

## Robust Tracking Control of Nonholonomic Systems

楊 正 敏\*

(Jung-Min Yang)

**Abstract** - A robust tracking control for nonholonomic dynamic systems is proposed in this paper. Since nonholonomic dynamic systems have constraints imposed on motions that are not integrable, i.e., the constraints cannot be written as time derivatives of some functions of generalized coordinates, advanced techniques are needed for their control. It is shown that if the state of nonholonomic systems is mapped into a bounded space by a coordinate transformation, a robust controller for dynamic models of nonholonomic systems with input disturbances can be designed using sliding mode control. Stability and robustness of the proposed controller are proved in the Lyapunov sense. Numerical simulations on the trajectory tracking of a two-wheeled mobile robot are conducted to validate the effectiveness of the proposed controller.

**Key Words** : nonholonomic dynamic systems, robust control, coordinate transformation, mobile robots

## 1. 서 론

비홀로노믹 동적 시스템은 적분 불가능한 제한조건이 상태 변수 사이에 존재하는 시스템으로서, 일반적인 상태 궤환(state feedback) 제어 기법으로는 안정화될 수 없는 난제를 지니고 있다[1]. 이러한 문제점 때문에 비홀로노믹 시스템의 제어에 관한 연구는 지난 20여 년 간 많은 관심을 끌어왔다[2][3]. 이러한 연구 결과 중에서 불연속 시불변 제어(discontinuous time-invariant control) 기법은 주로 비홀로노믹 시스템의 모델 불확실성을 극복하기 위한 방법으로 많이 활용되어 왔다. 비홀로노믹 시스템은 매개변수의 불확실성, 외부 외란, 마찰력 및 부하(payload)의 변화 등 다양한 원인 때문에 모델 내부에 불확실성이 존재하는데, 시스템의 안정화와 모델 불확실성 극복을 동시에 이루기 위해서는 불연속 시불변 제어 같은 견실 제어(robust control) 기법을 적용해야 한다. 불연속 시불변 제어 기법 중 슬라이딩 모드 제어 기법을 이용한 연구 결과로는 Su 등이 제안한 위치 및 힘 제어[4], Xu와 Huo의 체인 시스템(chained system)을 이용한 제어[5], Yang과 Kim이 제안한 바퀴 구동 이동 로봇을 위한 슬라이딩 모드(sliding mode) 제어[6] 등이 있다.

본 논문에서는 저자의 선행 연구 [6]을 확장하여 일반적인 비홀로노믹 시스템의 추종 제어를 위한 견실 제어 기법을 제안한다. 본 논문에서는 우선 비홀로노믹 시스템의 상태 좌표를 유계 공간(bounded space)으로 변환하는 좌표 변

환(coordinate transformation)을 구한 후 비홀로노믹 시스템의 동적 방정식을 궤환 선형화(feedback linearization) 방법으로 선형화시킨다. 그런 다음 시스템의 상태 변수 오차가 모두 0으로 점근적으로 수렴하도록 하는 슬라이딩 모드 제어를 설계하고 리아프노프(Lyapunov) 안정성 분석을 통하여 제안된 제어기의 안정성을 증명한다. 또한 슬라이딩 모드 제어 이론을 바탕으로 시스템에서 입력 외란이 존재해도 제어기가 견실함을 보인다. 비홀로노믹 특성을 지니는 바퀴 구동 이동 로봇의 주행 제어 모의 실험을 통하여 제안된 제어기의 성능을 입증한다.

본 논문의 우수성은 일반적인  $n$ 차 비홀로노믹 시스템의 추종 제어 문제에 대해서 슬라이딩 모드를 구성할 수 있음을 입증한다는 것이다. [4],[7] 등에서도 슬라이딩 모드 제어가 비홀로노믹 시스템의 추종 제어 문제에 응용되었지만 상태 변수의 일부분만이 안정화되었다. 본 논문에서 제안하는 제어기는 상태 변수 오차 전부를 0으로 수렴시킬 수 있다. 본 연구의 또하나의 기여도는 입력 토크 오차나 외부 외란이 비홀로노믹 시스템에 영향을 미치는 경우에 대한 문제를 해결하였다는 데 있다. 지금까지 비홀로노믹 시스템의 견실 제어에 대한 연구가 주로 시스템의 관성질량행렬(inertia matrix) 내에 존재하는 매개 변수의 불확실성을 극복하는 문제에 관한 것들이 많았으나[8],[9] 본 연구에서는 토크 입력에 외란이 존재할 때 견실한 제어기를 설계하는 방법을 제시한다.

## 2. 비홀로노믹 동적 시스템 모델

$m$ 개의 비홀로노믹 제한조건 가진  $n$ 차 동적 시스템의 오일러-라그랑제(Euler-Lagrangian) 운동방정식은 다음과 같

\* 正 會 員 : 大邱가톨릭대 電子工學科 專任講師 · 工博

接受日字 : 2002年 8月 29日

最終完了 : 2002年 11月 18日

다[4].

