딩 모드 제어기 설계

論文  
52D-7-6

## Design of a Sliding Mode Control with an Adaptation Law for the Upper Bound of the Uncertainties

劉 同 相\*  
(Dong Sang Yoo)

**Abstract** - In order to describe the upper bound of the uncertainties without any information of the structure, we assume that the upper bound is represented as a Fredholm integral equation of the first kind, that is, an integral of the product of a predefined kernel with an unknown influence function. Based on the improved Lyapunov function, we propose an adaptation law that is capable of estimating the upper bound and we design a sliding mode control, which controls effectively for uncertain dynamic systems.

**Key Words** : Sliding Mode, Uncertain Dynamic System, Robust Control, Parameter Adaptation, Fredholm Integral

### 1. 서 론

최근, 불확실 동적 시스템을 제어하기 위해 가변구조시스템 이론을 응용한 슬라이딩 모드 제어 알고리즘들이 많은 연구자에 의해 개발되어 오고 있다[1][2]. 슬라이딩 모드 제어기의 특징은 시스템 궤적이 미리 설계된 슬라이딩 평면에 제한되면 파라미터 섭동이나 외란에 둔감하게 된다는 것이다. 이런 슬라이딩 모드 제어기 설계에서는 불확실성이 유한한 값을 가지며 그 크기가 알려져 있다는 가정을 내포하고 있는 경우가 대부분이다. 하지만 불확실성의 경계치는 그 구조의 복잡성 등으로 인해 알아내기가 쉽지 않다. 따라서 불확실성의 경계치를 쉽게 알 수 있는 방법이 요구되고 있으며, 파라미터 적응기법은 이런 문제를 해결하는데 좋은 해법을 제공한다.

최근의 연구에서 불확실성의 경계치를 추정하는 적응기법을 가진 제어 방법이 많은 연구자에 의해 제안되었다. Chen[3], 그리고 Yoo와 Chung[4]은 불확실성의 경계치가 상태벡터의 Norm에 의해 원추 형태로 제한되었다고 가정하였으며, Brogliato와 Trofino Neto[5], 그리고 Wu[6] 역시 불확실성의 경계치가 미지의 파라미터들에 의한 선형 함수로 구성되었다고 가정하였고, 이 미지의 파라미터들을 추정할 수 있는 적응기법을 제안하였다. 이들 논문에서는 불확실성에 대한 구조가 부분적으로나마 알려져 있다는 암시적 가정을 포함하고 있는데, 실제 많은 경우 불확실성의 구조에 대한 정보를 얻는 것은 쉽지 않다. 따라서 불확실성에 대한 가정을 보다 완화시킬 필요가 있다.

적분식 표현법[7]은 불확실성의 구조를 모르는 상태에서 불확실성의 경계치를 수학적으로 표현하는데 좋은 방법을

제공한다. 즉,  $y(t) = \int_a^b \Psi(t,s)f(s)ds$  형태의 적분식은 알려진 함수  $y(t)$ 에 대해 잘 알려진 커널 함수  $\Psi(t,s)$ 와 미지의 함수  $f(s)$ 의 곱을 변수  $s$ 의 주어진 영역  $[a, b]$ 에 대한 적분을 포함하는 변수  $t$ 에 대한 방정식으로 표현할 수 있으며, 해석적 또는 수치해석적으로 미지의 함수  $f(s)$ 를 찾는 것이 방정식 해결의 목적이 된다. 따라서 만약 임의의 주어진  $\Psi(t,s)$ 에 대해 적절한 방법에 의해 미지의 함수  $f(s)$ 를 추정할 수 있다면 역으로  $y(t)$ 의 추정치를 얻을 수 있다. Messner, *et al.* [8]은 이런 적분식 가정을 통해 비선형 외란 함수를 표현하고 비선형 시스템에 적용할 수 있는 새로운 적응 학습 기법을 제안하였다.

잘 알려져 있는 바와 같이 실제 구현에 있어서 슬라이딩 모드 제어기는 스위칭 주파수의 제한으로 인해 슬라이딩 평면에서 바람직하지 않은 채터링 현상이 발생한다. 이런 채터링 현상을 없애기 위해 많은 연구자들은 슬라이딩 평면 주위에 경계영역 (boundary layer)을 도입하여 제어 입력이 연속성을 갖도록 알고리즘을 수정하였다.

