

셸구조물의 기하학적 비선형해석

Geometrically Non-linear Analysis of Shell Structures

장 명 호*
Jang, Myung-Ho

김 재 열**
Kim, Jae-Yeol

서 삼 열***
Sur, Sam-Yeol

Abstract

In this work, a finite element model is presented for geometrically non-linear analysis of shell structures. Finite element by using a three-node flat triangular shell element is formulated. The non-linear incremental equilibrium equations are formulated by using an updated Lagrangian formulation and the solutions are obtained with the incremental/iterative Newton-Raphson method and arc length method.

Some of results are presented for shell structures. The obtained results are in good agreement with the results available in existing literature.

keywords : Finite element method, Three-noded flat triangular shell element, Geometrically non-linear analysis, Newton-Raphson method

1. 서 론

일반적으로 셸 구조물의 유한요소 해석에는 대별하여 두 종류의 요소를 고려할 수 있다. 첫 째는 셸 이론에 바탕을 둔 곡면요소를 이용하는 방법이고, 또 하나는 평판 휨 요소와 막요소를 조합하여 만든 평면 셸요소를 이용하여 곡면구조를 근사(近似)하는 방법이다. 곡면 요소를 이용하여 셸 구조물을 해석함에 있어서는 정식화 과정의 어려움과 곡률을 계산해야 하는 문제 등 여러가지 측면에서 비효율적인 특징이 있다. 특히 기하학적 비선형성을 고려하는 경우에는 이런 비효율적인 특징이 나타날 수 있다. 반면에 평면 셸요소의 경우는 이미 만들어져있는 평판 휨요소와 막요소의 조합으로 간단하게 만들 수 있기 때문에 그러한 면에서는 효율적이라고 할 수 있다.

기하학적 비선형성을 포함하는 평형 방정식을 구성하는 방법으로는 반복 수행과정에서 기준형상을

어디에 두느냐에 따라 Total Lagrangian Formulation(TLF)과 Updated Lagrangian Formulation(ULF)을 가장 일반적으로 사용한다. TLF는 기하학적 비선형성을 포함하는 문제와 탄성범위의 안정해석에 폭 넓게 적용되고 있다. ULF는 셸, 보, 판등 세장한 구조체에 유용하게 적용된다.

따라서 이 연구에서는 비선형성을 고려하는데 있어서 좀더 효율적인 삼각 평면 요소와 ULF를 이용하여 셸구조물의 기하학적 비선형거동을 파악하고자 한다.

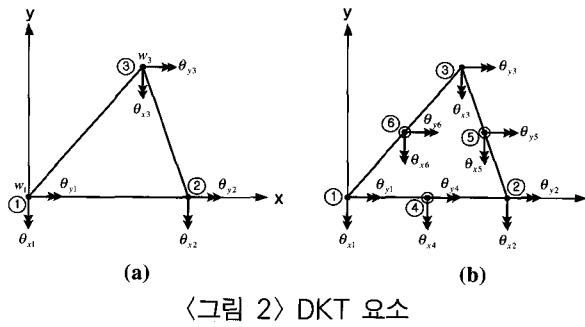
2. 평면 삼각 셸요소

이 논문에서 사용한 평면 셸요소는 Discrete Kirchhoff Triangle(DKT) 요소와 Linear Strain Triangle(LST) 요소를 조합하여 사용하였다. <그림 1>은 DKT 요소를 보여준다. 기본적인 DKT 요소는 <그림 1(b)>처럼 6개의 절점에 12개의 자유도로 구성되어 있으나, <그림 1(a)>처럼 3절점, 9개의 자유도를 지닌 삼각요소로 축약하여 적용하였다. <그림 2>는 논문에 적용한 LST element를 나타낸다. 여기에서

