

모델 불확실성을 갖는 이차 오실레이터에 대한 근사화된 최대 시간 교란 신호 설계

論 文

52D-4-3

Near Time Maximum Disturbance Design for Second Order Oscillator with Model Uncertainty

劉 寬 鎬*

(Kwan-Ho You)

Abstract - In this paper we propose a disturbance design method to test a system's stability. It is shown that the time maximum disturbance is represented in bang-bang and state feedback form. To maximize the time severity index, the value of disturbance is determined by the associated switch curve. The original switch curve is vulnerable to model uncertainties and takes much calculation time. We propose an improved method to approximate the original switch curve. This reduces the computational time and implements sufficiently to test the stable system. Simulation results show how the approximate switch curve can be used to stress a system by driving it to oscillation along the maximum limit cycle.

Key Words : damped harmonic oscillator, disturbance design, optimal control, switch curve, model uncertainty.

1. 서 론

시간-최적 제어(time-optimal control)는 임의의 초기 상태에서 제한된 크기의 제어기 입력을 사용하여 원하는 목표 상태로 변환시키는 중요한 역할을 해왔다. 일반적으로 최대치 이론(maximum principle)과 동적 계획법(dynamic programming)을 사용하여, 제어 함수는 뱅뱅(bang-bang) 형태를 띤 상태 되먹임 방정식으로 표현된다. 제한된 크기의 교란 신호를 사용하여 평형점으로부터 시간 거리상 최대한 멀어지도록 만들어 안정된 시스템의 성능을 평가하게 된다.

감폭 성질을 갖는 이차 선형 오실레이터에 관한 최대 시간 교란 신호는 일반적으로 뱅뱅 형식으로 표현된다. 이런 뱅뱅 신호들을 구성하기 위한 스위치 곡선은 무한개의 곡선과 각각의 꼬임점들(kink points)을 연결하는 연속적인 곡선으로 이루어져 있다. 지금까지 스위치 곡선은 상태 방정식을 시간의 역순으로 적분하여 전체적인 스위치 곡선의 형태를 유도하였다[1]. 하지만 이 과정은 복잡하고 많은 계산이 필요하였다. 최근에 시스템 매개 변수를 스케일링하는 방법에 기반을 둔 새로운 형태의 고유 스위치 곡선식이 제안되었다[2]. 이 새로운 방법을 통해 스위치 곡선 계산 시간이 줄어들고 시스템 매개 변수에 따라 곡선이 어떻게 변화할 것인가에 관한 예측이 가능해졌다. 본 논문에서는 최대 시간 교란 신호를 제작하기 위한 스위치 곡선을 근사화된 형태로 표현하여, 성능면에서는 고유 스위치 곡선과 근사하며, 제작이 기존의 방법보다 간편한 스위치 곡선 계산 알고리즘을 제안한다.

최근 연구에 의해 이차 시스템에 관한 성능 평가 신호로

상태 되먹임 형태의 교란 신호가 발견되었다[1, 4]. 또한 전달 함수의 분자식에 영점이 추가된 형태의 이차 시스템에 대하여, 시스템 성능을 평가하는 최대-시간 교란 신호 스위치 곡선을 위한 체계적인 신호 합성 방법이 모색되었다[2]. 교란 신호의 스위치 곡선들은 각 구간마다 꼬임점들을 연결시킨 연속적인 곡선의 집합이 된다. 각 꼬임점 근처의 값이 상태 변수들의 초기치로 주어지는 경우, 시스템은 불확실성(model uncertainty)에 쉽게 노출되어 시스템 평가에 장애가 생기기 쉽다. 이 결과로 시간 지연을 이용한 시스템 평가에 영향을 미쳐 최대의 스트레스를 시스템에 인가할 수 없게 된다. 이러한 단점을 극복하기 위해 이차 시스템의 상태방정식 궤적으로부터 근사화된 교란 스위치 곡선을 유도한다. 이러한 관점에서 Newman은 비선형 시스템들의 최적 시간 제어에 대한 스위치 곡선의 근사화 과정을 보여주고 있다[6].

대부분의 이차 시스템에 대한 시간-최적 되먹임 제어기 매개 변수들의 잡음에 매우 민감하다는 것은 잘 알려져 있다. 실제로 잡음이 발생했을 때 상태 되먹임을 이용한 시스템에서는 최대 한계 곡선(maximum limit cycle)을 통한 주기적인 오실레이션(oscillation) 현상이 발생한다. Pao는 삼차의 서보 메카니즘을 위한 근사화된 최적 시간 제어를 제안하였는데, 이를 통해 시스템 매개 변수의 불확실성에 더욱 강인하고 시간 지수를 최소화시키는 최적 제어를 제안하였다[3]. 본 논문에서 구현된 근사화된 최대 시간 교란 신호도 시스템 모델이 불확실한 경우 매개 변수들의 변화에 상당히 둔화된 반응을 보인다. 또한 Kogan은 선형 이차의 최소-최대(minimax) 제어기와 교란 신호 설계에 관한 필요충분조건을 동시에 유도하였다[4]. 제어기는 시간을 최소화하는 방향으로 설계하는 반면에, 시스템의 성능을 평가하기 위한 교란 신호는 성능 지수를 최대화하는 방향으로 설계되었다. 본 논문에서 도출된 결과는 이 최소-최대 방식의 문제 해결기법과 관련이 있다.

