

# 접근 탄도미사일 추적시스템을 위한 좌표변환 확장강인칼만필터 설계

論 文

52D-1-4

## Design of a Coordinate-Transformation Extended Robust Kalman Filter for Incoming Ballistic Missile Tracking Systems

申 鍾 九\* · 李 泰 勳\*\* · 尹 泰 星\*\*\* · 崔 允 浩§ · 朴 珍 培§§

(Jong-Gu Shin · Tae Hoon Lee · Tae-Sung Yoon · Yoon-Ho Choi · Jin Bae Park)

**Abstract** - A Coordinate-Transformation Extended Robust Kalman Filter (CERKF) designed in the Krein space is proposed, and then applied to a nonlinear incoming ballistic missile tracking system with parameter uncertainties. First, the Extended Robust Kalman filter (ERKF) is proposed to handle the nonlinearity of measurement equation which occurs whenever the polar coordinate system is transformed into the Cartesian coordinate system. Moreover, linearization error inevitably occurs and deteriorates the tracking performance, which is considerably reduced by the proposed CERKF. Through the simulation results, we show that the proposed CERKF, which uses the measurement coordinate system, has less RMS error than the previous ERKF which is designed in the Krein space using the Cartesian system. We also verify that the robustness and the stability of the proposed filter are guaranteed in two radars: the phased array radar and the scanning radar.

**Key Words** : Nonlinear target tracking system, Robust Kalman Filter, Krein space

### 1. 서 론

일반적으로 표적추적시스템은 레이더 혹은 소나 등과 같은 센서관측정보들로부터 함정, 비행물체, 위성, 미사일 같은 이동표적의 위치, 속도 및 가속도를 추정해내는 것을 목적으로 한다. 표적추적문제 중에서도 접근 탄도미사일 추적시스템은 근거리방어무기체계 (Closes In Weapon System : CIWS), 대공방어미사일체계 (Surface to Anti-Air Missile System : SAAM System) 및 사격 통제 체계 (Fire Control System : FCS) 등과 같은 자기방어체계 (self-defense systems)에서 매우 중요한 부분을 차지한다. 따라서 추적시스템의 표적정보 검출정확도에 따라 자기방어 시스템 전체의 성능이 좌우된다고 할 수 있다.

표적 동특성의 불확실성 및 비선형성과 더불어 정밀 표적추적시스템의 설계를 어렵게 하는 다른 한 요인으로 복잡한 형태의 레이더 측정방정식을 생각할 수 있다. 실제 표적추적시스템은 레이더 중심의 극좌표계로부터 표적 정보에 대한 측정값들을 얻게 되므로 이를 표적 운동의 표현이 용이한 직각 좌표계로 변환하면 표적추적시스템의 관측식은 비선형 방정식으로 표현될 수밖에 없다. 이 경우

확장 칼만필터를 이용한 추적시스템의 설계가 가능하지만, 많은 연구 결과들에서 이미 확인되었듯이 측정방정식의 선형화 과정에서 발생하는 오차가 전체 추적시스템의 성능 저하에 기여하므로 선형화하는 과정에서 발생하는 오차를 줄이기 위한 방안이 연구되었으며[1][2], 표적모델의 파라미터 불확실성은 고려하였지만 선형화 오차를 고려하지 않은 연구가 최근 있었다[3]. 본 논문에서는, 표적 동특성의 불확실성 및 비선형성에 대처하면서 운동, 측정방정식의 선형화 오차를 최소화하는 비선형 강인 칼만필터를 이용한 표적추적시스템을 제안하기로 한다. 제안된 비선형 강인 필터링 기법은 확장강인칼만필터(Extended Robust Kalman filter : ERKF)의 기본구조에 거리-방향 코사인 기법[5]이 결합된 형태로 표적 동특성의 불확실성에 강인한 성능을 보일 뿐만 아니라 레이더 측정방정식에 좌표변환 기법을 동시에 적용함으로써 비선형 측정방정식의 선형화 오차를 효과적으로 줄일 수 있다. 적용된 거리-방향 코사인 기법은, 표적추적을 위해 사용된 ERKF의 추정값에 선형화 오차가 포함되어 있고 이들 오차가 추정 오차에 직접 영향을 미친다는 사실에 착안, 비선형 시스템을 좌표변환을 이용해 선형 시스템에 대응시키는 방법이다. 제안된 좌표변환 확장강인칼만필터(Coordinate transformation Extended Robust Kalman Filter : CERKF)에 기반한 새로운 탄도미사일 추적시스템의 성능 분석을 위해, 기존 ERKF와 CERKF를 각각 위상배열레이더와 탐지레이더에 적용하고 제안된 표적추적시스템이 기존의 기법에 비해 보다 정확하고 안정적인 성능을 가짐을 컴퓨터 모의실험을 통하여 입증하고자 한다.

\* 正 會 員 : LG 電 子 DM 研 究 所 主 任 研 究 員

\*\* 正 會 員 : 延 世 大 學 校 電 氣 電 子 工 學 科 博 士 課 程

\*\*\* 正 會 員 : 昌 原 大 學 校 電 氣 工 學 科 教 授

§ 正 會 員 : 京 畿 大 學 校 電 子 · 機 械 工 學 部 副 教 授

§§ 正 會 員 : 延 世 大 學 校 電 氣 電 子 工 學 部 教 授

接 受 日 字 : 2002年 7月 4日

最 終 完 了 : 2002年 11月 18日

## 2. 접근 탄도미사일 추적시스템

### 2.1 기준 좌표계

레이더와 탄도미사일 간의 상대적인 운동을 기술하기 위해서는 기준 좌표계가 정의되어야 한다. 그림 1은 두 개의 레이더 중심 좌표계를 도시화한 것이다.  $\{X, Y, Z\}$ 을 축으로 하는 좌표계는 물리적 공간을 표현하는데 적합하므로 가장 일반적으로 사용되고 있다. 이 좌표계에서  $Z$ 는 레이더 위치에서 지구 평면에 대해 수직이고  $X$ 와  $Y$ 는 그 위치에서 각각 동쪽과 북쪽을 가리키는 수평축이다. 그림 2의 두 번째 좌표계는  $\{X', Y', Z'\}$ 을 축으로 한다. 이 좌표계는  $\{X, Y, Z\}$  좌표계를 고각  $\epsilon$ , 방위  $\lambda$ 만큼 회전시킴으로써 구해진다. 이 좌표계에서  $Z'$ 는 레이더 면에 대해 수직이고,  $Y'$ 는 레이더 표면에 놓이며  $X'$ 는 레이더 표면과  $X$ 와  $Y$ 가 이루는 평면과는 교차선 위에 놓여진다.