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)\tau + J^T(q)\lambda. \quad (1)$$

이때  $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ 은  $n \times 1$  좌표계 상태 변수 벡터이고,  $M(q)$ 는  $n \times n$  관성질량행렬,  $V(q, \dot{q})$ 는  $n \times 1$  원심력 및 코리올리(Coriolis) 힘 벡터,  $G(q)$ 는  $n \times 1$  중력 벡터,  $B(q)$ 는  $n \times r$  입력 변환 행렬,  $\tau$ 는  $r \times 1$  입력 토크 벡터,  $J(q)$ 는  $m \times n$  자코비안(Jacobian) 행렬,  $\lambda$ 는  $m \times 1$  라그랑제 승수(Lagrangian multiplier) 벡터이다. 좌표계 벡터 사이에 존재하는 비홀로노믹 제한조건은 다음과 같이 기술된다.

$$J(q)\dot{q} = 0. \quad (2)$$

일반적으로 비홀로노믹 시스템의 입력 차수는 시스템 차수와 비홀로노믹 제한조건 수를 뺀 것과 같다 ( $r = n - m$ ). 본 논문에서도 이러한 조건이 만족된다고 가정한다. (2)의 제한조건을 (1)의 방정식에 반영하기 위해서  $J(q)$ 의 영공간(null space)을 생성(span)하는 벡터들로 이루어진  $n \times (n - m)$  행렬  $S(q)$ 를 도입한다. (2)로부터  $\dot{q}$ 에 대해서 다음과 같은 식을 만족하는  $(n - m) \times 1$  벡터  $z$ 를 찾을 수 있다.

$$\dot{q} = S(q)z. \quad (3)$$

$z$ 는  $\dot{q}$ 와 대응되는 내부 상태 변수(internal state variables)로서 비홀로노믹 제한조건을 운동방정식에 반영하기 위해서 도입된다[4]. (3)과 그 미분식을 (1)에 대입하고 양변에  $S^T(q)$ 를 곱하면 운동방정식은 아래와 같이 변형된다.

$$M_1(q)\dot{z} + V_1(q, \dot{q})z + G_1(q) = B_1(q)\tau. \quad (4)$$

위 식에서  $M_1(q)$ ,  $V_1(q, \dot{q})$ 과  $G_1(q)$ 는 다음과 같이 정의되는 행렬이다.

$$\begin{aligned} M_1(q) &= S^T(q)M(q)S(q) \\ V_1(q, \dot{q}) &= S^T(q)M(q)S(q) + S^T(q)V(q, \dot{q})S(q) \\ G_1(q) &= S^T(q)G(q) \\ B_1(q) &= S^T(q)B(q) \end{aligned}$$

비홀로노믹 제한조건을 반영한 새로운 운동방정식 (3)과 (4)는 (1)과 완전 동가이다. 본 논문에서는 앞으로 (3)과 (4)를 이용하여 제어를 설계하기로 한다.

본 논문에서는 고려하고 있는 비홀로노믹 시스템의 내부에 입력 외란이 존재한다고 가정한다. 입력 외란을  $(n - m) \times 1$  벡터  $\tau_d$ 로 표시하면 (4)는 다음과 같이 된다.

$$M_1(q)\dot{z} + V_1(q, \dot{q})z + G_1(q) + \tau_d = B_1(q)\tau. \quad (5)$$

외란 벡터  $\tau_d$ 는 다음과 같이 불확실성 부합 조건(uncertainty matching condition)[10], 즉 외란이 관성질량행렬의 곱으로 표시될 수 있다는 조건을 만족하고 그 경계값이 알려져 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \tau_d &= -M_1(q)f, \\ |f_i| &\leq \bar{f}_i \quad (i = 1, \dots, n - m). \end{aligned} \quad (6)$$

$f_i$ 는  $f$ 의  $i$ 번째 원소이고  $\bar{f}_i$ 는  $|f_i|$ 의 상계값(upper bound)이다.  $\tau_d = M_1(q)M_1^{-1}(q)\tau_d$ 이고  $M_1^{-1}(q)$ 은 항상 유계(bounded)이므로 (6)은 동적 시스템 내에 존재하는 일반

적인 외란에 대해 모두 성립되는 조건이다.

동적 추종 제어 문제는 (5)의 비홀로노믹 시스템의 좌표계 벡터  $q(t)$ 가 시간에 따라서 변하는 임의의 기준 궤적 벡터  $q_r(t)$ 에 점근적으로 수렴(asymptotically converging)하도록 하는 건설한 제어를 설계하는 것이다. 즉 다음을 만족하는 제어 입력  $\tau$ 를 찾는다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q(t) - q_r(t)) = 0.$$

### 3. 좌표 변환

본 장에서는 비홀로노믹 시스템의 슬라이딩 모드 제어를 설계하기 위해서 필요한 좌표 변환을 도입하고 그 의미를 설명한다.