* 正 會 員 : 成均館大學校 情報通信工學部 助教授 · 工博
接受日字 : 2002年 11月 28日
最終完了 : 2003年 3月 11日

강인성과 동시에 시간-최적의 조건을 만족시키는 제어를 만들기 위해 몇 가지 방법이 제안되었다. 이차 비선형 시스템에 대해 뱅뱅 제어와 선형 모드 제어를 혼합한 형태의 하이브리드 방식을 사용하여, 제한된 크기의 교란 신호를 안정된 시스템에 인가하였을 경우, 교란 신호를 제거하기 위한 시간 최적의 제어가 설계되었다. Shen은 제한된 크기의 교란 신호가 존재할 때 주파수 영역에서의 최적 제어기 설계에 관해 제안하였다[5]. 본 논문은 시스템의 성능을 평가하기 위한 테스트 신호로써 교란 신호를 설계하며, 강인하고 기존의 방법보다 구현하기 쉬운 교란 신호의 스위치 곡선을 찾는 데 목표를 둔다. 그러기 위해서는 시스템 구현에 있어 근사화된 스위치 곡선을 위한 고유 방정식이 필요하고 이것에 대해서는 다음 장에서 자세히 설명한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. 2장에서는 분자식에 영점이 추가된 분자 동특성을 지닌 하모닉 오실레이터와 성능 분석을 위해 사용될 교란 신호에 관해 간단히 소개한다. 최대의 스트레스를 시스템에 인가하기 위해 제한된 크기의 교란 신호는 그 성능 지수로 평형점으로부터의 최대 지연 시간을 평가 기준으로 세우고, 뱅뱅 형태의 되먹임 방정식으로 표현됨을 보인다. 또한 주어진 안정된 시스템을 평가하기 위해 근사화된 스위치 곡선을 사용하려 한다. 3장에서는 모의 실험을 통해 근사화된 교란 신호의 스위치 곡선을 사용하여 최대 한계 곡선(maximum limit cycle)에 수렴함을 통해 성능 지수가 최대화됨을 보인다. 시스템의 상태들은 근사화되지 않은 최대-시간 교란 신호를 사용했을 때와 차이가 크지 않음을 보여준다. 그리고 시스템 매개 변수가 불확실한 경우에 대해서도 성능 평가가 가능함을 입증한다. 마지막으로 4장에서는 본 논문의 결론을 맺도록 한다.

2. 근사화된 교란 신호 스위치 곡선

2.1 감폭 성질을 갖는 이차 하모닉 오실레이터

다음과 같은 이차 선형 입/출력 미분 방정식에서 출력이 $y(t)$ 이고 유한 입력 $u(t)$ 을 지닌 감폭 성질의 하모닉 오실레이터를 고려한다.

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \tag{1}$$

여기서 $0 < \zeta < 1$ 은 감쇠비를 의미한다. 비감쇠 고유 주파수 ω_n (undamped natural frequency)는 1로 정하여 문제를 일반화시키도록 한다. 입력($|u(t)| \leq 1$)은 제한된 크기의 교란 신호로서 최대 시간 지연(maximal time delay)을 통해 이차 선형 안정 시스템에 대해 가능한 최대의 스트레스를 부여하게 된다. 일반적으로 최대 시간 교란 신호는 뱅뱅 형식의 상태 되먹임 신호로 표현된다[2]. 입력 $u(t)$ 과 출력 $x_1(t)$, 상태 변수($x_1(t) \equiv y(t)$, $x_2(t) \equiv \dot{y}(t)$)를 포함한 상태 방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 2\zeta x_2(t) + u(t) \end{aligned} \tag{2}$$

다음은 이차 시스템 (1)에 대해 성능지수를 최대로 만들어 시스템에 최대의 스트레스를 인가하는 교란 신호를 설계한다. 먼저 시스템 (2)의 평가를 위한 성능 지수로 안정된 평형점(stable equilibrium point)으로부터 시작하여 최종적으로 평형점에서 무한대의 시간 지연으로 다시 초기 평형점으로 돌아오지 못하도록 만드는 것이다. 이 때 두 가지 교란 신호를 생각할 수 있다. 첫째는 상태 변수들을 초기 평형점으로부터 무한대로 멀리 보내는 것이다. 하지만 이것은 제한된 크기의 교란 신호로는 한계가 있다. 두 번째 방법은 오실레이션을 통한 주기적인 진동을 유도하여 상태 변수들이 최대 한계 곡선을 따라서 움직이도록 한다. 성능지수는 다음과 같이 정할 수 있다.

$$J = \max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_f} dt$$

성능지수를 최대로 만드는 교란 신호를 설계하기 위해 최대치 이론을 이용하여 해밀토니안(Hamiltonian) 함수는 다음과 같이 정한다.

$$H = 1 + \eta_1(x_2) + \eta_2(-x_1 - 2\zeta x_2 + u)$$

해밀토니안 함수 H 를 이용하여 시스템 보조 방정식은

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) &= \eta_2(t) \\ \dot{\eta}_2(t) &= -\eta_1(t) + 2\zeta\eta_2(t) \end{aligned} \tag{3}$$

과 같다. 성능지수를 최대화시키는 제한된 크기의 교란 입력 신호는

$$u(t) = \text{sgn}[\eta_2(t)]$$

이며, 여기서 $\text{sgn}(\cdot)$ 은 부호 함수(signum function)를 의미한다. 교란 신호는 스위치 곡선에 따라 값을 결정하게 되는데, 스위치 곡선은 괄호 안의 조건 $\eta_2(t) = 0$ 을 이용하여 시간에 따라 역순(time backwards)으로 적분하여 계산하면 된다. 따라서 그림 1은 성능지수 J 를 최대화시키는 교란 신호와 그에 연관된 스위치 곡선의 예를 보여준다.