본 논문은 불확실성에 대한 가정을 보다 완화한 경우 즉, 불확실성의 구조 정보를 알 수 없는 경우에 대해 Yoo와 Chung[4]의 연구 결과를 확장하는데 목적이 있다. 따라서 불확실성의 경계치를 제 1 종의 Fredholm 적분식, 다시 말해 미리 정의한 커널과 미지의 유도 함수의 곱을 적분하는 형태로 수식화 한다. 그리고 미지의 유도함수를 추정하는 적응기법을 제시함으로써 최종적으로 적응 경계치를 예측하는 방법을 제안한다. 또한, 이렇게 얻은 적응 경계치를 이용하여 Lyapunov 안정성 이론을 바탕으로 불확실 동적 시스템의 점근적 안정도를 보장하는 슬라이딩 모드 제어기를 설계한다. 그리고 실제 구현을 위해 경계영역 개념을 도입하여 제어입력과 적응기법을 수정하고 예제를 통해 대상 시스템을 효과적으로 제어함을 보인다

\* 正 會 員 : 韓 京 大 學 校 電 氣 工 學 科 助 教 授 · 工 博  
接 受 日 字 : 2003年 3月 11日  
最 終 完 了 : 2003年 5月 20日

## 2. 슬라이딩 모드 제어기

다음과 같이 기술되는 불확실성을 가지는 동적 시스템이 있다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + e(t, x)) \quad (1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$ 는 상태 벡터,  $u(t) \in R^m$ 는 입력 벡터,  $e(t, x) \in R^m$ 는 정합조건 (matching condition)을 만족하는 불확실성이며 모든 독립변수에 대해 연속이다.  $A$ 와  $B$ 는 각각 적절한 차수의 행렬을 나타낸다. 또한  $B$ 의 계수 (Rank)는  $m$ 이며,  $(A, B)$  쌍은 완전 제어 가능하다.

위와 같이 표현된 불확실 동적 시스템을 위해 다음과 같은 조건들이 성립된다고 가정한다.

**가정 1:** 모든  $(t, x) \in R \times R^n$ 에 대해 다음과 같은 조건을 만족하는 연속이며 양의 값을 갖는 스칼라 함수  $\rho(\cdot) : R \rightarrow R_+$ 가 존재한다.

$$\|e(t, x)\| \leq \rho(t) \quad (2)$$

슬라이딩 모드 제어기 설계는 두 단계로 나눌 수 있다. 첫번째 단계는 시스템 궤적이 슬라이딩 평면에 머물렀을 때 원하는 특성을 나타내도록 슬라이딩 평면을 설계하는 것이다. 따라서, 슬라이딩 평면을 다음과 같이 정의한다.

$$\Omega = \{x : \sigma(x) = Sx(t) = 0\} \quad (3)$$

여기서  $S \in R^{m \times n}$ 의 계수는  $m$ 이며,  $SB$ 는 정칙 행렬이다.

슬라이딩 평면을 선택한 후, 다음 단계는  $\sigma^T \dot{\sigma} < 0$ 의 조건을 만족하도록 하는 제어 알고리즘을 설계하는 것이다. 위의 조건은 시스템 궤적이 슬라이딩 평면으로 이끌리고, 일단 그 평면에 도달하면 이 후에는 지속적으로 머무는 것을 보증한다.

Yoo와 Chung[4]이 제안했던 다음과 같은 형태의 상태 궤환 제어기를 생각한다.

$$u(t) = u_{eq_{nom}}(t) + u_s(t) + u_N(t) \quad (4)$$

여기서  $u_N(t)$ 는 비선형 제어 입력으로 뒤에서 다시 정의한다.  $u_{eq_{nom}}(t)$ 는 불확실성  $e(t, x)$ 가 0이라고 가정했을 때 시스템 (1)의 공칭 시스템에 대한 등가 제어 입력으로 다음과 같이 결정된다. 공칭 시스템에 대한 슬라이딩 평면을  $\sigma_{nom} = 0$ 라 정의하면

$$\dot{\sigma}_{nom} = SAx + SBu_{eq_{nom}} = 0 \quad (5)$$

과 같이 기술되고, 등가 제어 입력은 다음과 같이 결정된다.

$$u_{eq_{nom}}(t) = -(SB)^{-1}SAx(t). \quad (6)$$

이 등가 제어 입력은 슬라이딩 평면으로 제한된 공칭 시스템 궤적의 응답 특성을 결정하게 된다. 또한,  $u_s(t)$ 는 슬라이딩 평면 함수값  $\sigma(x)$ 에 의한 제한 입력으로 다음과 같이 결정된다.