**가정 1:** 비홀로노믹 시스템의  $n$ 개의 상태 변수 중  $l$ 개를 유계 공간(bounded space)으로 변환시키는 1차 미분 가능한 벡터 함수  $F$ 가 존재한다:

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-l} \times [\eta_1^{\min}, \eta_1^{\max}] \times \dots \times [\eta_l^{\min}, \eta_l^{\max}].$$

이때  $\eta_i^{\min}$ 와  $\eta_i^{\max}$ 는 알려진 경계값이다. 유계 공간으로 변환될 수 있는 상태 변수의 개수는 적어도  $2m$ 개가 존재한다고 가정한다. 즉  $l$ 과  $m$  사이에는 아래와 같은 부등식이 성립한다.

$$l \geq 2m. \quad (7)$$

가정 1이 성립하면 좌표계  $q$ 는  $F$ 에 의해서 다음과 같이 새로운 좌표계  $q'$ 으로 변환된다.

$$\begin{aligned} q' &= F(q) = [\xi_1, \dots, \xi_{n-l}, \zeta_1, \dots, \zeta_l]^T \\ \xi_i &\in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, n - l) \\ \zeta_j &\in [\eta_j^{\min}, \eta_j^{\max}] \quad (j = 1, \dots, l). \end{aligned}$$

(3)으로부터 다음과 같은 미분식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{q}' &= R(q)z, \\ R(q) &= \frac{\partial F}{\partial q} S(q). \end{aligned} \quad (8)$$

**가정 2:**  $q'$ 의 원소  $\zeta_j$  중  $l - m$ 개의 원소  $\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{l-m}}$ 가 존재하여  $(n - m) \times 1$  벡터

$$x_a = [\xi_1, \dots, \xi_{n-l}, \zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{l-m}}]^T$$

의 미분치와 내부 상태 변수 벡터  $z$  사이의 행렬이 완전계수(full rank)를 가진다.

가정 2의 의미를 설명하기 위해서  $q'$  벡터의 상위  $n - m$ 개의 원소가 가정 2의  $x_a$ 가 되도록  $q'$ 를 재배열한다. 재배열된 상태 변수 벡터를  $x$ 라고 정의하면  $x$ 는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$x = [x_a \ x_b]^T.$$

이때  $x_b$ 는  $\zeta_j$  중  $\zeta_{k_1}, \dots, \zeta_{k_{l-m}}$ 를 제외한 원소들로 이루어진  $m \times 1$  벡터이다.  $x$ 를 (8)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a(q) \\ R_b(q) \end{bmatrix} z. \quad (9)$$

$R_a(q)$ 와  $R_b(q)$ 는  $x$ 에 따라서 재배열된  $R(q)$ 의 행으로 이루어진 행렬들이다. 가정 2는  $(n-m) \times (n-m)$  행렬  $R_a(q)$ 가 완전계수를 가진다는 것, 즉 역행렬  $R_a^{-1}(q)$ 이 존재한다는 의미이다. 이때 (9)에서  $z = R_a^{-1}(q)x_a$ 가 되므로 가정 2가 성립한다는 것은 내부 상태 변수 벡터  $z$ 가 좌표 변환된 상태 변수 벡터  $x$ 의 일부인  $x_a$ 의 미분치로 생성될 수 있다는 것을 뜻한다. 다음 장에서 알 수 있듯이 이 가정이 성립하면 비홀로노믹 시스템의 추종 제어를 위한 슬라이딩 평면(sliding surfaces)을 구성할 수 있다. 또한 대부분의 비홀로노믹 이동 로봇 시스템의 동적 방정식에서 가정 1과 가정 2를 만족하는 변환 함수를 찾을 수 있다. 변환 함수를 찾는 과정은 모의 실험에서 설명한다.

#### 4. 건설 제어기

슬라이딩 모드 제어기는 제어 입력에 따라서 상태 변수를 나누고 각 상태 변수가 슬라이딩 평면을 따라 평형점(equilibrium point)에 수렴하도록 한다. 따라서 제어할 수 있는 상태 변수의 개수는 제어 입력의 수와 동일해야 한다. 비홀로노믹 시스템은 제어 입력의 수가 상태 변수의 개수보다 적으므로 일반적인 슬라이딩 모드 제어 기법을 직접 적용할 수 없다. 하지만 상태 변수의 일부가 유계 공간에 머무르고(가정 1) 상태 변수와 내부 상태 변수  $z$  사이에 역행렬이 존재하면(가정 2) 비홀로노믹 시스템의 추종 제어를 구현할 수 있는 슬라이딩 평면을 구성할 수 있다.

좌표 변환된 새로운 상태 변수를 이용하여 오차 벡터  $e$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} e &= x - x_r \\ e_a &= x_a - (x_r)_a \end{aligned} \quad (10)$$

$x_r$ 은 가정 1의  $F$ 에 의해서 좌표 변환된 기준 궤적 벡터이고  $e_a$ 는  $e$ 의 상위  $n-m$ 번째 원소들로 이루어진 벡터이다.  $(n-m) \times 1$  슬라이딩 평면  $s = [s_1, \dots, s_{n-m}]^T$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$s = \dot{e}_a + \Lambda e_a + E(e). \quad (11)$$

$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_{n-m}]$ 는 정부호(positive-definite)를 가진 대각선 행렬로서 슬라이딩 평면의 수렴 속도를 결정한다.  $E(e)$ 는 다음과 같이 정의된  $(n-m) \times 1$  행렬이다.

$$E(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{sgn}(e_{n-2m+1})|e_{n-m+1}| \\ \vdots \\ \text{sgn}(e_{n-m})|e_n| \end{bmatrix}. \quad (12)$$