다음으로 고유 교란 스위치 곡선을 가지고 근사화된 스위치 곡선을 유도한다. 시스템 방정식 (2)는 일정한 교란 신호 값($u(t) \equiv 1, 0 \leq t \leq T_s$)에 대해 다음 스위칭이 일어나기 전까지($0 \leq t \leq \pi/\sqrt{1-\zeta^2}$) 다음과 같은 근의 방정식을 갖는다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Delta - \Delta e^{-\zeta t} \cos(at) - \frac{\Delta \zeta}{a} e^{-\zeta t} \sin(at) \\ x_2(t) &= \frac{\Delta}{a} e^{-\zeta t} \sin(at) \end{aligned} \tag{4}$$

$\Delta=1$ 이며, $\alpha \equiv \sqrt{1-\zeta^2}$ 를 의미한다. 만약 $v(t)=-1$ 이면, 식 (4)에서 $\Delta=-1$ 이 된다. 구간 $0 \leq t \leq \pi/\alpha$ 에서 근에 관한 식 (4)는 이차 시스템에서 스위치 곡선의 첫째 부분에 관한 식이 된다. 그림 1에서 스위치 곡선의 두 번째 부분 이상부터는 첫 번째 곡선이 지수 함수적으로 감소함을 이용하여 구하면 된다. 그림 1에서 보듯이 각 스위치 구간의 꼬임점들은 $A_\infty = (1 + e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}})/(1 - e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}})$, $B_\infty = 0$ 로 수렴하게 된다.

특히 각 꼬임점 주변에서는 스위치 곡선의 큰 곡률 변화를 보인다. 만약 상태 값들이 꼬임점 근처로 근접할 경우, 비록 작은 양의 모델 불확실성이 가해지게 되어도 성능지수를 최대화시키기 어려워진다. 따라서 스위치 곡선의 각 부분에서의 접선을 이용한 근사화된 형태의 스위치 곡선을 유도하여 모델 불확실성에 대해 좀더 강인한 성질을 갖는 교란 신호를 제안한다. 고유 스위치 곡선에 대한 근사화된 스위치 곡선의 식은 다음과 같다.

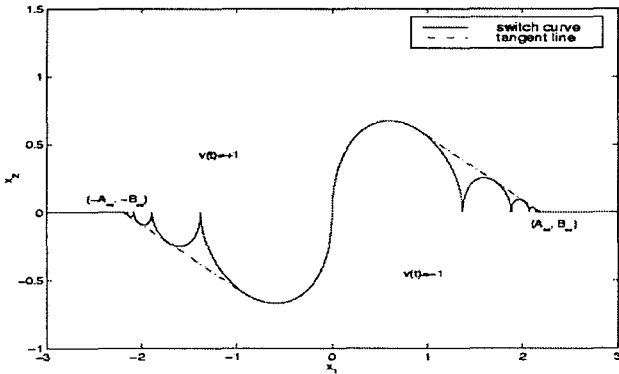


그림 1 교란 신호 스위치 곡선과 (A_∞, B_∞) 으로부터의 접선($\zeta=0.3$)

Fig. 1 Disturbance switch curve and tangent line from (A_∞, B_∞) with $\zeta=0.3$

정리 1. 최대 한계 곡선 Γ^* 내에서 근사화된 스위치 곡선은 두 부분으로 구성된다. $W(x_1, x_2) = W_+ \cup W_-$. 여기서 W_+ 는 근의 방정식 (4)에서 $v(t)=1$ 로 구해지며 스위치 곡선의 반을 나타낸다. 구간 $0 \leq t < t^*$ 동안 스위치 곡선은 식 (4)에 의해 결정되며, t^* 이후 근사화된 스위치 곡선은 접선을 이용한 직선으로 표현된다.

$$x_2(t) = \Delta(t^*)[x_1 - A_\infty] + B_\infty$$

$$\Delta(t^*) = -\frac{\sin(\sqrt{1-\zeta^2}t^* - \phi)}{\sin(\sqrt{1-\zeta^2}t^*)}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

식 (5)의 t^* 는 교란 스위치 곡선을 식 (4)와 같이 정하면서 첫 번째 스위치 곡선이 (A_∞, B_∞) 로 연결되는 접선의 시

작점을 의미한다. 또한 $\Delta(t^*)$ 는 그 점에서의 접선의 기울기를 나타낸다. W_- 는 $v(t)=-1$ 을 이용한 스위치 곡선의 다른 나머지 부분이며, W_+ 와 W_- 는 원점에 대해 대칭이다.