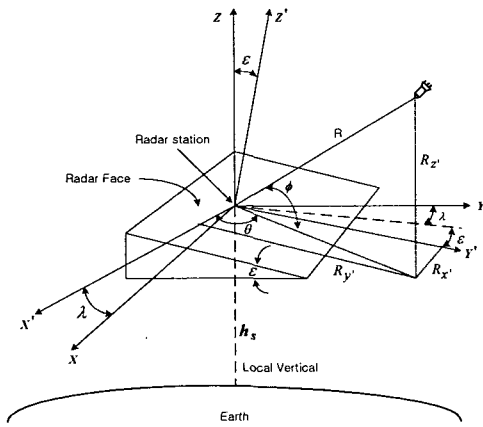


그림 1 레이더 중심 좌표계[2]  
Fig. 1 Radar-centered Coordinate System

### 2.2 접근 탄도미사일 시스템 모델 방정식

본 논문에서 고려된 접근 탄도미사일의 동특성 모델의 상태변수에는 직각 좌표계의 각 축에 대한 위치 및 속도 뿐만 아니라 탄도미사일의 고도변화에 따른 대기 밀도 변화의 불확실성도 포함된다[4].

$$\frac{d}{dt}(\rho/\beta) = -L(\rho/\beta) \dot{z}' \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 대기밀도 함수를 나타내며, 고도 및 주변환경에 따라 급격하게 변화하는 특성을 보인다.  $\beta$ 는 탄도 계수로서 속도, 고도 및 다른 미지의 매개변수들에 대한 함수이다.  $L$ 은 ARDC(Air Research and Development Command)의 대기 모델에서 임의의 고도 범위에서 분류된 상수(constant) 값으로 가정하게 되므로, 어느 정도의 불확실성이 여기에 존재하게 된다. 따라서 표적의 향후 위치를 정확하게 추정하기 위해서는 위치 및 속도 외에 식 (1)에서 표현되는 매개변수들을 구하는 것이 필요하다. 그러므로,  $L$  값에서의 불

확실성을 고려하고  $\rho/\beta$ 를 접근 탄도미사일 동특성 모델의 상태변수에 포함시키면 식 (2)와 같은 불확정 시스템으로 표현되는 표적 운동 방정식을 얻는다.

$$\dot{x} = f(x) + E_1 \Delta k(x) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -1/2 g x_4 x_7 X \\ -1/2 g x_5 x_7 X \\ -1/2 g x_6 x_7 X - g \\ -L x_6 x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_d x_6 x_7 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, -\text{position} \\ y, -\text{position} \\ z, -\text{position} \\ x, -\text{velocity} \\ y, -\text{velocity} \\ z, -\text{velocity} \\ \frac{\rho}{\beta} \end{bmatrix}, l_d = E_1 \times \Delta, |\Delta| \leq 1$$

$$X = \sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2}$$

여기서  $E_1$ 은 불확실성의 정도를 나타내는 상수이다. 한편, 식 (2)를 이산화하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = f_i(x_i) + E_{1i} \Delta_i k_i(x_i) \quad (3)$$

여기서,  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ 이다. 한편, 탄도미사일 동특성에 외부의 외란 입력( $u_i$ )이 가해진다고 하면 식 (3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t f_i(x_i) + E_{1i} \Delta_i k_i(x_i) + u_i \quad (4)$$

위의 식 (4)에서 비선형 함수  $f_i(x_i), k_i(x_i)$ 를 테일러 급수에 의해 선형화하면 다음 식을 얻는다.

$$x_{i+1} = (I + \Delta t \bar{F}_i) x_i + E_{1i} \Delta_i \bar{K}_i x_i + u_i + \Delta t \bar{p}_i + E_{1i} \Delta_i \bar{r}_i \quad (5)$$

여기서

$$\bar{F}_i = \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|t_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{76} & A_{77} \end{bmatrix}$$

$$A_{44} = -\frac{1}{2} g x_7 \frac{X^2 + x_4^2}{X}, \quad A_{45} = -\frac{1}{2} g \frac{x_7 x_4 x_5}{X}$$

$$A_{46} = -\frac{1}{2} g \frac{x_7 x_4 x_6}{X}, \quad A_{47} = -\frac{1}{2} g x_4 X$$

$$A_{54} = A_{45}, \quad A_{55} = -\frac{1}{2} g x_7 \frac{X^2 + x_5^2}{X}$$

$$A_{56} = -\frac{1}{2} g \frac{x_7 x_5 x_6}{X}, \quad A_{57} = -\frac{1}{2} g x_5 X, \quad A_{64} = A_{46},$$

$$A_{65} = A_{56}, \quad A_{66} = -\frac{1}{2} g x_7 \frac{X^2 + x_6^2}{X},$$

$$A_{67} = -\frac{1}{2} g x_6 X, \quad A_{76} = -L x_7, \quad A_{77} = -L x_6,$$

$$\| \Delta_i \| \leq 1,$$

$$\overline{K}_i = \frac{\partial k_i(x)}{\partial x} \Big|_{x = \hat{x}_{i-1}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ L \Delta x_6 \ L \Delta x_7],$$

$$E_{i1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^*,$$

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7]^*,$$

$$\overline{p}_i = f_i(\hat{x}_{i|i}) - \overline{F}_i \hat{x}_{i|i},$$

$$\overline{r}_i = k_i(\hat{x}_{i|i-1}) - \overline{K}_i \hat{x}_{i|i-1}$$

측정방정식은 위상 배열(phased array) 레이더와 탐지(scanning)레이더처럼 레이더의 종류에 따라 다르게 표현된다. 탐지레이더는 그림 2에서 보는 것과 같이 측정값들이 표적의 거리(R), 방위( $\theta$ ), 고각( $\phi$ )이므로 직각 좌표계로 나타내면 측정방정식은 식 (6)과 같이 비선형 방정식으로 표현된다[5].

$$y_i^c = h_i^c(x_i) + v_i = \begin{bmatrix} R^c \\ \theta^c \\ \phi^c \end{bmatrix} + v_i \quad (6)$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \tan^{-1}(x_2/x_1) \\ \tan^{-1}(x_3/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} v_R \\ v_\theta \\ v_\phi \end{bmatrix}_i$$

두 번째로 위상배열 레이더에서는 측정값들은 그림 3에서 보는 것과 같이 거리(R)과 x축 및 y축에 대한 코사인 u, v 이며, 이를 직각 좌표계로 나타내면 측정방정식은 식 (7)과 같은 비선형 방정식으로 주어진다.

$$y_i^p = h_i^p(x_i) + v_i = \begin{bmatrix} R^p \\ u^p \\ v^p \end{bmatrix} + v_i \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ x_1/R^p \\ x_2/R^p \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} v_R \\ v_u \\ v_v \end{bmatrix}_i$$

여기서  $v_i$ 는 통계적 특성을 알고있는 측정잡음이다.

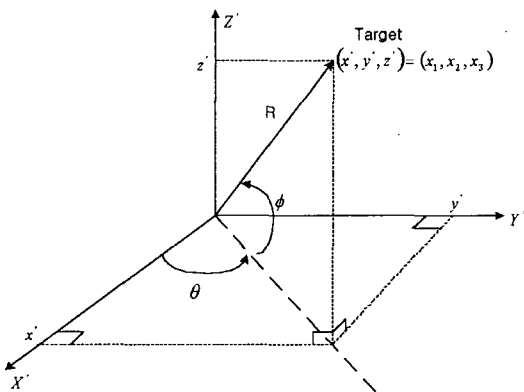


그림 2 거리, 방위 및 고각의 기하학적 해석  
Fig. 2 Geometric configuration via R,  $\theta$ ,  $\phi$