**정리 1:** (11)의 슬라이딩 평면이 유한 시간 내에 0으로 수렴하면 오차 벡터  $e$ 는 0으로 점근적(asymptotically)으로 수렴한다.

**증명:** 상위  $n-2m$ 개의 슬라이딩 평면을 먼저 생각하자. (11)과 (12)로부터

$$s_i = \dot{e}_i + \lambda_i e_i \quad (i=1, \dots, n-2m) \quad (13)$$

이므로  $s$ 가 유한 시간 내에 0으로 수렴하면  $\dot{e}_i = -\lambda_i e_i$ 가 되어  $e_i$ 는 0으로 수렴한다. 나머지  $m$ 개의 슬라이딩 평면 방정식은 다음과 같다.

$$s_j = \dot{e}_j + \lambda_j e_j + \text{sgn}(e_j)|e_{j+m}| \quad (j=n-2m+1, \dots, n-m). \quad (14)$$

$s_j$ 가 유한 시간 내에 0으로 수렴하면 슬라이딩 평면식은

$$\dot{e}_j = -\lambda_j e_j - \text{sgn}(e_j)|e_{j+m}|$$

와 같이 되고 좌표 변환  $F(q)$ 에 의해서  $|e_{j+m}|$ 는 항상 유계이므로  $e_j$ 와  $\dot{e}_j$  사이에서 아래와 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} e_j > 0 &\Rightarrow \dot{e}_j < 0, \\ e_j < 0 &\Rightarrow \dot{e}_j > 0. \end{aligned}$$

위 식에 의해서  $e_j$ 는 0으로 점근적으로 수렴한다. 또한  $\dot{e} = R(q)z - R(q_r)z_r$ 이고( $z_r$ 은  $\dot{x}_r = R(q_r)z_r$ 을 만족하는 기준 궤적 벡터의 내부 상태 변수)  $R(q)$ ,  $R(q_r)$ ,  $z$ ,  $z_r$ 이 모두 균등연속(uniformly continuous)이므로  $\dot{e}_j$ 도 균등연속이다. 따라서 Barbalat의 보조정리([11]의 Lemma 4.4 참조)에 의해서  $\dot{e}_j$ 도 0으로 수렴한다.  $s_j$ 와  $e_j$ ,  $\dot{e}_j$ 가 각각 0으로 수렴하면  $|e_{j+m}|$ 도 0으로 수렴하므로 오차 벡터  $e$ 의 모든 원소가 0으로 수렴한다.

가정 1과 가정 2를 만족하는 비홀로노믹 시스템에서 (11)의 슬라이딩 평면을 구성하는 방법을 단계적으로 설명하면 다음과 같다.

1) 한계치를 가지지 않는  $n-l$ 개의 상태 변수 오차가 0으로 수렴하는 오차 방정식을 구성하기 위해서는 하나의 변수에 대해서 각각 독립적인 슬라이딩 평면이 필요하다. 따라서 최초  $n-l$ 개의 슬라이딩 평면은 (13)과 같은 일반적인 슬라이딩 평면 형태로 구성된다.

2) 정리 1에서 알 수 있듯이 상태 변수 오차가 한계치를 가지면 하나의 슬라이딩 평면 안에서 다른 상태 변수 오차와 함께 유한 시간 내에 0으로 수렴되는 오차 방정식을 구성할 수 있다. 따라서  $m$ 개의 슬라이딩 평면을 (14)와 같이 설계하면 한 평면 안에서 상태 변수 오차 두 개에 대한 방정식이 구성된다.

3) 나머지  $l-2m$ 개의 상태 변수 오차에 대해서 1)과 마찬가지로 일반적인 슬라이딩 평면을 구성한다. (7)로부터  $l-2m$ 은 음수가 아니므로 제안된 슬라이딩 평면은 항상 구성 가능하다.

정리 1에서 알 수 있듯이 상태 변수 오차가 한계치를 가지는 경우에는 하나의 슬라이딩 평면에서 다른 상태 변수 오차와 함께 0으로 수렴하는 오차 방정식을 구성할 수 있다. 즉, 한계치를 가지는 상태 변수가  $l$ 개면  $[l/2]$ 개의 슬라이딩 평면만 구성하면  $l$ 개 상태 변수에 대한 수렴을 보장할 수 있다( $[a]$ 는  $a$ 보다 크거나 같은 정수 중 최소값). 하

지만 이 경우  $n-2m$ 개의 제어 입력 중 슬라이딩 모드 제어 과정에서 전혀 사용되지 않는 입력이 생길 수 있어 제어기의 효율성이 떨어질 수도 있다. 따라서 본 논문에서는 한 계치를 가지는  $2m$ 개의 상태 변수 오차에 대해서는 (14)의 경우와 같이 혼합 슬라이딩 평면을 적용하고 나머지  $n-2m$ 개의 상태 변수 오차에 대해서는 (13)과 같은 변수 한 개에 대한 일반적인 슬라이딩 평면을 구성하여 사용하기로 한다.