$$u_s(t) = -(SB)^{-1}K\sigma(x) \quad (7)$$

여기서  $K \in R^{m \times m}$ 는 정의 행렬 (positive definite matrix)이며 제한 이득을 의미한다. 이 제어 입력은  $\sigma(x)$ 의 동적 특성을 결정하는 것으로  $\sigma(x)$ 를 시간에 대해 미분하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\dot{\sigma}(x) = -K\sigma(x) + SB(u_N(t) + e(t, x)). \quad (8)$$

따라서 적절한 제한 이득  $K$  값을 선택함으로써  $\sigma(x)$ 의 응답 특성을 변경할 수 있다. 위의 결과로부터 식 (4)와 같은 제어 입력을 인가했을 때 시스템 (1)은 시스템 (8)과 같이 간략화 할 수 있으므로, 제어 목적은 어떠한 초기 조건 하에서도 식 (8)로 기술되는 시스템이 점근적으로 안정화되는 제어 입력  $u_N(t)$ 를 설계하는 것으로 귀결된다.

Chen[3], 그리고 Yoo와 Chung[4]은 불확실성의 경계치 상태벡터의 Norm에 의해 원추 형태로 제한되었다고 가정하였으며, Brogliato와 Trofino Neto[5], 그리고 Wu[6] 역시 불확실성의 경계치가 미지의 파라미터들에 의한 선형 함수로 구성되었다고 가정하였다. 이런 가정들에는 불확실성에 대한 구조가 부분적으로 알려져 있다는 암시적 가정을 포함하고 있는데, 실제 많은 경우에는 불확실성의 구조의 복잡성에 따라 쉽게 구조적 정보를 얻기 쉽지 않을 뿐더러, 측정 오차나 외란 등의 시간에 대한 변화 등에 대한 정보를 얻는 것은 쉽지 않다. 따라서 불확실성에 대한 가정을 보다 완화시킬 필요가 있다. 이런 목적을 위해 구조 정보가 전혀 필요하지 않는 불확실성에 대한 추가적인 가정을 다음과 같이 제시한다.

**가정 2:** 불확실성 경계치 함수  $\rho(\cdot)$ 는 제 1 종의 Fredholm 적분식으로 표현할 수 있다. 즉,  $\rho(\cdot)$ 는 유한 구간  $[a, b] \subset R$ 에 대해 다음과 같이 미리 정의된 커널  $\Psi(\cdot) : R \times R \rightarrow R^l$ 와 미지의 유도 함수  $c(\cdot) : R \rightarrow R^l$ 의 곱에 대한 적분 형태로 표현할 수 있다.

$$\rho(t) = \int_a^b \Psi(t, \tau)^T c(\tau) d\tau \quad (9)$$

여기서, 임의의 정의되는 커널 함수  $\Psi(\cdot)$ 는 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$\sup_t \int_a^b \Psi(t, \tau)^T \Psi(t, \tau) d\tau = \kappa < \infty \quad (10)$$

위와 같은 불확실성의 적분 수식화로부터 다음과 같이 불확실성의 경계치를 추정할 수 있는 적용 기법을 제안한다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(t, \tau) = \|B^T S^T \sigma(x)\| Q \Psi(t, \tau) \quad (11)$$

여기서  $\bar{c}(t, \tau)$ 는  $c(\tau)$ 의 추정치이고  $Q \in R^{l \times l}$ 는 정의 대각 행렬이다. 따라서, 유도 함수의 추정치를 통한 불확실성의 적용 경계치  $\bar{\rho}(t)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\rho}(t) = \int_a^b \Psi(t, \tau)^T \bar{c}(t, \tau) d\tau \quad (12)$$

유도 함수값 오차를  $\tilde{c}(t, \tau) = \bar{c}(t, \tau) - c(\tau)$ 라 정의하고, 식 (11)와 (12)를 이용하면 유도 함수값 오차 및 불확실성의 경계치 오차  $\tilde{\rho}(t)$ 는 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}(t, \tau) = ||B^T S^T \sigma(x)|| Q \Psi(t, \tau) \quad (13)$$

$$\tilde{\rho}(t) = \int_a^b \Psi(t, \tau)^T \tilde{c}(t, \tau) d\tau = \bar{\rho}(t) - \rho(t) \quad (14)$$

위의 적응 경계치를 이용하여 다음과 같은 비선형 제어 입력을 생각한다.

$$u_N(t) = \begin{cases} -\frac{B^T S^T \sigma(x)}{||B^T S^T \sigma(x)||} \tilde{\rho}(t) & \text{if } \sigma(x) \neq 0 \\ 0 & \text{if } \sigma(x) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

이 비선형 제어 입력은 불확실성의 영향을 억제하면서 시스템 궤적이 슬라이딩 평면에 도달하게 하고 일단 슬라이딩 평면을 만나면 슬라이딩 모드를 일으키도록 하는 역할을 한다.