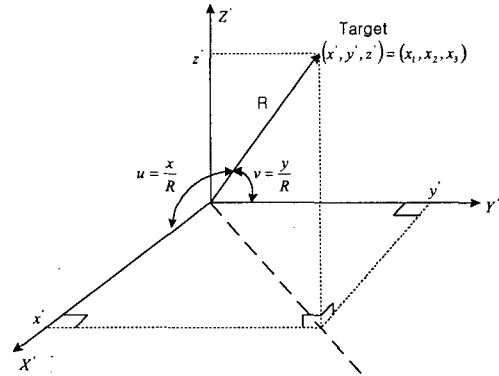


그림 3 R, u, v의 기하학적 해석  
Fig. 3 Geometric configuration via R, u, v

### 3. 불확정 비선형 시스템 모델에 대한 좌표변환 확장 강인칼만필터

#### 3.1 불확정 비선형 시스템 모델

다음과 같은 이산시간 불확정(uncertain) 비선형 시스템을 고려해보자.

$$\begin{cases} x_{i+1} = f_i(x_i) + \tilde{g}(x_i) \tilde{u}_i \\ y_i = h_i(x_i) + \tilde{v}_i \\ s_i = k_i(x_i) \end{cases} \quad (8)$$

여기서  $x_i$ 는 상태변수,  $y_i$ 는 시스템 출력이고,  $\tilde{u}_i$  및  $\tilde{v}_i$ 는 각각 가우시안 분포를 갖는 공정잡음  $u_i$ 와 관측잡음  $v_i$ 를 포함하는 불확실성 입력이며,  $s_i$ 는 시스템의 불확실성 출력을 나타낸다. 이때 불확실성을 포함하는 비선형 시스템 (8)은 식 (9)와 같은 이차합제한(sum quadratic constraints: SQC)을 만족한다[6].

$$(x_0 - \hat{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{i=0}^j \tilde{u}_i^* \tilde{Q}_i^{-1} \tilde{u}_i + \sum_{i=0}^j \tilde{v}_i^* \tilde{R}_i^{-1} \tilde{v}_i \leq \epsilon + \sum_{i=0}^j \|s_i\|^2 \quad (9)$$

여기서 \*는 복소켤레전치(complex conjugate transpose)를 나타내며, 양의 스칼라  $\epsilon$ 은 불확정 시스템의 불확실한 입출력간의 에너지 관계를 표현하기 위한 가상 에너지한계 파라미터이다. 식 (9)의 에너지 형태의 제한조건을 가지는 불확정 비선형 시스템 (8)은 기존의 놈(norm) 제한 파라미터 불확실성을 갖는 불확정 비선형 시스템을 포함하는 보다 일반적인 모델링 방법이라고 할 수 있다. 다음과 같이 놈제한 파라미터 불확실성  $\Delta_i$ 을 포함하는 비선형 시스템을 생각해 보자.

$$\begin{cases} x_{i+1} = f_i(x_i) + E_{1i} \Delta_i k_i(x_i) + g(x_i) u_i, \quad \| \Delta_i \| \leq 1 \\ y_i = h_i(x_i) + E_{2i} \Delta_i k_i(x_i) + v_i \end{cases} \quad (10)$$

여기서, 초기상태  $x_0$ , 공정  $u_i$  및 관측잡음  $v_i$ 의 공분산 행렬은 다음과 같고,

$$cov \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & R_i \end{bmatrix} \delta_{ik} \end{bmatrix}$$

식 (11)과 같은 SQC를 만족한다.

$$(x_0 - \hat{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{i=0}^j u_i^* Q_i^{-1} u_i + \sum_{i=0}^j v_i^* R_i^{-1} v_i \leq \varepsilon \quad (11)$$

식 (10)에서  $\xi_i = \Delta_i k_i(x_i)$ 라고 하면, 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{i=0}^j \|\xi_i\|^2 \leq \sum_{i=0}^j \|s_i\|^2 \quad (12)$$

식 (11)과 식(12)로 부터 다음과 같은 SQC를 유도할 수 있다.

$$(x_0 - \hat{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{i=0}^j \tilde{u}_i^* \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}^{-1} \tilde{u}_i + \sum_{i=0}^j \tilde{v}_i^* (R_i + 2E_{2i} E_{2i}^*)^{-1} \tilde{v}_i \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^j \|s_i\|^2 \quad (13)$$

위의 식(13)에서  $\tilde{u}_i = [u_i^* \xi_i^*]^*$ ,  $\tilde{v}_i = v_i + E_{2i} \xi_i$  이다. 따라서 앞서 설명한 불확정 시스템 모델 (8),(9)와 기존의 놈제한조건을 만족하는 불확정 시스템 (10) 및 조건 (11)을 비교하면 다음 관계가 만족함을 알 수 있다.

$$\tilde{g}(x_i) = [g(x_i) \ E_{1i}] \quad (14)$$

$$\tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_i = R_i + 2E_{2i} E_{2i}^*$$

즉, 불확정 비선형 시스템 (8) 및 SQC (9)는 놈제한 파라미터 불확실성이 내재된 비선형 시스템을 포함한다.

### 3.2 좌표변환 확장강인칼만필터

본 절에서는 불확정 비선형 시스템에 대응하는 CERKF를 유도하고, CERKF의 설계를 위해 비선형 일대일 함수를 고려함으로써 시스템 내의 비선형성을 제거하는 방법을 사용한다. 식 (8)의 비선형 함수  $f_i(x_i)$ ,  $h_i(x_i)$ ,  $k_i(x_i)$ 가 미분 가능한 함수라고 가정하면, 주어진 비선형 함수를 다음과 같이  $\hat{x}_{i|i}$ ,  $\hat{x}_{i|i-1}$ 에서의 테일러 급수전개를 이용하여 선형화시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= f_i(\hat{x}_{i|i}) + \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|i}} (x_i - \hat{x}_{i|i}) + o(x_i) \\ h_i(x_i) &= h_i(\hat{x}_{i|i-1}) + \left. \frac{\partial h_i(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|i-1}} (x_i - \hat{x}_{i|i-1}) + o(x_i) \\ k_i(x_i) &= k_i(\hat{x}_{i|i-1}) + \left. \frac{\partial k_i(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|i-1}} (x_i - \hat{x}_{i|i-1}) + o(x_i) \end{aligned} \quad (15)$$

한편, 고차항을 무시하고,

$$\begin{aligned} F_i &= \left. \frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|i}}, & H_i &= \left. \frac{\partial h_i(x_i)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|i-1}}, \\ K_i &= \left. \frac{\partial k_i(x_i)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{i|i-1}}, & G_i &= \tilde{g}(\hat{x}_{i|i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_i &= f_i(\hat{x}_{i|i}) - F_i \hat{x}_{i|i}, & q_i &= h_i(\hat{x}_{i|i-1}) - H_i \hat{x}_{i|i-1}, \\ r_i &= k_i(\hat{x}_{i|i-1}) - K_i \hat{x}_{i|i-1} \end{aligned}$$

라고 정의하면, 불확정 비선형 시스템을 식 (16)과 같이 근사화시킬 수 있다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = f_i(x_i) + \tilde{g}_i(x_i) \tilde{u}_i \\ y_i = h_i(x_i) + \tilde{v}_i \\ s_i = k_i(x_i) \end{cases} \approx \begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i \tilde{u}_i + p_i \\ y_i = H_i x_i + \tilde{v}_i + q_i \\ s_i = K_i x_i + r_i \end{cases} \quad (16)$$