입력 외란은 (6)과 같은 불확실성 부합 조건을 만족하므로 본 논문에서는 다음과 같은 제한 선형화 방법[12]으로 제어기를 설계한다.

$$B_1(q)\tau = M_1(q)\dot{z}_r + V_1(q, \dot{q})z + G_1(q) + M_1(q)u. \quad (15)$$

위 식에서  $u$ 는 폐루프 제어 시스템(closed-loop control system)의 특성을 결정하는 제어 입력이다. 식 (6)과 (15)를 (5)에 대입하면 동적 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\dot{z} - f = \dot{z}_r + u. \quad (16)$$

제어기 설계를 용이하게 하기 위해서 아래와 같은 보충항을 정의한다.

$$H(e, \dot{e}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{sgn}(e_{n-2m+1}) \frac{d}{dt} |e_{n-m+1}| \\ \vdots \\ \text{sgn}(e_{n-m}) \frac{d}{dt} |e_n| \end{bmatrix}$$

$$K(q, q_r, z, z_r, \dot{z}_r) = R_a(q)z - R_a(q_r)z_r + (R_a(q) - R_a(q_r))\dot{z}_r. \quad (17)$$

$H(e, \dot{e})$ 는  $E(e)$ 의 미분치와 같다. 또한 (8)과 (10)으로부터  $e_a$ 의 2차 미분 벡터  $\dot{e}_a$ 는 아래와 같이 보충항  $K$ 를 포함한 식으로 간단하게 유도될 수 있다.

$$\dot{e}_a = R_a(q)(\dot{z} - \dot{z}_r) + K(q, q_r, z, z_r, \dot{z}_r). \quad (18)$$

본 논문에서 제안한 슬라이딩 모드 제어 입력  $u$ 는 정리 2와 같다.

**정리 2:** 입력 외란을 가지는 비홀로노믹 시스템 (5)에 (15)와 같이 제한 선형화 방법으로 제어기가 구성된다고 하자. 가정 1과 가정 2가 만족된다면 아래와 같이 정의된 제어 입력  $u$ 는 추종 제어 목적  $\lim_{t \rightarrow \infty} (q(t) - q_r(t)) = 0$ 을 달성한다.

$$u = \varphi - R_a^{-1}(q) (K \text{sgn}(s) + \Lambda \dot{e}_a + H(e, \dot{e}) + K(q, q_r, z, z_r, \dot{z}_r)). \quad (19)$$

위 정의에서  $K = \text{diag}[k_1, \dots, k_m]$ 는  $(n-m) \times (n-m)$  정부호 대각선 행렬이고  $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m}]^T$ 은 다음과 같이 슬라이딩 모드 제어 법칙[13]에 따라서 정의되는 스위칭 함수(switching function)이다.

$$\varphi_i = -\bar{f}_i \text{sgn} \left( \sum_{j=1}^{n-m} s_j (R_a(q))_{ji} \right) \quad (i=1, \dots, n-m). \quad (20)$$

$(R_a(q))_{ji}$ 는 행렬  $R_a(q)$ 의  $(j, i)$ 번째 원소이다.

**증명:** 리아프노프 함수 후보를  $V = \frac{1}{2} s^T s$ 로 선정한다.

(19)의 제어 입력식을 (16)에 대입하면

$$\dot{z} - \dot{z}_r = \varphi - R_a^{-1}(q) (K \text{sgn}(s) + \Lambda \dot{e}_a + H + K) + f. \quad (21)$$

(17), (18), (21)로부터  $V$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= s^T s \\ &= s^T (\dot{e}_a + \Lambda \dot{e}_a + E(e)) \\ &= s^T (R_a(q)(\dot{z} - \dot{z}_r) + K + \Lambda \dot{e}_a + H) \\ &= s^T (R_a(q)\varphi - K \text{sgn}(s) - \Lambda \dot{e}_a - H - K \\ &\quad + R_a(q)f + K + \Lambda \dot{e}_a + H) \\ &= -\sum_{i=1}^{n-m} k_i |s_i| + s^T R_a(q)\varphi + s^T R_a(q)f \\ &= -\sum_{i=1}^{n-m} k_i |s_i| - \sum_{i=1}^{n-m} \left| \sum_{j=1}^{n-m} s_j (R_a(q))_{ji} \right| \bar{f}_i + s^T R_a(q)f \\ &\leq -\sum_{i=1}^{n-m} k_i |s_i| \leq 0. \end{aligned}$$

위 전개 과정에서 마지막 부등식은 Cauchy-Schwartz 부등식으로부터 유도된 결과이다. 위 결과를 다시 쓰면

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\sum_{i=1}^{n-m} k_i |s_i|$$

이므로 슬라이딩 평면 수렴 조건[14]이 만족된다. 따라서 슬라이딩 평면  $s$ 는 평형점 0으로 점근적으로 수렴하고 정리 1에 의해서 시스템의 모든 상태 변수 오차 벡터도 0으로 수렴한다.

내부 상태 변수  $z$ 는 항상 유계이고  $z = R_a^{-1}(q) \dot{x}_a$ 이므로  $R_a^{-1}(q)$ 도 유계이다. 따라서 제안된 제어 입력  $u$ 는 발산하지 않는다.  $u$ 에서  $\varphi$ 는 입력 외란  $f$ 를 상쇄시키기 위해서 첨가된 항이다. 입력 외란이 존재하지 않는 이상적인 경우라면  $\varphi = 0$ 이 되어 제어 입력 신호의 채터링(chattering) 현상은 없어질 것이다. 정리 2의 결과는 시스템의 차수에 상관없이 일반적인  $n$ 차 비홀로노믹 시스템의 추종 제어 문제에 적용될 수 있다. 이것은 상태 변수가 세 개인 이동 로봇의 추종 제어 문제만 해결했던 선행 연구[6]와 비교하여 더 우수한 결과이다. 또한 정리 2의 결과로부터 제안된 제어기는 시스템에 존재하는 입력 외란 (6)에도 견실함을 알 수 있다.