증명: 그림 2에서 최대 한계 곡선 Γ^* 내부에 W_+ 로 분류된 스위치 곡선이 있다. W_+ 는 구간 $0 \leq t \leq t^*$ 에서 초기 조건 $(x_1^0=0, x_2^0=0)$, $v(t)=+1$, 그리고 식 (4)에 의해 결정된다. t^* 이후 스위치 곡선은 스위치 곡선 부분과 만나는 접선에 의해 대체된다. 시간에 관한 함수로서 기울기 $\Delta(t)$ 의 방정식은 다음 관계에서 구해진다.

$$\Delta(t) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}t) - \zeta \sin(\sqrt{1-\zeta^2}t)}{\sin(\sqrt{1-\zeta^2}t)}$$

$$= -\frac{\sin(\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi)}{\sin(\sqrt{1-\zeta^2}t)}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

그리고 상태 변수 (x_1^*, x_2^*) 는 시간 t^* 에서 근사화된 스위치 접선 위의 값을 갖는다. 따라서 접선 방정식은 $x_2^* = \Delta(t^*)(x_1^* - A_\infty) + B_\infty$ 로 표현되며, 이 식으로부터 t^* 는 다음과 같이 결정된다.

$$1 - e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} + \frac{2}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{\zeta t^*} \sin(\sqrt{1-\zeta^2}t^* - \phi) = 0 \quad (6)$$

스위치 곡선의 다른 반쪽인 W_- 는 초기 상태 $(x_1^0=0, x_2^0=0)$ 와 $v(t)=-1$ 에 의해 결정된다. 스위치 곡선은 대칭이므로 W_- 는 원점을 기준으로 W_+ 를 회전 이동하여 구할 수 있다.

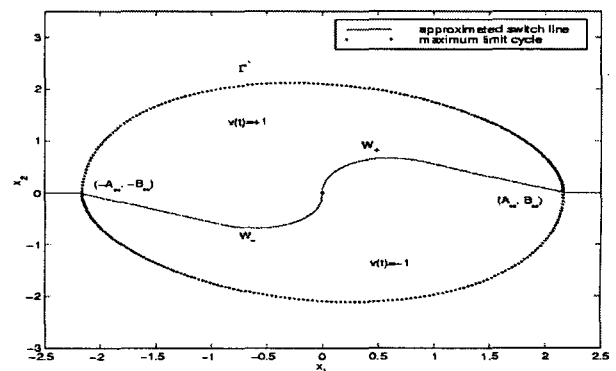


그림 2 근사화된 교란 신호 스위치 곡선, $\zeta=0.3$.

Fig. 2 Approximate disturbance switch line with $\zeta=0.3$.

그림 2에서처럼 R_+ 를 스위치 곡선 W 및 부분에 있는 상태 변수들의 집합으로 정의하고, R_- 를 스위치 곡선 W 아

래 부분으로 정의한다. 즉,

$$R_+ = \{(x_1, x_2): \text{if } (x_1, \hat{x}_2) \in W, \text{ then } x_2 > \hat{x}_2\} \quad (7)$$

$$R_- = \{(x_1, x_2): \text{if } (x_1, \hat{x}_2) \in W, \text{ then } x_2 < \hat{x}_2\}$$

스위치 곡선 위의 W_+ 에서는 $v^* = +1$, W_- 에서는 $v^* = -1$ 로 정한다. 따라서 상태변수를 이용한 최대 시간 교란 신호는 다음과 같다.

$$v^* = \begin{cases} v^*(x_1, x_2) = +1, & \text{for all } (x_1, x_2) \in R_+ \cup W_+ \\ v^*(x_1, x_2) = -1, & \text{for all } (x_1, x_2) \in R_- \cup W_- \end{cases}$$

그림 2는 근사화된 교란 신호 스위치 곡선을 보여준다. 이 그림에서 스위치 곡선을 둘러싼 폐곡선은 최대 한계 곡선이다. 최대 한계 곡선 바깥쪽 스위치 곡선은 x_1 -축으로 ($x_2=0$) 직선이므로 근사화가 불필요하다. 모든 상태 변수들의 초기 값들은 최대 한계 곡선에 접근하여 주기 $T_s = \pi/\sqrt{1-\xi^2}$ 마다 발진하게 된다. 이런 근사화된 교란 신호 스위치 곡선을 사용한 모의 실험 결과는 3장에서 논의된다. 다음으로 유한개의 영점이 분자식에 추가된 분자 동특성을 지닌 하모닉 오실레이터의 경우에 대해 살펴본다.

2.2 감쇠 및 분자 동특성을 지닌 이차 하모닉 오실레이터

이 장에서는 미분된 교란 신호를 사용하는 분자 동특성 (numerator dynamics)을 지닌 이차 하모닉 오실레이터에 대해 살펴본다. 출력 $y(t)$ 과 제한된 입력 $v(t)$ 을 사용한 이차 하모닉 오실레이터에 관한 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \frac{\omega_n^2}{\beta} v(t) + \omega_n^2 v(t) \quad (8)$$

감쇠비 ζ 와 비감쇠 자연 주파수 ω_n 에 관한 조건은 2.1절에서와 같다. 분자 동특성을 결정하는 β 는 $0 < \beta < \infty$ 의 값을 취하며, $s = -\beta$ 는 최소 위상 영점(minimum phase zero)을 의미한다. 최대 교란 신호에 관한 스위치 곡선을 구하기 위해 상태 변수를 다음과 같이 정의한다. $x_1(t) \equiv y(t)$, $x_2(t) \equiv \dot{y}(t) - (1/\beta)v(t)$. 새로운 상태 변수 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 를 사용한 입/출력 방정식은

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \frac{1}{\beta} v(t) \quad (9)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2\zeta x_2(t) + \left(1 - 2\frac{\zeta}{\beta}\right)v(t)$$

스위치 곡선을 찾기 위해 2.1절에서의 과정을 따라 보조방정식과 해밀토니안 방정식을 정의한다.

$$H = 1 + \eta_1(x_2 + \frac{1}{\beta}v) + \eta_2[-x_1 - 2\zeta x_2 + (1 - 2\frac{\zeta}{\beta})v]$$

최대치 이론을 따라 분자 동특성을 갖는 이차 하모닉 오실레이터에서의 최대 교란 신호는 다음과 같이 표현된다.