위의 선형화과정에서 발생하는 오차를 극복하기 위하여 식 (2)에서 정의된 상태변수가 아닌, 측정값이 상태변수에 포함되는 새로운 상태변수를 정의하고 전체 필터식을 좌표 변환하여 다시 정의한다. 새로운 상태변수를  $z$ 로 정의하면, 기존의 상태변수  $x$ 와의 비선형 일대일 대응관계,  $z = \beta(x)$ ,  $x = \alpha(z)$ 를 이용하여  $z$ 에 대한 상태방정식을 유도해 낼 수 있다. 즉,

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i \tilde{u}_i + p_i \\ y_i = H_i x_i + \tilde{v}_i + q_i \\ s_i = K_i x_i + r_i \end{cases} \equiv \begin{cases} z_{i+1} = F_i' z_i + G_i' \tilde{u}_i + p_i' \\ y_i = H_i' z_i + \tilde{v}_i + q_i' \\ s_i = K_i' z_i + r_i' \end{cases} \quad (17)$$

여기서,

$$F_i' = \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i}, \quad G_i' = \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \tilde{u}_i}, \quad K_i' = \frac{\partial s_i}{\partial x_i}$$

이므로,

$$\begin{aligned} F_i' &= \frac{\partial z_{i+1}}{\partial z_i} = \frac{\partial z_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z_i} \\ &= \frac{\partial \beta_{i+1}(x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} F_i \frac{\partial \alpha_i(z_i)}{\partial z_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_i' &= \frac{\partial z_{i+1}}{\partial \tilde{u}_i} = \frac{\partial z_{i+1}}{\partial x_{i+1}} \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \tilde{u}_i} \\ &= \frac{\partial \beta_{i+1}(x_{i+1})}{\partial x_{i+1}} G_i \end{aligned}$$

$$K_i' = \frac{\partial s_i}{\partial z_i} = \frac{\partial s_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z_i} = K_i \frac{\partial \alpha_i(z_i)}{\partial z_i}$$

$$H_i' = [I \ 0]$$

로 나타낼 수 있으며,  $p_i'$ ,  $r_i'$ 는 사후/사전 추정값  $\hat{z}_{i|i} = \beta_i(\hat{x}_{i|i})$ ,  $\hat{z}_{i|i-1} = \beta_i(\hat{x}_{i|i-1})$ 이 주어지면 결정되는 값으로서 서로 다른 상태변수를 갖는 두 개의 시스템 방정식이 등가관계를 만족하도록 선택 가능하다. 또한  $H_i'$ 에 의하여 측정값이 상태변수에 포함되도록 좌표변환이 이루어졌음을 알 수 있다. 이 때 불확정 비선형 방정식 (8)에 대응하는  $z_i$ 를 상태변수로 하는 선형화된 시스템 방정식 (17)은 다음 SQC를 만족한다.

$$(z_0 - \hat{z}_0)^* \Pi_0^{-1} (z_0 - \hat{z}_0) + \sum_{i=0}^j \tilde{u}_i^* Q_i^{-1} \tilde{u}_i + \sum_{i=0}^j \tilde{v}_i^* \tilde{R}_i^{-1} \tilde{v}_i \leq \varepsilon + \sum_{i=0}^j \|s_i\|^2 \quad (18)$$

따라서 (18)은 다음과 같은 부정 이차 함수 형태로 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned} J(z_0, \tilde{u}, y) &= (z_0 - \hat{z}_0)^* \Pi_0^{-1} (z_0 - \hat{z}_0) \\ &+ \sum_{i=0}^j \tilde{u}_i^* Q_i^{-1} \tilde{u}_i + \sum_{i=0}^j \left( \begin{bmatrix} y_i - 0 \\ 0 - r_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i' \\ K_i' \end{bmatrix} z_i \right)^* \\ &\begin{bmatrix} \tilde{R}_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} y_i - 0 \\ 0 - r_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i' \\ K_i' \end{bmatrix} z_i \right) \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (19)$$

기존의 집합 추정 이론의 관점에서 볼 때, 식 (19)의 SQC를 만족하는 불확정 비선형 시스템 (17)의 상태벡터가 존재할 수 있는 영역은 유한 집합으로 표현될 수 있다[6][7]. 따라서 이러한 경우에 시스템 상태 벡터의 추정 문제는 상태 벡터가 존재하고 있는 집합의 부분집합을 구하는 문제로 귀결될 수 있다. 만일 특정한 시점에서 상태 벡터 추정값 집합 전체가 아닌 하나의 벡터 추정값만 필요할 경우 CERKF 문제는 다음 부등식을 만족하는 부정 이차 함수

(indefinite quadratic function)의 최소화 문제로 정리된다.

$$\min J(z_0, \tilde{u}, y) \leq \epsilon \quad (20)$$

위와 같은 부정 이차 함수의 최소화 문제는 일반적으로 잘 알려져 있는 추정 이론 및 제어 이론으로는 손쉽게 풀 수 있는 문제가 아니므로, 본 논문에서는 부정 이차 함수  $J(x_0, \tilde{u}, y)$ 의 최소화 문제로 대변되는 CERKF 설계 문제를 해결하기 위해 크라인(Krein) 공간에서의 상태추정이론[8][9]을 사용한다. 크라인 공간은 임의의 벡터에 대한 노름이 힐버트(Hilbert) 공간과는 다르게 음의 값을 가질 수 있도록 정의되며 힐버트 공간을 포함하는 보다 일반적인 개념의 벡터 공간이다. 따라서, 이러한 특성을 이용하여 부정이차함수의 최소화 문제를 크라인 공간에서 손쉽게 풀 수 있다. 크라인 공간 추정이론에 의하면 부정이차함수의 정점을 구하는 문제는 크라인 공간 상태방정식에 대한 크라인 공간 칼만필터 문제의 한 특정한 형태로 해석될 수 있다. 즉, 주어진 부정 이차함수에 대응하는 크라인 공간에서의 칼만필터식에 의해 순차적으로 계산되는 크라인 공간 정사영(projection)에 의해 계산이 가능하며 이 정사영은 최소화 문제의 해가 된다. 다만 힐버트 공간에서의 정사영이 항상 유일하게 결정되는 반면 크라인 공간에서의 정사영은 특정한 조건이 만족되지 않으면 존재하지 않을 수 있으며 또한 유일하지 않을 수도 있으므로 크라인 공간에서 구해진 최소화 해가 존재조건을 만족하는지 여부를 확인해야 한다.

**보조정리 1** (크라인 공간 칼만필터)[8] 만일 행렬  $R_i$ 의 역행렬이 존재하고  $\hat{y}_{i|i-1}$ 을 벡터  $y_i$ 의 크라인 공간의 선형 부분공간  $L(y_0, y_1, \dots, y_{i-1})$  위로의 정사영으로 정의하면 크라인 공간 칼만필터식

$$\hat{x}_{i|i} = \hat{x}_{i|i-1} + P_{i|i} H_i^* R_i^{-1} e_i$$

$$e_i = y_i - y_{i|i-1} = y_i - H_i \hat{x}_{i|i-1}$$

$$P_{i|i}^{-1} = P_{i|i-1}^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i$$

$$P_{i+1|i} = F_i P_{i|i} F_i^* + G_i Q_i G_i^*$$

으로부터 계산된 추정값  $\hat{x}_{i|i}$ ,  $\hat{x}_{i|i-1}$ 는 크라인 공간 상태 방정식

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i \\ y_i = H_i x_i + v_i \end{cases}$$

과 크라인 공간에서의 확률 변수  $x_0, u_i, v_i$ 의 내적

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_i \delta_{ik} & 0 \\ 0 & 0 & R_i \delta_{ik} \end{bmatrix}$$

에 대응하는 다음 이차 함수의 정점이 된다

$$(x_0 - \hat{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{i=0}^j u_i^* Q_i^{-1} u_i + \sum_{i=0}^j v_i^* R_i^{-1} v_i$$

이 때, 크라인 공간 칼만필터식에 의해 순차적으로 계산되는 추정값은  $\Pi_0 > 0, Q_i > 0$ 이고  $R_i$ 의 역행렬이 존재하며  $[F_i, G_i]$ 가 독립 행렬(independent matrix)일 때, 다음 조건

이 만족되면

$$P_{i|i}^{-1} = P_{i|i-1}^{-1} + H_i^* R_i^{-1} H_i > 0$$

위의 이차 함수의 최소화 해가 된다.