## 5. 모의 실험

### 5.1 바퀴 구동 이동 로봇

본 논문에서 제안한 제어기의 성능을 검증하기 위해서 바퀴가 두 개 달린 자율 이동 로봇의 추종 제어 문제에 대해서 모의 실험을 실시하였다. 모의 실험에 사용된 이동 로봇은 그림 1[15]과 같다. 그림에서  $2b$ 는 이동 로봇 몸체의 너비이고  $r$ 은 바퀴의 반지름을 가리킨다.  $P_0$ 는 로봇의 몸체에 붙어 있는 지역 좌표계  $X-Y$ 의 원점이며  $x-y$ 는 지역 좌표계이다.  $P_c$ 는 로봇의 무게 중심이며  $P_0$ 부터  $X$ 축 상에서  $d$ 만큼 떨어져 있다. 이 시스템의 제어 입력은 좌우

바퀴에 각각 작용하는 토크이다. 이동 로봇의 상태 변수는 다음과 같은 3×1 좌표 벡터로 표시된다.

$$q = [x \ y \ z]^T.$$

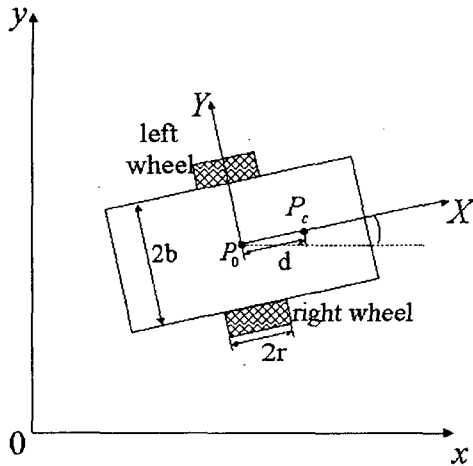


그림 1 바퀴 구동 이동 로봇의 구조.  
Fig. 1 Structure of a wheeled mobile robot.

(x, y)는 전역 좌표계 상에서 본 P<sub>0</sub>의 좌표이며 θ는 이동 로봇의 주행 방향(heading direction)으로 그림에서 알 수 있듯이 x축과 X축 사이의 각도로 정의된다. 그림 1과 같은 이동 로봇의 이상적인 주행 과정에서는 바퀴 진행 방향과 수직 방향으로 미끄러짐이 없어야 하고(non-slipping) 바퀴가 지표면에 완전 대응하면서 굴러가야 하므로(pure rolling)[15] 비홀로노믹 제한조건이 존재한다. 이동 로봇의 비홀로노믹 제한조건은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$y \cos \theta - x \sin \theta = 0.$$

이동 로봇의 선속도를 v, 각속도를 ω라 하고 내부 상태 변수를 z=[v ω]<sup>T</sup>로 선정하면 영공간행렬 S(q)는 아래와 같이 유도된다.

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

S(q)와 z로부터 이동 로봇에 대한 일반적인 기구학적 방정식을 얻을 수 있다:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (22)$$

상태 변수 벡터 q에서 θ는 각도 성분이므로 -π ≤ θ ≤ π (rad.)으로 한계치를 설정할 수 있고 비홀로노믹 제한조건의 차수 m은 1이므로 가정 1을 만족하는 변환 함수 F(q)는 x와 y 중 한 개만 유계 공간으로 변환시키면 된다. 본 논문에서는 직각 좌표 (x, y)를 극좌표(polar coordinates)로 바꾸는 변환 함수를 도입한다. 극좌표 중 원점과의 각도를 나타내는 좌표값은 항상 유계이므로 극좌표 변환은 가정 1을 만족한다. q를 새로운 좌표 q'=[ξ<sub>1</sub> ξ<sub>2</sub> ζ<sub>1</sub>]<sup>T</sup>로 변환하는 아래와 같은 변환 F(q)를 정의하자.

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(y/x) \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (23)$$

ξ<sub>1</sub>와 ξ<sub>2</sub>는 x와 y가 각각 극좌표로 변환된 것이다. 자코비안 행렬 ∂F/∂q를 계산하여 (8)의 R(q)를 구하면

$$R(q) = \begin{bmatrix} \cos(\xi_1 - \xi_2) & 0 \\ -\frac{1}{\xi_1} \sin(\xi_1 - \xi_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

R(q)에서 첫 번째 행과 세 번째 행이 서로 독립이므로 변환 함수 F(q)는 가정 2도 만족한다. x<sub>a</sub>를 x<sub>a</sub>=[ξ<sub>1</sub> ξ<sub>2</sub>]<sup>T</sup>로 선정하면 제어기 설계에 사용되는 상태 변수 벡터 x는 최종적으로 다음과 같이 재배열된다.