$$v(t) = \text{sgn}\left[\frac{1}{\beta}\eta_1(t) + (1 - 2\frac{\zeta}{\beta})\eta_2(t)\right]$$

그림 3은 시간의 역순으로 구한 교란 스위치 곡선의 예를 보여준다. 시스템 방정식 (9)는 일정한 교란 신호값 ($v(t) \equiv 1, 0 \leq t \leq T_s$)에 대해 다음 스위칭이 일어나기 전까지 ($0 \leq t \leq \pi/\sqrt{1-\xi^2}$) 다음과 같은 근의 방정식을 갖는다.

$$x_1(t) = \Delta + (x_1^0 - \Delta)e^{-\xi t} \cos(at) + \frac{\Delta - \Delta\beta\xi + \beta\xi x_1^0 + \beta x_2^0}{a\beta} e^{-\xi t} \sin(at) \quad (10)$$

$$x_2(t) = -\frac{\Delta}{\beta} + \frac{1}{\beta}(\beta x_2^0 + \Delta)e^{-\xi t} \cos(at) + \frac{\Delta\beta - \Delta\xi - \beta x_1^0 - \beta\xi x_2^0}{a\beta} e^{-\xi t} \sin(at)$$

$\Delta = +1$ 이며, $a = \sqrt{1-\xi^2}$ 를 의미한다. 만약 $v(t) = -1$ 이면, 식 (10)에서 $\Delta = -1$ 이 된다. 구간 $0 \leq t \leq \pi/a$ 에서 근에 관한 식 (10)은 분자 동특성을 갖는 이차 시스템에서 스위치 곡선의 첫째 부분에 관한 식이 된다. 그림 3에서 스위치 곡선의 두 번째 부분 이상부터는 첫 번째 곡선이 지수 함수적으로 감소함을 이용하여 구하면 된다. 이 그림에서 각 스위치 곡선의 꼬임점들은 (A_∞, B_∞) 으로 수렴하게 되며,

$$A_\infty = \frac{1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}}{1 - e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$B_\infty = -\frac{1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}}{\beta - \beta e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}}$$

과 같다. 고유 스위치 곡선을 이용한 근사화된 스위치 곡선은 그림 3에서처럼 점선으로 표시되며, 다음과 같이 표현된다.

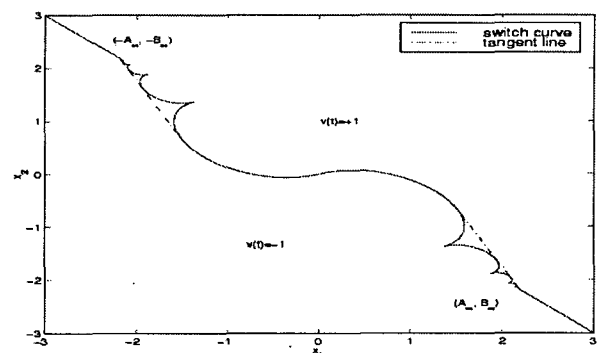


그림 3 분자 동특성을 갖는 스위치 곡선과 (A_∞, B_∞) 으로부터의 접선($\beta=1, \xi=0.3$)

Fig. 3 Switch curve with numerator dynamics and tangent line from (A_∞, B_∞) with $\beta=1, \xi=0.3$.

정리 2. W, W_+, W_- 에 대한 정의는 정리 1에서와 같다. $0 < \beta < \infty$ 과 같은 분자 동특성을 갖는 이차 시스템에서의 근사화된 스위치 곡선은

$$x_2 = \Delta(t^*)[x_1 - A_\infty] + B_\infty$$

$$\Delta(t^*) = \frac{\alpha(\beta - 2\xi)\cos(at^*)}{\alpha\cos(at^*) + (\beta - \xi)\sin(at^*)} - \frac{(1 + \xi\beta - 2\xi^2)\sin(at^*)}{\alpha\cos(at^*) + (\beta - \xi)\sin(at^*)} \quad (11)$$

식 (11)의 t^* 는 교란 스위치 곡선을 식 (12)와 같이 정하면서 첫 번째 스위치 곡선이 (A_∞, B_∞) 로 연결되는 점선의 시작 점을 의미한다. 또한 $\Delta(t^*)$ 는 그 점에서의 점선의 기울기를 나타낸다. W 는 $v(t) = -1$ 을 이용한 스위치 곡선의 다른 나머지 부분이며, W_+ 와 W_- 는 원점에 관해 대칭이다.

증명: 스위치 곡선 위의 점 $x_1(t^*), x_2(t^*)$ 으로부터 근사화된 스위치 곡선은 시작되며, 기울기에 관해서는

$$\Delta(t) = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dt} \Big/ \frac{dx_1}{dt} \text{ 을 이용한다.}$$

$$\Delta(t^*) = \frac{\alpha(\beta - 2\xi)\cos(at) - (1 + \xi\beta - 2\xi^2)\sin(at)}{\alpha\cos(at) + (\beta - \xi)\sin(at)}$$

한편 시간 $t = t^*$ 에서 상태 값 (x_1^*, x_2^*) 역시 근사화된 스위치 곡선 위에 위치하므로, $x_2^* = \Delta(t^*)(x_1^* - A_\infty) + B_\infty$ 와 같다. 따라서 고유 스위치 곡선과 근사화된 스위치 곡선을 이용하여 두 스위치 곡선이 만나는 점 t^* 값은 다음 식에서 결정된다.