CERKF를 설계함에 있어 보조정리 1의 크라인 공간 상태 추정 이론이 고려되는 주된 이유는 CERKF의 비용함수 (19)가 부정 행렬  $diag(\hat{R}_i, -I)$ 을 포함하는 부정이차함수로 표현되기 때문이다. 따라서, CERKF 문제 (20)에 대응하는 크라인 공간 상태방정식을 찾아내고 이에 대한 크라인 공간 칼만필터링 문제를 고려하면 CERKF 문제를 풀 수 있다.

**정리 1** (좌표변환 확장강인칼만필터) 주어진 불확정 비선형 시스템 (8)과 비선형 일대일 대응관계, 그리고 (20)의 부정이차함수의 최소화 문제로 대변되는 CERKF 문제의 최소화 해는  $\Pi_0' > 0, \hat{Q}_i > 0$ 이고  $\hat{R}_i$ 의 역행렬이 존재하며  $[F_i', G_i']$ 가 독립 행렬일 때, 다음 조건이 만족되면

$$P_{i|i}^{-1} = P_{i|i-1}^{-1} + H_i'^* \hat{R}_i^{-1} H_i' > 0$$

CERKF식에 의해 순차적으로 갱신되는 사전,사후의 추정값을 이용하여 구할 수 있다. 즉

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i|i-1} &= \beta_i(\hat{x}_{i|i-1}) \\ \hat{z}_{i|i} &= \hat{z}_{i|i-1} + P_{i|i} K_i'^* k_i'(\hat{z}_{i|i-1}) \\ &\quad + P_{i|i} H_i'^* \hat{R}_i^{-1} (y_i - H_i' \hat{z}_{i|i-1}) \\ \hat{x}_{i|i} &= \alpha_i(\hat{z}_{i|i}), \quad \hat{x}_{i+1|i} = f_i(\hat{x}_{i|i}) \end{aligned}$$

여기서, 오차 공분산  $P_{i|i}, P_{i|i-1}$ 는 다음 방정식에 의해 순차적으로 갱신된다.

$$\begin{aligned} P_{i|i}^{-1} &= P_{i|i-1}^{-1} + H_i'^* \hat{R}_i^{-1} H_i' - K_i'^* K_i \\ P_{i+1|i} &= F_i' P_{i|i} F_i'^* + G_i' \hat{Q}_i G_i'^* \end{aligned}$$

증명. 부정이차함수 (19)의 최소화 문제는 크라인 공간에서의 칼만필터 문제의 특수한 형태로 생각할 수 있다. 즉 (19)와 보조정리 1의 이차함수와의 대응관계를 통해 크라인 공간에서의 상태방정식을 구하고 크라인 공간 칼만필터식을 이용, CERKF 문제의 해를 구할 수 있다. 식 (19)와 크라인 공간 칼만필터 문제의 비용 함수로부터 다음 대응관계가 성립되므로

$$\Pi_0 = \Pi_0', \quad Q_i = \hat{Q}_i, \quad R_i = \begin{bmatrix} \hat{R}_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

다음과 같은 크라인 공간 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} F_i' z_i + G_i' \tilde{u}_i + p_i' \\ \begin{bmatrix} y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_i' \\ K_i' \end{bmatrix} z_i + \begin{bmatrix} \tilde{v}_i \\ r_i' \end{bmatrix} \\ s_i = K_i' z_i + r_i' \end{cases}$$

이 때,  $z_0, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ 에 대한 크라인 공간 벡터내적은 다음과 같다.

$$\left\langle \begin{bmatrix} z_0 \\ \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z_0 \\ \tilde{u}_k \\ \tilde{v}_k \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0' & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_i \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \delta_{ik}$$

위의 크라인 공간 상태 방정식에 대한 크라인 공간 칼만 필터 문제를 생각하면, 주어진 부정이차함수 (19)의 정점은 다음 필터식에 의해 계산되는 추정값을 통해 얻어진다.

$$\begin{aligned} \hat{z}_{i|i} &= \hat{z}_{i|i-1} + P_{i|i} [H_i']^* \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \left( \begin{bmatrix} y_i \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_i' \hat{z}_{i|i-1} \\ k_i'(\hat{z}_{i|i-1}) \end{bmatrix} \right) \\ &= \hat{z}_{i|i-1} + P_{i|i} K_i'^* k_i'(\hat{z}_{i|i-1}) \\ &\quad + P_{i|i} K_i'^* \tilde{R}_i^{-1} (y_i - H_i' \hat{z}_{i|i-1}) \end{aligned}$$

이 때, 오차 공분산은 다음 순환 방정식에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned} P_{i|i}^{-1} &= P_{i|i-1}^{-1} + \begin{bmatrix} H_i' \\ K_i' \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \tilde{R}_i & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_i' \\ K_i' \end{bmatrix} \\ P_{i+1|i} &= F_i' P_{i|i} F_i'^* + G_i' \tilde{Q}_i G_i'^* \end{aligned}$$

만일  $\Pi_0' > 0$ ,  $\tilde{Q}_i > 0$ 이고  $\tilde{R}_i$ 의 역행렬이 존재하며  $[F_i', G_i']$ 가 독립행렬일 때, 다음 조건이 만족된다

$$P_{i|i}^{-1} = P_{i|i-1}^{-1} + H_i'^* \tilde{R}_i^{-1} H_i' - K_i'^* K_i'$$

위의 필터식에 의해 계산된 부정이차함수 (20)의 정점은 최소점이 된다.

### 3.3 비선형 일대일 대응 함수를 이용한 측정방정식의 선형화

본 논문에서는 앞 절에서 제시한 CERKF는 비선형 측정 방정식을 선형화하는 비선형 일대일 대응함수를 도입함으로써 측정방정식의 선형화 과정에서 발생하는 오차를 제거한다. 위상배열레이더와 탐지레이더에 대하여 각각 좌표변환 상태방정식을 유도한다.

#### 3.3.1 위상배열레이더

위상배열레이더의 경우 선형 측정방정식을 유도해 내기 위해 사용된 비선형 일대일 대응 함수는 다음과 같다.[3]

$$z = \begin{bmatrix} R \\ u \\ v \\ \dot{R} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \\ x'/R \\ y'/R \\ (x' \dot{x}' + y' \dot{y}' + z' \dot{z}')/R \\ (x' - \dot{R}u)/R \\ (y' - \dot{R}v)/R \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta(x) \quad (21)$$

$$x = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uR \\ vR \\ \omega R \\ Ru + \dot{R}u \\ Rv + \dot{R}v \\ R\omega + R\dot{\omega} \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha(z) \quad (22)$$

여기서 상태변수에 포함된  $\alpha$ 는 미지의 변수로서 필터식에 의하여 추정되어야 하는 값으로 남겨둔다. 이 때 상태 변수

$x$ 와  $z$ 는 다음 식을 만족한다.