$$x = [\xi_1 \ \xi_2 \ \zeta_1]^T. \quad (25)$$

### 5.2 모의 실험 결과

좌표 변환된 상태 변수 벡터 (23)~(25)와 제안된 슬라이딩 모드 제어기를 이용하여 이동 로봇의 추종 제어 모의 실험을 실시하였다. 모의 실험에 사용된 매개 변수값은 r=0.07, b=0.25, d=0.125, m<sub>c</sub>=20, m<sub>w</sub>=0.2, I<sub>c</sub>=15.1, I<sub>w</sub>=0.004이고 모두 MKS 단위로 설정되었다. 여기서 m<sub>c</sub>와 m<sub>w</sub>는 로봇 몸체와 바퀴 한 개의 질량이고 I<sub>c</sub>와 I<sub>w</sub>는 로봇 몸체와 바퀴의 관성 모멘트를 가리킨다. 제어기의 수렴 속도를 결정하는 행렬은 각각 Q=diag[2 2]와 Λ=diag[1 1]로 선정하였고 비홀로노믹 시스템 내부에 존재하는 입력 외란은 가우스 확률 변수(Gaussian random variables)를 사용하여 생성하였으며 한계치는 각각 F<sub>1</sub>=0.3, F<sub>2</sub>=0.4로 설정하였다. 그림 2~5는 모의 실험 결과를 도시한 것이다. 그림 2에서 볼 수 있듯이 이동 로봇의 궤적은 초기 오차를 가지지만 빠른 시간 내에 기준 궤적에 수렴하였다. 그림 3~5는 세 개의 상태 변수 오차가 모두 0으로 수렴하는 과정을 보여준다.

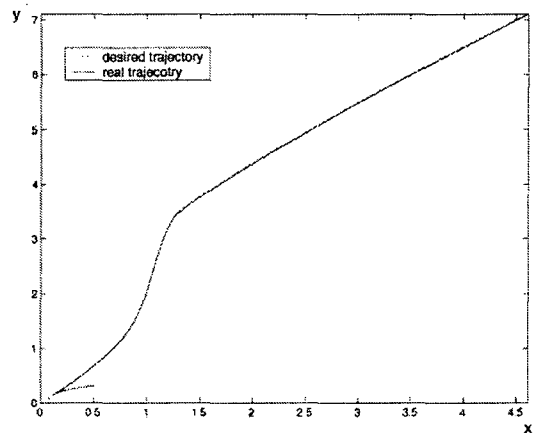


그림 2 이동 로봇의 기준 궤적과 실제 궤적.  
Fig. 2 Desired trajectory and real trajectory of the mobile robot.

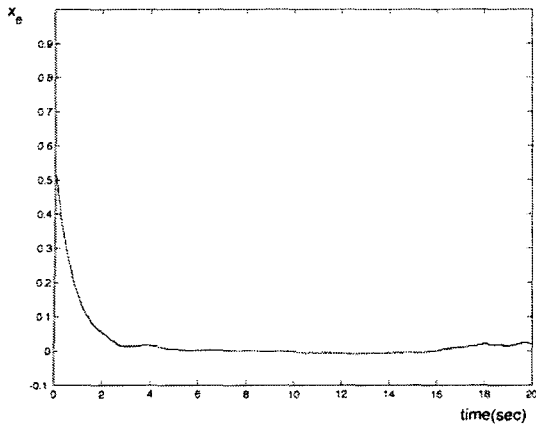


그림 3  $x$ 에 대한 추종 제어 오차.

Fig. 3 Tracking error of  $x$ .

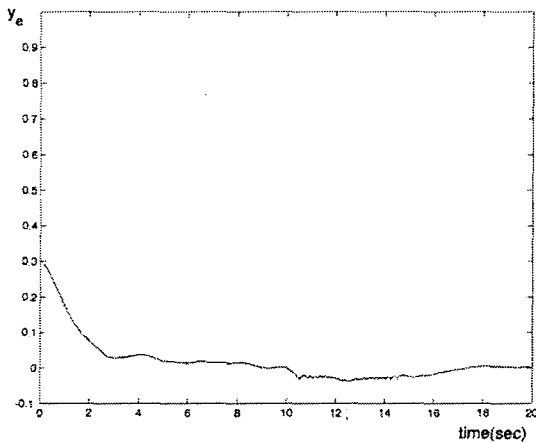


그림 4  $y$ 에 대한 추종 제어 오차.

Fig. 4 Tracking error of  $y$ .

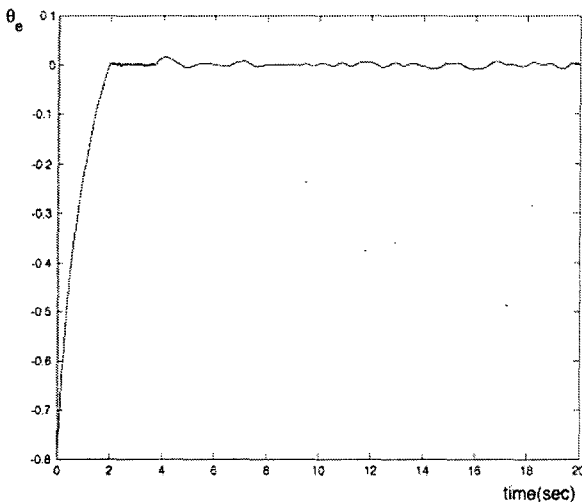


그림 5  $\theta$ 에 대한 추종 제어 오차.