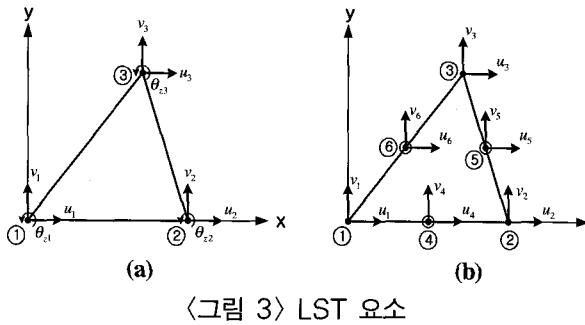
* 정회원 · 대림대학 강사, 공학박사

** 정회원 · 협성대학교 교수, 공학박사

*** 정회원 · 대림대학 교수, 공학박사



<그림 2> DKT 요소



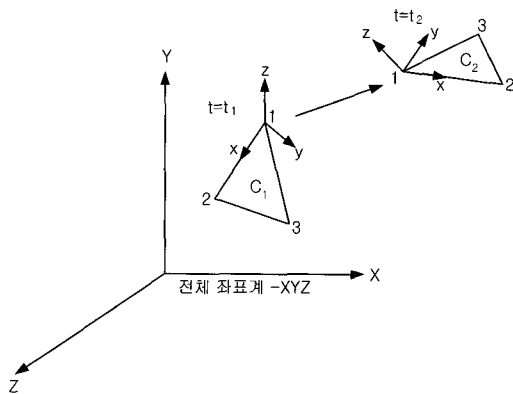
<그림 3> LST 요소

적용된 LST element는 기본적으로 6개의 절점과 12개의 자유도를 가지고 있다.<그림 2(b)> 이것을 3절점 9자유도의 요소로 만들어 적용하였다.<그림 2(a)>

최종적으로 만들어진 평면 삼각 셀요소는 각 절점에 6개의 자유도($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)를 지니게 된다.

3. 기하학적 비선형성을 고려한 평면 삼각 적층셀요소의 정식화

3차원 탄성체의 변형 전후의 평형상태는 <그림 4>와 같이 시간 $t=t_1$ 에서 이미 알고 있는 평형상태



<그림 3> 탄성체의 변형

C_1 과, 시간 $t=t_2$ 의 새로운 평형상태 C_2 로 정의할 수 있다. 이 관계를 이용하여 평형방정식을 정식화하면 비선형 평형방정식을 만들 수 있다. 이 논문에서 사용한 평면 삼각 셀요소의 정식화는 가상일의 원리를 적용할 수 있다.

3.1 변형도 관계식

구조체의 대변형을 고려한 변형도식은 다음과 같이 면내변형도와 면외변형도 성분으로 구분하여 나타낼 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{x\} \tag{1}$$

여기에서

- $\{e\}$: 면내 변형도 벡터
- $\{x\}$: 면외 변형도 벡터

각각의 변형도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

$$\{x\} = \{\beta_{x,x} \ \beta_{y,y} \ \beta_{x,y} + \beta_{y,x}\}^T \tag{3}$$

여기에서

- u, v, w : 중립면에서의 변위 성분
- β_x, β_y : 각각 $x-z, y-z$ 중립면 법선의 회전 성분

3.2 합응력, 합모멘트 관계식

내부 가상 일은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_{C_1} \delta\{\varepsilon\}^T \{s\} dV \\ &= \int_{C_1} (\delta\{e\}^T \{N\} + \delta\{x\}^T \{M\}) dA \end{aligned}$$

여기에서

- A : C_1 에서 요소 중립면의 면적
- $\{N\}$: 합응력
- $\{M\}$: 합모멘트
- $\{s\}$: 응력

합응력과 합 모멘트를 다음과 같이 분해 할 수 있다.

$$\{N\} = \{N_1\} + \{\Delta N^m\} \quad (4)$$

$$\{M\} = \{M_1\} + \{\Delta M^m\} \quad (5)$$

여기에서

- $\{N_1\}, \{M_1\}$: 시간이 $t = t_1$ 일 때 C_1 에서의 합응력과 합모멘트
- $\{\Delta N^m\}, \{\Delta M^m\}$: 합응력과 합 모멘트의 증분

식(4), (5)의 각각의 항은 다음과 같다.

$$\{N_1, M_1\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\}(1, z) dz \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta N^m\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] (\{e\} + z\{x\}) z dz \\ &= [A] \{e\} + [B] \{x\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta M^m\} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{Q}_k] (\{e\} + z\{x\}) z dz \\ &= [B] \{e\} + [D] \{x\} \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서

- $[Q_k]$: 좌표 변환된 탄성계수 매트릭스
- $\{\sigma\}$: Cauchy stress 벡터
- $[A], [B], [D]$: 탄성계수 매트릭스
- h : 각 층의 높이

3.3 비선형 평형방정식

임의의 시간 t 에 대한 비선형 평형방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{q}_t - \mathbf{f}_t = \mathbf{0} \quad (9)$$

여기에서 \mathbf{g} 는 외력과 내력 사이의 잔류응력이나 불평형력이며, \mathbf{q} 는 요소의 내력항이고, \mathbf{f} 는 외력항이다.