$$1 - e^{\frac{\zeta}{\alpha}\pi} + \frac{2}{\alpha} e^{\zeta t} \sin(at^* - \phi) = 0 \quad (12)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{\xi}\right)$$

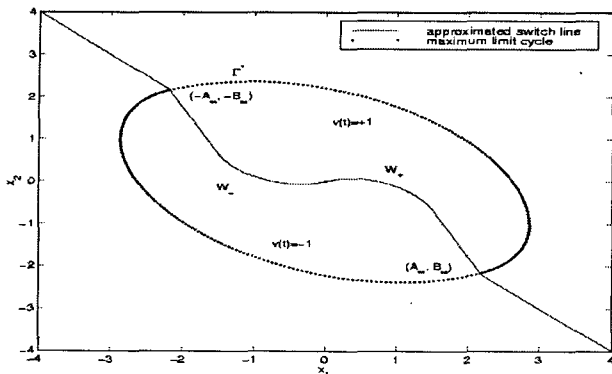


그림 4 근사화된 교란 신호 스위치 곡선 ($\beta=1, \zeta=0.3$).
Fig. 4 Approximate disturbance switch line ($\beta=1, \zeta=0.3$).

그림 4는 분자 동특성을 갖는 이차 시스템에 관한 최대 시간 교란 신호의 근사화된 스위치 곡선을 나타낸다. 그림에서 바깥쪽의 점선은 최대 한계 곡선을 의미한다. 상태 변수들의 초기 값을 최대 한계 곡선내의 임의의 값으로 정한 후 근사화된 스위치 곡선을 사용하면 상태 변수는 최대 한계 곡선을 최단 시간에 접근하여, 때 $T_s = \pi/\sqrt{1-\xi^2}$ 초의 스위칭 시간마다 최대 한계 곡선을 따라 오실레이션 현상을 일으킨다. 참고로 식 (8)에서 $\beta \rightarrow \infty$ 인 경우, 제어 시스템은 분자 동특성이 없는 일반 하모닉 오실레이터가 된다. 이 때 근사화된 스위치 곡선에 관한 식은 정리 1을 따라 정하게 된다. 또한 제한 입/출력(BIBO) 시스템에서의 L_∞ -gain은 최대 한계 곡선의 최대값 $A_\infty = \left(1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right) / \left(1 - e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\right)$ 로 수렴하게 된다.

3. 모의 실험 결과

근사화를 통한 교란 신호 스위치 곡선은 고유 스위치 곡선보다 구현이 용이하다. 근사화된 스위치 곡선은 그림 2와 그림 4에서 보듯이 하나의 곡선 부분과 직선의 형태로 표현된다. 근사화된 스위치 곡선의 효과를 알아보기 위해 다음의 두 가지 경우에 관해 생각해본다.

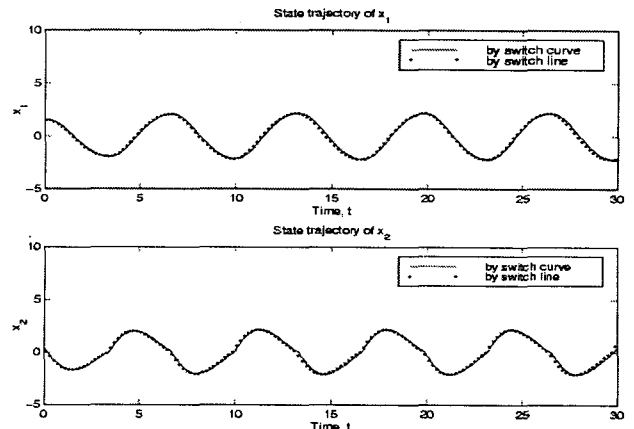


그림 5 이차 하모닉 오실레이터에 관한 상태 변수들의 궤적, $\zeta=0.3$.

Fig. 5 State trajectory for second order harmonic oscillator with $\zeta=0.3$.

예제 1: 먼저 분자 동특성이 없는 이차 하모닉 오실레이터 ($\zeta=0.3$)에 관해 실험한다. 그림 2의 근사화된 스위치 곡선을 이용하면 모든 상태 변수들이 최대 한계 곡선으로 접근하게 된다. 그림 5는 최대 한계 곡선내의 초기 값으로부터 시작하여 시간에 따른 상태 변수의 궤적을 보여준다. 그림 5에서 실선은 고유 스위치 곡선을 사용한 경우이며, 점선은 근사화된 스위치 곡선을 사용한 상태 변수의 궤적을 보여준다. 이 경우 고유 스위치 곡선과 근사화된 스위치 곡선의 차이점

을 살펴보기 위해 두 곡선의 사이값($x_1^0=1.5, x_2^0=0.3$)을 초기조건으로 정한다. 이런 특별한 초기 값을 사용할 경우에서도 그림 5에서처럼 두 상태 변수의 궤적은 유사함을 보여준다. 엄격한 의미에서 고유 스위치 곡선을 사용할 경우가 짧은 시간에 오실레이션을 유도할 수 있지만, 실제 시스템의 구현에서는 한계가 따르게 된다.

시스템 불확실성(불확실한 매개 변수, 모델링 오차, 외부 잡음)으로 인하여 시스템의 강인성은 줄어들며 시스템의 특성을 테스트하는데 어려움이 따른다. 이런 이유로 근사화된 스위치 곡선을 사용할 경우 여러 단점을 보완할 수 있다. 첫째로 스위치 곡선 계산상의 소요 시간을 줄일 수 있다. 둘째로는 스위치 곡선에서 생기는 꼬임점 부분을 없애 불확실성으로 인해 발생하는 스위칭 오차를 줄일 수 있다. 또한 그림 5에서처럼 근사화된 스위치 곡선을 사용하더라도 고유 스위치 곡선과 성능 지수를 최대화하는 데 큰 차이가 없음을 알 수 있다.