Fig. 5 Tracking error of  $\theta$ .

다. 이상과 같은 결과에서 제안된 제어기가 비홀로노믹 시스템의 견실 추종 제어를 풀 수 있다는 사실을 입증하였다.

## 6. 결 론

본 논문에서는 일반적인  $n$ 차 비홀로노믹 동적 시스템을 위한 견실한 추종 제어 기법을 제안하였다. 비홀로노믹 시스템의 상태 변수를 유계 공간으로 변환시키는 변환 함수를 먼저 구한 후 모든 상태 변수 오차를 0으로 수렴하게 하는 슬라이딩 모드 제어기를 구성하였다. 본 논문에서는 특히 제어 입력의 수가 상태 변수의 수보다 적은 비홀로노믹 시스템의 제한조건을 극복하기 위하여 상태 변수 오차 두 개를 동시에 안정화시킬 수 있는 혼합 슬라이딩 평면을 제안하고 그 안정성을 증명하였다. 제안된 제어기는 시스템 내부에 존재하는 입력 외란에 대해서 견실한 특성을 보였다. 대표적 비홀로노믹 시스템인 바퀴 구동 자율 이동 로봇의 추종 제어 문제에 제안된 제어기가 잘 적용될 수 있음을 모의 실험을 통하여 검증하였다.

### 감사의 글

본 연구는 2003학년도 대구가톨릭대학교 일반연구비 지원에 의한 것임.

### 참 고 문 헌

- [1] R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann, Eds. *Differential Geometric Control Theory*, pp. 181-191, Boston, MA: Birkhauser, 1983.
- [2] Z. Li and J. F. Canny, Eds. *Nonholonomic Motion Planning*, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [3] I. Kolmanovsky and N. H. McClamroch, "Developments in Nonholonomic Control Problems," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 15, no. 6, pp. 20-36, Dec. 1995.
- [4] C. Y. Su, Y. Stepanenko and A. A. Goldberg, "Reduced Order Model and Robust Control Architecture for Mechanical Systems with Nonholonomic Pfaffian Constraints," *IEEE Trans. Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, vol. 29, no. 3, pp. 307-313, May 1999.
- [5] W. L. Xu and W. Hue, "Variable Structure Exponential Stabilization of Chained Systems Based on the Extended Nonholonomic Integrator," *System & Control Letters*, vol. 41, pp. 225-235, 2000.
- [6] J. M. Yang and J. H. Kim, "Sliding Mode Motion Control of Nonholonomic Mobile Robots," *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 19, no. 2, pp. 15-23, Apr. 1999.
- [7] K. Y. Lian and C. R. Lin, "Sliding Mode Motion/Force Control of Constrained Robots," *IEEE*

- Trans. Automatic Control, vol. 43, no. 8, pp. 1101-1103, Aug. 1998.
- [8] Y. Chang and B. Chen, "Adaptive Tracking Control Design of Nonholonomic Mechanical Systems," in Proc. IEEE Int. Conf. Decision Control, pp. 4739-4744, 1996.
- [9] T. Fukao, H. Nakagawa and N. Adachi, "Adaptive Tracking Control of a Nonholonomic Mobile Robot," IEEE Trans. Robotics and Automation, vo. 16, no. 5, pp. 609-615, Oct. 2000.
- [10] W. Gao and J. C. Hung, "Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach," IEEE Trans. Industrial Electronics, vol. 40, no. 1, pp. 44-55, Feb. 1993.
- [11] H. K. Khalil, Nonlinear Systems (2nd), Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, pp. 186-187, 1996.
- [12] F. L. Lewis, C. T. Abdallah and D. M. Dawson, Control of Robot Manipulators, New York, NY: Macmillan, pp. 94-96, 1993.
- [13] V. I. Utkin, Sliding Modes and Their Applications, Moscow, Russia:Mir, 1978.
- [14] J. J. Slotine and S. S. Sastry, "Tracking Control of Non-linear Systems Using Sliding Surfaces, with Application to Robot Manipulators," Int. J. Control, vol. 32, no. 2, pp. 465-492, 1983.
- [15] N. Sarkar, X. Yun and V. Kumar, "Control of Mechanical Systems with Rolling Constraints: Application to Dynamic Control of Mobile Robots," International J. Robotics Researches, vol. 13, no. 1, pp. 55-69, Feb. 1994.

## 저 자 소 개



**양 정 민(楊正敏)**

1971년 3월 31일생. 1993년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업. 1995년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1999년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학박). 1999년 3월 ~ 2001년 2월 한국전자통신연구원 컴퓨터·소프트웨어 연구소 선임연구원. 2001년 3월 ~ 현재 대구가톨릭대학교 전자공학과 전임강사. 주관심분야: 로봇 제어, 보행 로봇 시스템, 초음파 모터 제어 등.

Tel : 053-850-2736, Fax : 053-850-2704

E-mail : jmyang@cataegu.ac.kr