제안된 제어 시스템의 안정도를 검증하기에 앞서 다음과 같은 Barbalat 정리를 증명없이 도입한다.

**정리 1:** (Barbalat 정리)[9]

만약  $W(\cdot)$ 가 실수 변수  $t$ 에 대해 실수 함수로 정의되고  $t \geq 0$ 에서 균일 연속적이며, 적분의 극한  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t W(\tau) d\tau$ 이 존재하고 그 값이 유한하다면,  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$ 이다.

위에서 제안된 불확실성의 경계치 추정을 위한 적응기법과 이를 이용한 제어 시스템의 안정도에 대해 다음과 같이 정리할 수 있다.

**정리 2:** 주어진 시스템 (1)에 대해 만약 가정 1과 2가 유효하다면 제어 입력 (4)와 적응 기법 (11)과 (12)에 의해  $\sigma(x) = 0$ 는 점근적 안정하다.

**증명:** 정리 2를 증명하기 위해 먼저 다음과 같은 Lyapunov 함수 후보를 선택한다.

$$2V(t, \sigma, \tilde{c}) = \sigma^T \sigma + \int_a^b \tilde{c}^T Q^{-1} \tilde{c} d\tau \quad (16)$$

위 식을 시간에 대해 미분하면 다음과 같다

$$\dot{V}(t, \sigma, \tilde{c}) = \sigma^T \dot{\sigma} + \int_a^b \tilde{c}^T Q^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{c} d\tau \quad (17)$$

위 식에 식 (8), (13)과 (14)를 대입하면  $\dot{V}(t, \sigma, \tilde{c})$ 는 다음과 같이 정리된다. 즉,  $\sigma(x) \neq 0$ 이 아닌 모든  $\sigma(x)$ 에 대해

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \sigma, \tilde{c}) &= \sigma^T (-K\sigma + SB(u_N + e)) + ||B^T S^T \sigma|| \int_a^b \tilde{c}^T \Psi d\tau \\ &= -\sigma^T K\sigma - ||B^T S^T \sigma|| |\tilde{\rho}| + \sigma^T SB e \\ &\quad + ||B^T S^T \sigma|| \int_a^b \Psi^T \tilde{c} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq -\sigma^T K\sigma - ||B^T S^T \sigma|| |\tilde{\rho}| + ||B^T S^T \sigma|| \rho \\ &\quad + ||B^T S^T \sigma|| |\tilde{\rho}| \\ &= -\sigma^T K\sigma < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

위의 결과로부터  $\sigma(x)$ 는 유한하고 안정하며,  $\int_a^b \tilde{c}^T \tilde{c} d\tau$

또한 유한함을 알 수 있다. 한편, 식 (14)에 대해 절대값을 취한 후 Schwarz 부등식 정리 및 가정 2를 이용하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}(t)| &= \left| \int_a^b \Psi(t, \tau)^T \tilde{c}(t, \tau) d\tau \right| \\ &\leq \left[ \int_a^b ||\Psi(t, \tau)||^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_a^b ||\tilde{c}(t, \tau)||^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$\sigma(x)$ 와  $\tilde{\rho}(t)$ 가 모두 유한하므로 수식 (8)로부터  $\dot{\sigma}(x)$ 도 유한함을 알 수 있다. 다음은 앞에서 소개한 Barbalat 정리를 이용하며 점근적 안정도를 증명한다. 먼저  $W(t)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$W(t) = \sigma^T K\sigma \quad (20)$$

그러면

$$W(t) \leq -\dot{V}(t, \sigma, \tilde{c}) \quad (21)$$

와 같은 부등식이 성립하며 양변에 시간 0에서  $t$ 까지 적분을 하면

$$\int_0^t W(\tau) d\tau \leq V(0, \sigma(x), \tilde{c}) - V(t, \sigma(x), \tilde{c}) \quad (22)$$