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} u & v & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega & -\frac{uR}{\omega} & -\frac{vR}{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{u} & \dot{R} & 0 & u & R & 0 & 0 \\ \dot{v} & 0 & \dot{R} & v & 0 & R & 0 \\ \dot{\omega} & -\frac{\dot{x}}{\omega} + Ru\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} & -\frac{\dot{y}}{\omega} + Rv\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} & \omega & -\frac{Ru}{\omega} & -\frac{Rv}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} u & v & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-u^2}{R} & -\frac{uv}{R} & -\frac{u\omega}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{uv}{R} & \frac{1-v^2}{R} & -\frac{v\omega}{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{u} & \dot{v} & \dot{\omega} & u & v & \omega & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \frac{1-u^2}{R} & -\frac{uv}{R} & -\frac{u\omega}{R} & 0 \\ \xi_4 & \xi_5 & \xi_6 & -\frac{uv}{R} & \frac{1-v^2}{R} & -\frac{v\omega}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega = \sqrt{1-u^2-v^2}, \quad \dot{\omega} = -\frac{u\dot{u}+v\dot{v}}{\omega}$$

$$\xi_1 = -\frac{1}{R} (2u\dot{u} + \frac{1-u^2}{R} \dot{R}), \quad \xi_2 = -\frac{1}{R} (v\dot{u} + u\dot{v} - \frac{uv}{R} \dot{R})$$

$$\xi_3 = -\frac{1}{R} (\omega\dot{u} + u\dot{\omega} - \frac{u\omega}{R} \dot{R}), \quad \xi_4 = \xi_2$$

$$\xi_5 = -\frac{1}{R} (2v\dot{v} + \frac{1-v^2}{R} \dot{R})$$

$$\xi_6 = -\frac{1}{R} (\omega\dot{v} + v\dot{\omega} - \frac{v\omega}{R} \dot{R})$$

위의 대응 관계를 이용하여 위상배열레이더 측정방정식을 다시 쓰면 측정방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$h_i^p(x_i) = \begin{bmatrix} R_i \\ u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2} \\ x_i' \\ R_i \\ y_i' \\ R_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z \quad (23)$$

#### 3.3.2 탐지레이더

탐지레이더의 경우, 앞서 제시한 위상배열레이더보다 다소 복잡한 변환 관계가 필요하다. 이를 정리하면 우선 새로운 상태변수와 기존 상태변수 간의 비선형 일대일 대응관계는 다음과 같다.

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ \theta \\ \phi \\ \dot{R} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^3} \\ \tan^{-1}(x_2/x_1) \\ \tan^{-1}[x_3/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}] \\ (x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6)/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ (x_1x_5 - x_2x_4)/(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{[x_6(x_1^2 + x_2^2) - x_3(x_1x_4 + x_2x_5)]}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ x_7 \end{bmatrix} = \beta(x) \quad (24)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ x' \\ y' \\ z' \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z_1 C z_2 C z_3 \\ z_1 C z_2 C z_3 \\ z_1 S z_3 \\ z_4 C z_2 C z_3 - z_1 z_5 S z_2 C z_3 - z_1 z_6 C z_2 S z_3 \\ z_4 S z_2 C z_3 + z_1 z_5 C z_2 C z_3 - z_1 z_6 S z_2 S z_3 \\ z_4 S z_3 + z_1 z_6 C z_3 \\ z_7 \end{bmatrix} = \alpha(z) \quad (25)$$

여기서  $C = \cos$ ,  $S = \sin$  이다. 이 때, 상태 변수  $x$ 와  $z$ 는 아래 식을 만족한다.

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial \alpha(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & B_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & 0 & 0 & 0 \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & 0 & 0 & 0 \\ B_{61} & 0 & B_{63} & B_{64} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{77} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} & 0 \\ C_{51} & C_{52} & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{77} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = C z_2 C z_3, B_{12} = -z_1 S z_2 C z_3, B_{13} = -z_1 C z_2 S z_3$$

$$B_{21} = S z_2 C z_3, B_{22} = z_1 C z_2 C z_3, B_{23} = -z_1 S z_2 S z_3$$

$$B_{31} = S z_3, B_{33} = z_1 C z_3, B_{41} = -z_5 C z_3 S z_2 - z_6 C z_2 S z_3$$

$$B_{42} = -z_4 S z_2 C z_3 - z_1 z_5 C z_2 C z_3 + z_1 z_6 S z_2 S z_3$$

$$B_{43} = -z_4 C z_2 S z_3 + z_1 z_5 S z_2 S z_3 - z_1 z_6 C z_2 C z_3$$

$$B_{44} = C z_2 C z_3, B_{45} = -z_1 S z_2 C z_3, B_{46} = -z_1 C z_2 S z_3$$

$$B_{51} = z_5 C z_2 C z_3 - z_6 S z_2 S z_3$$

$$B_{52} = z_4 C z_2 C z_3 - z_1 z_5 S z_2 C z_3 - z_1 z_6 C z_2 S z_3$$

$$B_{53} = -z_4 S z_2 S z_3 - z_1 z_5 C z_2 S z_3 - z_1 z_6 S z_2 C z_3$$

$$B_{54} = S z_2 C z_3, B_{55} = z_1 C z_2 C z_3, B_{56} = -z_1 S z_2 S z_3$$

$$B_{61} = z_6 C z_3, B_{63} = z_4 C z_3 - z_1 z_6 S z_3, B_{64} = S z_3, B_{77} = 1$$

$$C_{11} = C z_2 C z_3, C_{12} = S z_2 C z_3, C_{13} = S z_3$$

$$C_{21} = -\frac{S z_2}{z_1 C z_3}, C_{22} = \frac{C z_2}{z_1 C z_3}, C_{31} = -\frac{C z_2 S z_3}{z_1}$$

$$C_{32} = -\frac{S z_2 S z_3}{z_1}, C_{33} = \frac{C z_3}{z_1}, C_{41} = -z_5 S z_2 C z_3 - z_6 C z_2 S z_3$$

$$C_{42} = z_5 C z_2 C z_3 - z_6 S z_2 S z_3,$$

$$C_{43} = z_6 C z_3, C_{44} = C z_2 C z_3, C_{45} = S z_2 C z_3, C_{46} = S z_3,$$

$$C_{51} = \frac{z_4 S z_2 C z_3 - z_1 z_5 C z_2 C z_3 - z_1 z_6 S z_2 S z_3}{z_1^2 C^2 z_3}$$

$$C_{52} = \frac{z_4 C z_2 C z_3 - 3 z_1 z_5 S z_2 C z_3 - z_1 z_6 C z_2 S z_3}{z_1^2 C^2 z_3}$$

$$C_{54} = -\frac{S z_2}{z_1 C z_3}, C_{55} = \frac{C z_2}{z_1 C z_3}$$

$$C_{61} = \frac{z_4 C z_2 S z_3}{z_1^2} + \frac{z_5 S z_2 S z_3 - z_6 C z_2 C z_3}{z_1}$$

$$C_{62} = \frac{z_4 S z_2 S z_3}{z_1^2} + \frac{z_5 C z_2 S z_3 - z_6 S z_2 C z_3}{z_1}$$

$$C_{63} = -\frac{z_4 C z_3}{z_1^2} - \frac{z_6 S z_3}{z_1}, C_{64} = -\frac{C z_2 S z_3}{z_1}$$

$$C_{65} = -\frac{S z_2 S z_3}{z_1}, C_{66} = \frac{C z_3}{z_1}, C_{77} = 1$$

위의 대응관계를 이용하여 탐지레이더 측정방정식을 다시 쓰면 측정방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$h_i^c(x_i) = \begin{bmatrix} R_i \\ \theta_i \\ \psi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2} \\ \tan^{-1}(y_i'/x_i') \\ \tan^{-1}(z_i'/\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} z_i \quad (26)$$