제안된 교란 신호의 스위치 곡선이 모델 불확실성에 얼마만큼 강인한가를 알아보기 위해 상태 방정식을 다음과 같이 세운다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \delta_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 2\zeta x_2(t) + \delta_2(x_1, x_2) + v(t) \end{aligned} \quad (13)$$

모의 실험에서 모델 불확정도는 $|\delta_1(x_1, x_2)|, |\delta_2(x_1, x_2)| \leq \bar{\delta}$ 로 제한된다고 가정한다. 따라서 $\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot)$ 는 각각 $\bar{\delta}\sin(x_1), \bar{\delta}\cos(x_2)$ 로 정한다. 그림 6은 모델 불확실성이 첨가된 하모닉 오실레이터에서 상태 응답이 최대 한계 곡선을 따라 발진함을 보여준다.

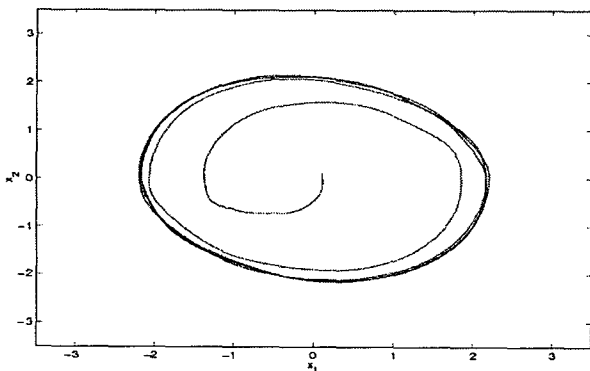


그림 6 모델 불확실성을 가진 상태 변수의 궤적과 최대 한계 곡선, $\zeta=0.3, |\delta|=0.1$.

Fig. 6 State trajectories and maximum limit cycle with model uncertainty, $\zeta=0.3, |\delta|=0.1$.

예제 2: 다음으로 분자 동특성($\beta=1, \zeta=0.3$)을 지닌 이차 하모닉 오실레이터에 관해 살펴본다. 근사화된 스위치 곡선은 정리 2를 따라 구하게 된다. 그림 7은 근사화된 스위치 곡선을 사용한 경우 그 효율성을 보여준다. 그림 7에서 실선

은 고유 스위치 곡선을 사용한 경우이며, 점선은 근사화된 스위치 곡선을 사용한 상태 변수의 궤적을 보여준다. 그림 7을 통해 근사화된 스위치 곡선을 사용하여 상태 변수들은 발진을 하게되며, 따라서 성능지수는 최대가 됨을 알 수 있다.

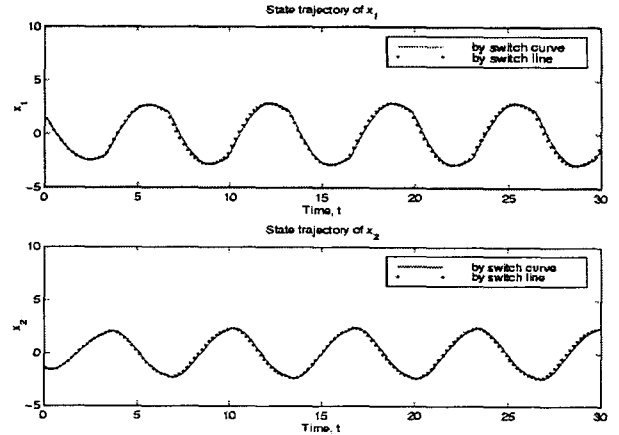


그림 7 분자 동특성을 갖는 하모닉 오실레이터에서 상태 변수들의 궤적, $\beta=1, \zeta=0.3$.

Fig. 7 State trajectories for harmonic oscillator with numerator dynamics, $\beta=1, \zeta=0.3$.

예제 1에서처럼 모델 불확실성이 있는 경우 제안된 스위치 곡선의 효율성을 알아보기 위해 최소 위상 제로를 갖는 하모닉 오실레이터를 사용한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + \delta_1(x_1, x_2) + \frac{1}{\beta} v(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) - 2\zeta x_2(t) + \delta_2(x_1, x_2) \\ &\quad + (1 - 2\frac{\zeta}{\beta})v(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$\delta_1(\cdot), \delta_2(\cdot)$ 는 모델 불확실성을 의미하며 예제 1에서처럼 $\bar{\delta}$ 로 제한되었다고 가정한다. 그림 8은 제한된 크기의 모델 불확실성이 첨가된 경우라도 분자 동특성을 갖는 이차 시스템에서 모든 상태 변수들은 최대 한계 곡선에 근접하여 발진함을 보여준다.