의 관계식을 얻는다. 여기서  $V(0, \sigma(x), \tilde{c})$ 는 유한하고,  $V(t, \sigma(x), \tilde{c})$  또한 Lyapunov 안정성에 의해 증가하지 않고 유한하므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t W(\tau) d\tau < \infty \quad (23)$$

와 같이 유한하게 된다. 또한  $\dot{W}(t) = 2\sigma^T K\dot{\sigma}$ 도 유한하므로  $W(t)$ 는 균일 연속적이다. 따라서 Barbalat 정리에 의해  $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = 0$ 이 된다. 결과적으로  $K$ 가 정의 행렬이므로 시간이 진행함에 따라  $\sigma(x)$ 는 0으로 수렴하게 된다. 따라서  $\sigma(x) = 0$  점근적 안정하다. □

슬라이딩 모드가 일어날 때 이상적인 경우이라면 제어입력은 무한대의 주파수로 스위칭되어야 한다. 그러나, 잘 알려져 있는 바와 같이 실제로 있어서는 스위칭 주파수의 제한으로 인해 슬라이딩 평면상에서 바람직하지 않은 채터링 현상이 일어난다. 이런 채터링 현상을 제거하는 방안으로 제안된 것이 슬라이딩 평면 주변에 경계영역을 설정하고 제어입력이 연속적인 값을 갖도록 알고리즘을 수정하는 방법이다.

본 논문에서는 Corless와 Leitman[10]등이 기술한 것과 같이 경계영역을 도입하여 앞에서 제안한 제어입력이 연속성을 갖도록 다음과 같이 수정하였다.

$$u(t) = -(SB)^{-1}SAx(t) - (SB)^{-1}K\sigma(x) + u_N(t) \quad (24)$$

여기서

$$u_N(t) = \begin{cases} -\frac{B^T S^T \sigma(x)}{\|B^T S^T \sigma(x)\|} \bar{\rho}(t) & \text{if } \sigma(x) > \epsilon \\ -\frac{B^T S^T \sigma(x)}{\epsilon} \bar{\rho}^2 & \text{if } \sigma(x) \leq \epsilon \end{cases} \quad (25)$$

여기서  $\epsilon$ 는 양의 값을 갖는다. 그리고 적응기법을 Ioannou와 Kokotovic[11]이 제시했던  $\sigma$ 형 적응기법으로 수정하였다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}(t, \tau) = -Q\bar{\Phi}\bar{c}(t, \tau) + \|B^T S^T \sigma(x)\| Q\Psi(t, \tau) \quad (26)$$

여기서  $\Phi \in R^{l \times l}$ 는 정의 대각 행렬이다.

**정리3:** 주어진 시스템 (1)에 대해, 만약 가정 1과 2가 유효하다면 비선형 입력 (25)를 가진 제어입력 (24)와 적응기법 (26)과(11)에 의해  $\sigma(x)$ 와  $\bar{\rho}(t)$ 은 균일 궁극 유한하다 (uniformly ultimately bounded).

**증명:** 위 정리를 증명하기 위해 다음과 같은 Lyapunov 함수 후보를 선택한다.

$$2V(t, \sigma, \bar{c}) = \sigma^T \sigma + \int_a^b \bar{c}^T Q^{-1} \bar{c} d\tau \quad (27)$$

$V(t, \sigma, \bar{c})$ 을 시간에 대해 미분하면 다음과 같고

$$\dot{V}(t, \sigma, \bar{c}) = \sigma^T \dot{\sigma} + \int_a^b \bar{c}^T Q^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \bar{c} d\tau \quad (28)$$

만약  $\|B^T S^T \sigma(x)\| \bar{\rho}(t) > \epsilon$ 인 경우에는 위 식을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \sigma, \bar{c}) &= \sigma^T (-K\sigma + SB(u_N + e)) + \|B^T S^T \sigma\| \int_a^b \bar{c}^T \Psi d\tau \\ &\quad - \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau \\ &= -\sigma^T K\sigma - \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} + \sigma^T SB e \\ &\quad + \|B^T S^T \sigma\| \int_a^b \Psi^T \bar{c} d\tau - \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau \\ &\leq -\sigma^T K\sigma - \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} + \|B^T S^T \sigma\| \rho \\ &\quad + \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} - \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau \\ &= -\sigma^T K\sigma - \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

또한  $\|B^T S^T \sigma(x)\| \bar{\rho}(t) \leq \epsilon$ 인 경우에는 식 (28)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \sigma, \bar{c}) &\leq -\sigma^T K\sigma - \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho}^2 / \epsilon + \|B^T S^T \sigma\| \rho \\ &\quad + \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho} - \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau \end{aligned}$$