#### 4. 모의실험 및 결과

본 논문에서는 2장에서 기술한 접근 탄도미사일 추적시스템에 ERKF와 CERKF, 각각의 필터에 위상배열레이더 및 탐지레이더 두 가지 종류의 레이더를 적용하여 성능비교 모의실험을 하였다. 접근 탄도미사일 추적시스템은 놈 제한 파라미터 불확실성  $\Delta_i$ 을 포함하는 비선형 시스템 (10)으로 표현된다. 식 (10)의 비선형 함수를 각각  $\hat{x}_{i|i}$ 와  $\hat{x}_{i|i-1}$ 에 대하여 테일러 급수로 전개하고, 측정방정식의 불확실성  $E_{2i}=0$  인 경우 접근 탄도미사일 추적시스템의 모델은 다음과 같은 근사화된 시스템 모델로 표현된다.

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + E_{1i} \Delta_i K_i x_i + G_i u_i + p_i \\ y_i = H_i x_i + v_i + q_i \quad (\text{ERKF의 경우}) \\ y_i = H_i z_i + v_i + q_i \quad (\text{CERKF의 경우}) \end{cases} \quad (27)$$

모의실험을 통해 식 (27)의 접근 탄도미사일 추적시스템의 상태공간 방정식을 ERKF 및 제한한 CERKF에 각각 적용하여 ERKF에서 측정방정식의 선형화 오차가 필터 성능 저하의 원인이 됨을 확인하고 CERKF가 선형화 오차를 감소시켜 ERKF보다 우수한 성능을 보인다는 것을 입증한다. 모의실험을 위한 조건은 다음과 같이 하였다[4].

$$\text{cov}(u_i, u_i) = Q_i = \frac{1}{i+1} \{0, 0, 0, 100, 100, 100, 2 \times 10^{-18}\}$$

$$\text{cov}(v_i, v_i) = R^c = \text{diag}(4.572^2, 0.05 \times (\pi/180)^2 / \tau, 0.05 \times (\pi/180)^2); \text{ 탐지 레이더}$$

$$cov(v_i, v_i) = R^p = \text{diag}\{4.572^2, 1.5^2, 1.5^2\}; \text{ 위상배열레이더}$$

$$L = 2.9 \times 10^{-5}, L_d = 6 \times 10^{-6} \times \Delta_i, \Delta t = 0.5, |\Delta_i| \leq 1, 0 < \tau < 1$$

상태초기치 및 초기 오차공분산은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\text{-position} \\ y\text{-position} \\ z\text{-position} \\ x\text{-velocity} \\ y\text{-velocity} \\ z\text{-velocity} \\ \text{atmospheric density} \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 4.6 \times 10^5 \\ 4.2 \times 10^5 \\ 3.1 \times 10^5 \\ -1.7 \times 10^4 \\ -1.6 \times 10^4 \\ -8.7 \times 10^3 \\ 5 \times 10^{10} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_0 = 10^6 \times \text{diag}\{.5, 1.5, 1.5, 0.015, 0.015, 0.00015, 10^{-6} \exp(-7.38 \times 10^{-5})\}$$

각 모의실험은 200번의 Monte Carlo 모의실험을 수행하여 RMS 값을 그래프로 나타낸다. 그림 4는 위상배열레이더에 대한 추적 결과를 보여주고 있으며 CERKF가 ERKF의 선형화 오차를 감소시킴으로써 추적 성능이 ERKF보다 우수함을 살펴볼 수 있다. 그림 5는 탐지레이더의 경우에 있어서의 두 필터간 성능비교를 나타내고 있으며 위상배열레이더의 경우와 마찬가지로 CERKF의 ERKF에 대한 성능우위를 볼 수 있다.

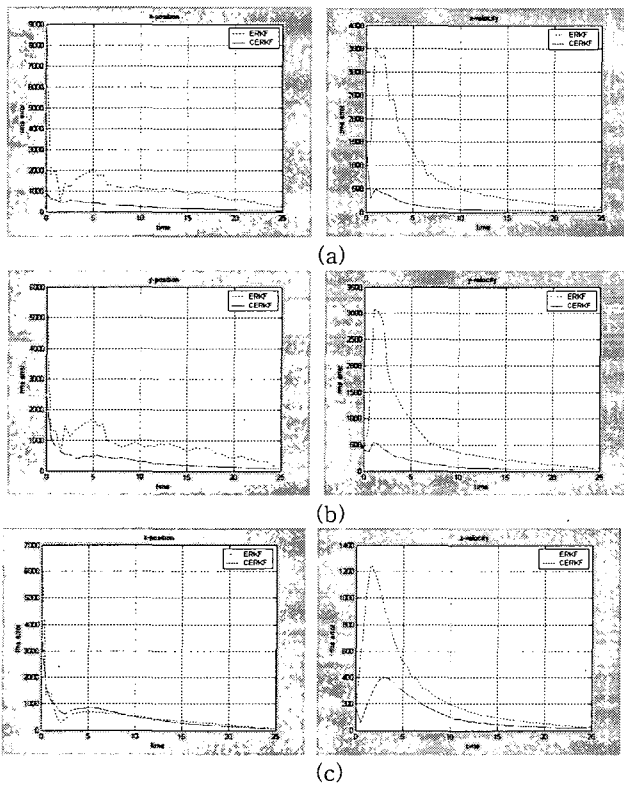


그림 4 위상배열레이더에 대한 ERKF와 CERKF의 평균제곱추정오차 궤적 비교  
 (a) x축에 대한 위치, 속도 (b) y축에 대한 위치, 속도 (c) z축에 대한 위치, 속도  
 Fig. 4 RMS estimation error trajectory comparison of ERKF and CERKF for phased-array radar  
 (a) position, velocity in x direction (b) position, velocity in y direction (c) position, velocity in z direction