참고로 최대 한계 곡선 외부의 값을 상태 변수의 초기 값으로 정하는 경우에도 마찬가지로 상태 변수들은 최대 한계 곡선을 따라 발진하게 된다. 이때 사용되는 스위치 곡선은 분자 동특성이 없는 일반 하모닉 오실레이터의 경우에는 x_1 -축($x_2=0$)이 되며, 분자 동특성을 갖는 이차 하모닉 오

실레이터에서는 $x_2 = -\frac{1}{\beta}x_1$ 과 같은 직선의 형태로 표현된다(그림 2, 4 참조). 최대 한계 곡선 밖에서 스위치 곡선은 직선이므로 근사화할 필요없이 고유 스위치 곡선을 사용하게 된다. 따라서 그림 9에서 보듯이 상태 변수의 초기 값을 최대 한계 곡선 외부의 점($x_1^0=2.5, x_2^0=2.5$)으로 정한 경우라도 모든 상태 변수들은 최대 한계 곡선을 따라 발진함을 알 수 있다.

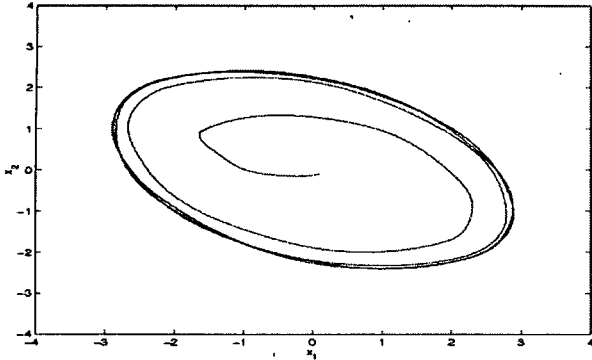


그림 8 상태 변수들의 궤적과 최대 한계 곡선,
 $\beta=1, \zeta=0.3, |\delta|=0.1$.
 Fig. 8 State trajectory and maximum limit cycle,
 $\beta=1, \zeta=0.3, |\delta|=0.1$.

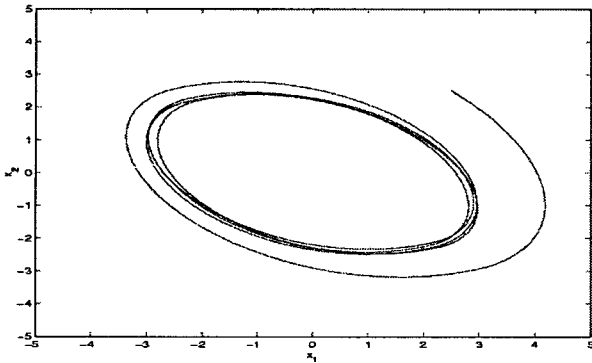


그림 9 최대 한계 곡선 외부에서의 상태 변수 궤적,
 $\beta=1, \zeta=0.3, |\delta|=0.1$.
 Fig. 9 State trajectory outside maximum limit cycle,
 $\beta=1, \zeta=0.3, |\delta|=0.1$.

4. 결 론

본 논문에서는 최대 시간 지연 기법을 사용하여 안정된 시스템의 성능 평가 방법에 관해 기술하였다. 최대 시간 교란 신호를 사용하여 평형점으로부터 시간 거리상 멀어지는 방법으로 발진 현상을 일으키도록 하였다. 교란 신호를 만들기 위해 고유 스위치 곡선을 만들게 되는데, 스위치 곡선에서 궤임점 근처에서 모델 불확실성등 여러 외부 요인에 취약함을 보였다. 또한 고유 스위치 곡선 제작에 따르는 계산 시간을 줄이기 위해 본 논문에서는 근사화된 스위치 곡선 제작 방법을 제안하였다.

제한된 스위치 곡선을 사용한 교란 신호를 이용하여 시스템의 성능 지수는 최대가 되었으며, 상태 변수는 일정한 스위칭 간격을 두고 최대 한계 곡선을 따라 발진하게 된다. 이 최대 한계 곡선의 크기는 제한된 입/출력에서의 L_{∞} -gain과 상관됨을 알 수 있다. 모의 실험을 통해 모델 불확실성을 첨가한 경우에 대해서도 스위치 곡선은 강인성을 보여주었다.

감사의 글

이 논문은 성균관대학교의 2001학년도 석천연구비에 의하여 연구되었으며, 학교지원에 감사드립니다.

참 고 문 헌

- [1] Luo, J.C. and Lee, E.B., "A Closed Analytic Form for the Disturbance switch Curve of Some Second Order Linear Systems," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. 45, pp. 102-105, 2000.
- [2] You, K.H. and Lee, E.B., "Time Maximum Disturbance Design for Linear Stable Systems: A Model Predictive Scheme," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 46, pp. 1327-1332, 2001.
- [3] Pao, L.Y. and Franklin, G.F., "The Robustness of a Proximate Time-Optimal Controller," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 39, pp. 1963-1966, 1994.
- [4] Kogan, M., "Solution to the Inverse Problem of Minimax Control and Worst Case Disturbance for Linear Continuous-Time Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 43, pp. 670-674, 1998.
- [5] Shen, S.K., Lee, T.T., and Wang, B.C., "Frequency domain design method for uncertain systems under some unknown but bounded disturbances," IEE Proc., Control Theory Appl., vol. 144, pp. 225-232, 1997.
- [6] Newman, W.S., "Robust Near Time-Optimal Control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 35, pp. 841-844, 1990.

저 자 소 개



유 관 호(劉寬鎬)

1970년 2월 24일생. 1993년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업. 1996년 동 대학원 전기및전자공학과 졸업(공학석). 2000년 University of Minnesota 전자공학과 졸업(공학박). 2000년~2001년 Texas A&M University-Kingsville 전자공학과 조교수. 2001년~현재 성균관대학교 정보통신공학부 조교수.

Tel : 031-290-7148, FAX : 031-290-7231

E-mail : khyou@ece.skku.ac.kr