여기서  $\|B^T S^T \sigma(x)\| \bar{\rho}(t) = \epsilon/2$ 일 때  $[-\|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho}^2 / \epsilon + \|B^T S^T \sigma\| \bar{\rho}]$ 항은 최대값  $\epsilon/2$ 을 가지므로, 위 식을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(t, \sigma, \bar{c}) \leq -\sigma^T K\sigma - \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau + \epsilon/2 \quad (30)$$

따라서 식 (29)과 (30)로부터 최종적으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \sigma, \bar{c}) &\leq -\sigma^T K\sigma - \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau + \epsilon/2 \\ &= -\sigma^T K\sigma - \frac{1}{2} \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau - \frac{1}{2} \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau + \epsilon/2 \\ &\leq -\sigma^T K\sigma - \frac{1}{2} \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau + \epsilon/2 \end{aligned} \quad (31)$$

여기서

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau + \epsilon/2 \quad (32)$$

따라서 Corless and Leitmann [10]의 정의와 연구 결과에 따라  $\sigma(x)$ 와  $\int_a^b \bar{c}^T \Phi \bar{c} d\tau$ 는 균일 궁극 유한하고, 식 (19)로부터  $\bar{\rho}(t)$  역시 균일 궁극 유한하다.

유한 스위칭 주파수를 가진 제어에 있어, 비록  $\sigma(x)$ 가 작다 할지라도 만약  $\bar{\rho}(t)$ 가 슬라이딩 평면 근처에서 매우 큰 값을 가지면 시스템이 빠른 동적 특성을 나타내게 되므로 시스템 궤적은 경계영역 내에 머물지 않고 지나쳐 버릴 수 있다. 이때 반대의 제어 입력이 작용하여 시스템 궤적을 다시 원래의 영역으로 되돌아 가게 한다. 이런 현상은  $\sigma(x)$ 가 충분히 작아서  $\|B^T S^T \sigma(x)\| \bar{\rho}(t) \leq \epsilon$  조건을 지속적으로 만족할 때까지 계속되므로 채터링 현상이 여전히 나타날 수 있다.  $\epsilon$ 값을 크게 설정하면 채터링 현상을 감소시킬 수 있지만 너무 커지면 시스템 궤적이 원점에 결코 도달하지 못하는 상황이 발생한다.

### 3. 시뮬레이션 예제

본 논문에서 제안된 제어 시스템의 성능을 확인하기 위해 Yoo와 Chung[4]이 사용했던 가변 길이 구조를 갖는 펜듈럼을 대상으로 시뮬레이션을 수행하였다. 적절한 파라미터 값을 대입하여 상태 방정식을 정리하면 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + e(t, x)) \\ e(t, x) &= \frac{-10(1 + \cos x_1) \sin x_1 + 0.5(1 + 0.5 \cos x_1) \sin x_1 \cdot x_2^2}{\Delta(x_1)} \\ &\quad + \frac{(1 - \Delta(x_1))u}{\Delta(x_1)} + v(t) \cos x_1 \end{aligned}$$

여기서,  $x = [x_1 \ x_2]^T$ ,  $\Delta(x_1) = 0.25(\cos x_1 + 2)^2$ 이고  $v(t) = 2\cos(3t)$ 로 외란을 나타낸다. 먼저, 설계순서에 의해 슬라이딩 평면을  $\sigma(x) = 7x_1 + x_2 = 0$ 으로 설계하고  $K = 0.1$ 로 선택하면 제안된 적응가변구조제어기는 다음과 같이 기술된다.

$$u_{eq_{nom}} = -7x_2, \quad u_s = -0.1\sigma(x), \quad u_N = -\sigma(x)\bar{\rho}/\|\sigma(x)\|.$$

불확실성의 경계치 추정을 위해 식 (10)의 조건을 만족하는 커널  $\Psi(t, \tau)$ 와 파라미터  $Q$  및 적분 구간은 다음과 같이 설정한다.