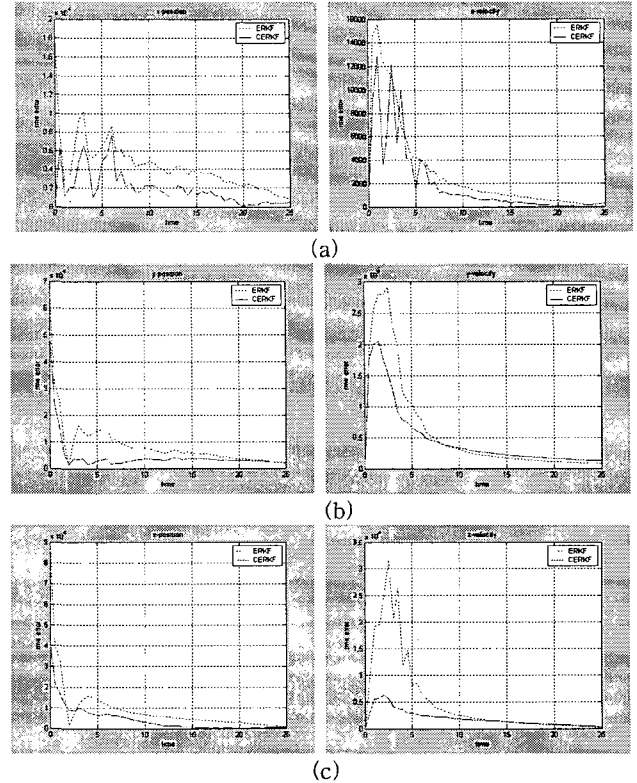


그림 5 탐지 레이더에 대한 ERKF와 CERKF의 평균제곱추정오차 궤적 비교  
 (a) x축에 대한 위치, 속도 (b) y축에 대한 위치, 속도 (c) z축에 대한 위치, 속도  
 Fig. 5 RMS estimation error trajectory comparison of ERKF and CERKF for scanning radar  
 (a) position, velocity in x direction (b) position, velocity in y direction (c) position, velocity in z direction

### 5. 결 론

표적추적시스템 설계를 위한 가장 중요한 문제 중 하나는 표적의 동특성 및 표적 정보의 추정방정식에 대한 정확한 모델링이며, 현재까지의 연구 결과들에 의하면 탄도미사일과 같은 장거리이동표적의 동특성은 비선형 불확정 시스템으로 모델링 된다. 또한 표적 동특성의 불확실성 및 비선형성과 더불어 정밀 표적추적시스템의 설계를 어렵게 하는 다른 한 요인으로 복잡한 형태의 레이더 측정방정식을 생각할 수 있으며, 실제 표적추적시스템은 레이더 중심의 극좌표계로부터 표적 정보에 대한 측정값들을 얻게 되므로 이를 표적 운동의 표현이 용이한 직각좌표계로 변환하면 표적추적시스템의 관측식은 비선형 방정식으로 표현될 수밖에 없다. 이 경우 ERKF를 이용한 추적시스템의 설계가 가능하지만 많은 연구 결과들에서 이미 확인되었듯이 측정방정식의 선형화 과정에서 발생하는 오차가 전체 추적시스템의 성능저하에 기여하므로 선형화하는 과정에서 발생하는 오차를 줄이기 위한 방안이 필요하게 된다. 따라서, 본 논문에서는 그러한 선형화 과정에서 발생하는 오차를 최소화할 수 있는 CERKF를 제안하였다. 제안된 비선형 강인 필터링 기법은 ERKF의 기본 구조에 거리-방향 코사인 기법이 결합된 형태로 표적 동특성의 불확실성에 강한 성능을 보일 뿐만



아니라 레이더 측정방정식에 좌표변환 기법을 적용함으로써 비선형 측정방정식의 선형화 오차를 효과적으로 줄일 수 있다. 표적추적 문제에 대한 모의 실험을 통하여 이전의 ERKF의 추정값에 선형화 오차가 포함되어 있고, 이들 오차가 추정오차에 직접적인 영향을 미친다는 사실을 확인할 수 있었고, 본 논문에서 제시된 CERKF는 이전의 ERKF의 우수한 성능을 유지하면서, 보다 정확한 성능을 보인다는 것을 입증할 수 있었다. 본 논문에서 제시된 CERKF가 ERKF보다 구현하기가 힘들고 수학적으로 복잡하기는 하지만, 보다 나은 추적 성능을 필요로 하는 무기 방어 체계에서 ERKF보다 CERKF가 더 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

**참 고 문 헌**

- [1] M. Athans, R.P. Wishner, and A. Bertolini, "Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-13, Oct. pp. 504-514, 1968
- [2] R.K. Mehra, "A comparison of several nonlinear filter for reentry vehicle tracking", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-16, No. 4, pp. 307-319, 1971
- [3] 이현석, 나원상, 진승희, 윤태성, 박진배, "확장강인칼만 필터를 이용한 접근탄도미사일 추적시스템", 제어자동화시스템학회 학술대회(KACC), 2000.
- [4] G.M. Siouris, G. Chen and J. Wang, "Tracking and incoming ballistic missile using and extended interval Kalman filter", IEEE Trans. Aero. Electro. Sys., Vol. 33, No. 1, pp. 232-239, 1997
- [5] 박성택, "Nonlinear filtering techniques for radar tracking", 공학박사학위논문, 서울대학교, 1998
- [6] D.P. Bertsekas and I.B. Rhodes, "Recursive state estimation for set-membership description of uncertainty", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 16, No. 2, pp. 117-128, 1971
- [7] I.R. Petersen and A.V. Savkin, Robust Kalman Filtering for Signal and Systems with Large Uncertainties, Birkhuser, 1999
- [8] B. Hassibi, A.H.Sayed and T. Kailath, "Linear estimation in Krein space-Part I: Theory", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 41, pp.18-33, 1996
- [9] B. Hassibi, A.H.Sayed and T. Kailath, "Linear estimation in Krein space-Part II: Applications", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 41, pp.34-49, 1996

**저 자 소 개**



**신 중 구(申 鍾 九)**

1973년 11월 24일생. 1999년 건국대 전기공학과 졸업. 2001년 연세대 전기전자공학과 대학원 졸업(석사). 2001년~현재 LG전자 DM연구소 주임연구원.  
Tel : 02) 526-4826, Fax : 02) 572-3087  
E-mail : meshshin@lge.com



**이 태 훈(李 泰 勳)**

1969년 11월 16일생. 1992년 연세대 전기공학과 졸업. 1995년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1997년~현재 연세대 전기전자공학과 박사과정  
Tel : 02) 2123-2773, Fax : 02) 362-4539  
E-mail : thnlee@yonsei.ac.kr



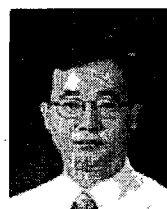
**윤 태 성(尹 泰 星)**

1978년 연세대 전기공학과 졸업. 1980년 동대학원 졸업(석사). 1988년 동대학원 졸업(공학박). 1995년~현재 창원대학교 전기공학과 교수  
Tel : 055) 279-7513, Fax : 055) 263-9956  
E-mail : tsyoon@sarim.changwon.ac.kr



**최 윤 호(崔 允 浩)**

1957년 1월 14일생. 1980년 연세대 전기공학과 졸업. 1982년 동대학원 졸업(석사). 1991년 동대학원 졸업(공학박). 1993년~현재 경기대학교 전자·기계공학부 부교수  
Tel : 031) 249-9801, Fax : 031) 249-9796  
E-mail : yhchoi@kuic.kyonggi.ac.kr



**박 진 배(朴 珍 培)**

1954년 8월 7일생. 1977년 연세대 전기공학과 졸업. 1985년 Kansas State University 전기 및 컴퓨터 공학과 졸업(석사). 1990년 동대학원 졸업(공학박). 1992년~현재 연세대학교 전기전자공학과 교수.  
Tel : 02) 2123-2773, Fax : 02) 362-4539  
E-mail : jbpark@yonsei.ac.kr