$$\Psi(t, \tau) = [1 f(t-\tau)], \quad f(t) = \frac{1}{0.5\sqrt{2\pi}} e^{-0.5(t/0.5)^2}$$

$$Q = \text{diag}[10 \ 100], \quad [a \ b] = [0 \ 0.5].$$

일반적으로 제어 초기 과정에서는 많은 오차가 유발되고 시간이 경과되어 시스템이 안정되면서 오차가 줄어들기 때문에 오차 패턴과 유사한 Gaussian 커널 함수 (Messner, *et al.* [8] 참조)를 사용하여 초기에 파라미터 적응을 크게 할 수 있도록 하였다. 그림 1과 2는 초기값  $x(0) = [\pi/2 \ 0]^T$ 에 대해 각각  $x_1(t)$ 의 응답 특성 및 파라미터 적응과정을 보여준다. 그림에서 볼 수 있듯이 제안된 제어기에 의해 대상 시스템이 점근적으로 안정화되는 것을 볼 수 있다. 그림 2는 각각 불확실성의 실제 경계치와 적응 경계치의 시간에 대한 궤적을 보여 주고 있으며, 적응과정이 진행됨에 따라 적응 경계치가 실제 경계치를 감싸게 됨으로써 시스템 궤적을 슬라이딩 평면에 도달하게 하고 이후 그 평면을 따라 원점으로 점근적으로 수렴하도록 하는데 기여함을 알 수 있다. 그림 3에서는 스위칭 평면상에서의 불연속적인 제어입력에 의해 야기되는 채터링 현상을 보여주고 있다.

다음은 제어입력과 적응기법을 경계영역 개념을 도입하여 수정한 경우에 대해 살펴본다. 그림 4와 5는 경계영역값이  $\epsilon = 2$ 이고  $\Phi = \text{diag}[0.02 \ 0.02]$ 이라 설정했을 때 각각  $x_1(t)$ 의 응답 특성 및 파라미터 적응과정을 보여준다. 그림 6에서 보듯이 채터링 현상이 거의 사라짐을 볼 수 있다.

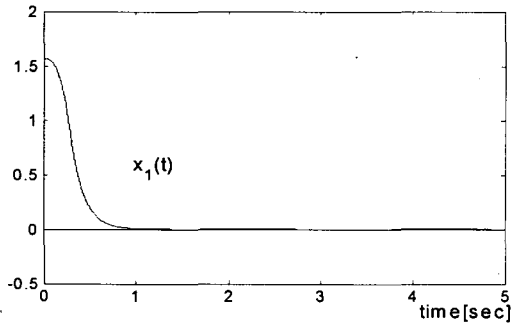


그림 1.  $x_1(t)$ 의 시간 응답  
Fig. 1. Time response of  $x_1(t)$

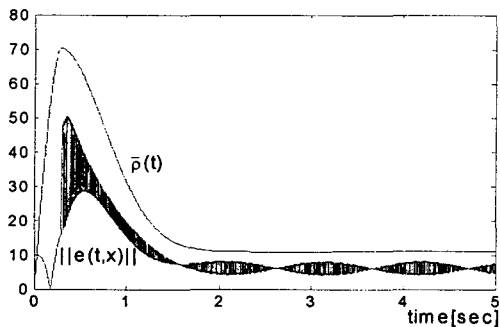


그림 2 파라미터 적응 과정  
Fig. 2 The progress of parameter adaptation

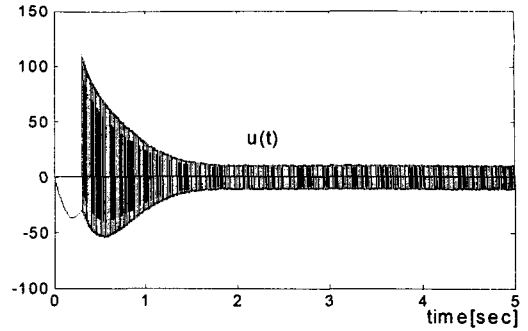


그림 3 제어입력  $u(t)$   
Fig. 3 Control input  $u(t)$

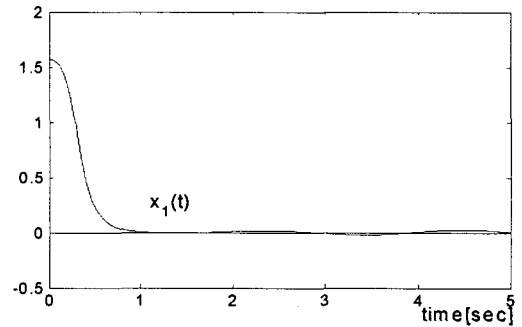


그림 4 연속 제어입력 경우의  $x_1(t)$ 의 시간응답  
Fig. 4 Time response of  $x_1(t)$  in case of continuous control

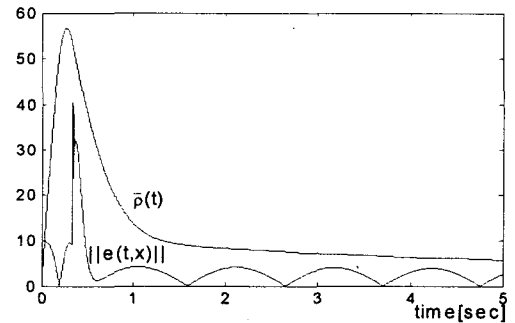


그림 5 연속 제어입력 경우의 파라미터 적응 과정  
Fig. 5 The progress of parameter adaptation in case of continuous control

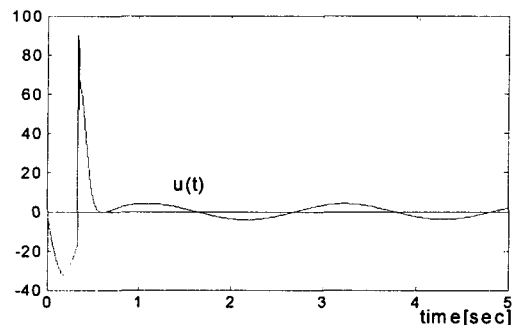


그림 6 연속 제어입력  $u(t)$   
Fig. 6 Continuous control input  $u(t)$

#### 4. 결 론

본 논문에서는 구조 정보조차 얻을 수 없는 불확실성의 경계치를 표현하기 위해 제 1 종의 Fredholm 적분식 즉, 미리 정의된 커널과 미지의 유도 함수의 곱을 적분하는 형태로 수식화 하였고, 미지의 유도함수를 추정하는 적응기법을 제시함으로써 적응 경계치를 예측하는 방법을 제안하였다. 이렇게 얻은 적응 경계치를 이용하여 Lyapunov 안정성 이론을 이용하여 불확실 동적 시스템의 점근적 안정도를 보장하는 슬라이딩 모드 제어를 설계하였다. 제안된 제어기법은 제어입력의 불연속성으로 인해 채터링 현상을 유발한다. 따라서 실제 구현을 위해 경계영역을 도입하여 제어입력과 적응기법이 연속성을 가지도록 수정하였다. 또한, 예제 시뮬레이션을 통해 제안된 제어 시스템이 불확실성을 가진 동적 시스템을 효과적으로 제어한다는 것을 보였다

#### 감사의 글

본 연구는 한경대학교 2001년도 학술연구조성비의 지원에 의한 것임.

#### 참 고 문 헌

[1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, February 1977

[2] R. A. DeCarlo, S. H. Zak, and G. P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial", IEEE Proceedings, vol. 76, pp. 212-232, 1988

[3] Y. H. Chen, "Robust control system design: non-adaptive and adaptive", International Journal of Control, vol. 51, no. 6, pp. 1457-1477, 1990

[4] D. S. Yoo and M. J. Chung, "A Variable structure control with simple adaptation laws for upper bounds on the norm of the uncertainties", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 37, no. 6, pp. 860-865, June 1992

[5] B. Brogliato and A. Trofino Neto, "Practical stabilization of a class of nonlinear systems with partially known uncertainties", Automatica, vol. 31, no. 1, pp. 145-150, 1995

[6] H. Wu, "Continuous adaptive robust controllers guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain nonlinear system", International Journal of Control, vol. 72, no. 2, pp. 115-122, January 1999

[7] G. Arfken. Mathematical methods for physicists, Academic Press, New York, pp. 725-748, 1970

[8] W. Messner, R. Horowitz, W.-W. Kao, and M. Boals, "A New Adaptive Learning Rule", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, no. 2, pp. 188-197, February 1991

[9] V. M. Popov, Hyperstability of control systems, Springer-Verlag, New York, pp. 210-213, 1973

[10] M. J. Corless and G. Leitman, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, no. 5, pp. 1139-1144, May 1981

[11] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic, "Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control", Automatica, vol. 20, no. 5, pp. 583-594, 1984

#### 저 자 소 개



#### 유 등 상 (劉 同 相)

1962년 4월 12일생. 1985년 서울대학교 공과대학 전기공학과 졸업. 1987년, 1992년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사, 공박). 1992년~2000년 LG 생산기술원 책임연구원. 2000년~현재 국립한경대학교 전기공학과 조교수  
Tel : 031-670-5322  
Fax : 031-670-5015  
E-mail : dsyoo@hankyong.ac.kr