이 논문에서 비선형 평형방정식은 뉴턴-랩슨법을 사용해 풀었다. 비선형 평형방정식은 Taylor 급수를 적용하여 단계적으로 선형화 하였다. t_1 에 대한 평형상태를 알고 있다고 가정하면, $t_1 + \Delta t$ 에 대한 평형방정식을 t_1 에 대하여 정의할 수 있는데 Taylor 급수를 적용하여 선형화 면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{t_1 + \Delta t} &= \mathbf{q}_{t_1} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{a}} \right)_{t_1} \delta \mathbf{a} - \mathbf{f}_{t_1 + \Delta t} \\ &= \mathbf{q}_{t_1} + [\mathbf{k}] \delta \mathbf{a} - \mathbf{f}_{t_1 + \Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서, \mathbf{a} 는 절점 변위 벡터

3.4 강성 매트릭스

평면 삼각 셀요소의 강성매트릭스 $[\mathbf{k}]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}] &= \int_{C_1} ([C_2]^T [G_1]^T [A] [G_1] [G_2] \\ &\quad + [B_{dkt}]^T [D] [B_{dkt}] \\ &\quad + [B_{dkt}]^T [B] [G_1] [G_2] \\ &\quad + [G_2]^T [G_1]^T [B] [B_{dkt}] \\ &\quad + [G_2]^T \left[\begin{array}{ccc} \hat{N} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{N} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{N} \end{array} \right] [G_2]) dA \end{aligned} \quad (11)$$

위 식에서, 오른쪽 첫 번째 항이 미소변위를 지배하는 강성매트릭스 $[\mathbf{k}]_E$, 두 번째, 세 번째, 네 번째 항이 초기변위 매트릭스 혹은 대변위 매트릭스 $[\mathbf{k}]_{NL}$ 라고 하고, 마지막 다섯 번째 항이 초기응력매트릭스 혹은 기하강성매트릭스 $[\mathbf{k}]_s$ 라고 한다. 즉,

$$[\mathbf{k}]_T = [\mathbf{k}]_E + [\mathbf{k}]_{NL} + [\mathbf{k}]_s \quad (12)$$

4. 수치해석

4.1 단부에 모멘트를 받는 캔틸레버보

이 예제는 자유단에 모멘트 하중을 받는 캔틸레버 보 문제이다. 대변형 해석 능력을 검토하는 대표적인 예제이다. 기하형상과 재료상수는 <그림 4>와 같다. 예제는 42절점, 40요소로 모델링하였다.

이 예제는 순수 휨문제라 모멘트가 작용하게 되면 캔틸레버 보는 완전한 원을 형성하게 된다. 이 경우 변형된 캔틸레버 보의 반경은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

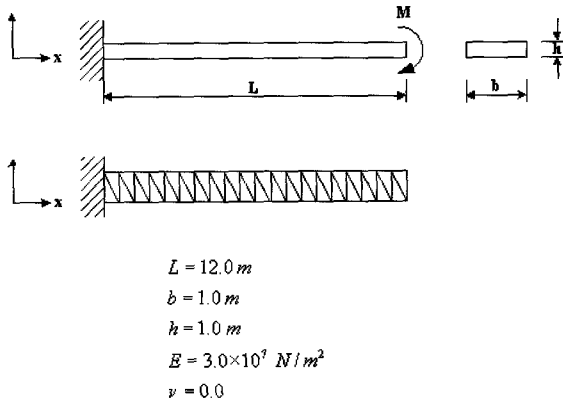
완전한 원호를 만들 때의 모멘트는 다음과 같다.

$$M_0 = \frac{2\pi EI}{L}$$

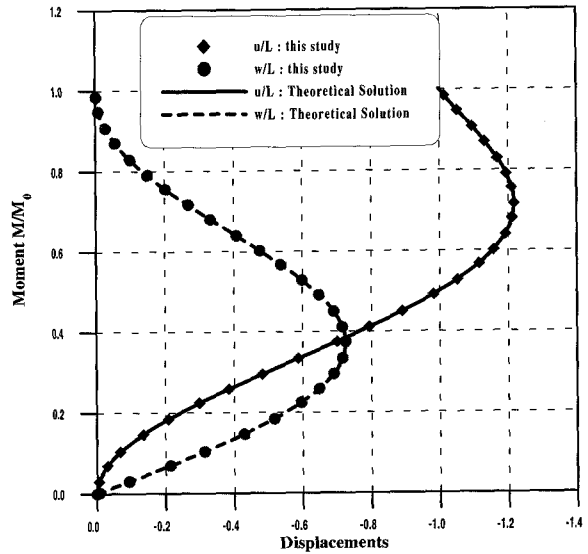
따라서 캔틸레버 보가 변형되어 만드는 원의 반경은 다음과 같다.

$$\rho = \frac{L}{2\pi}$$

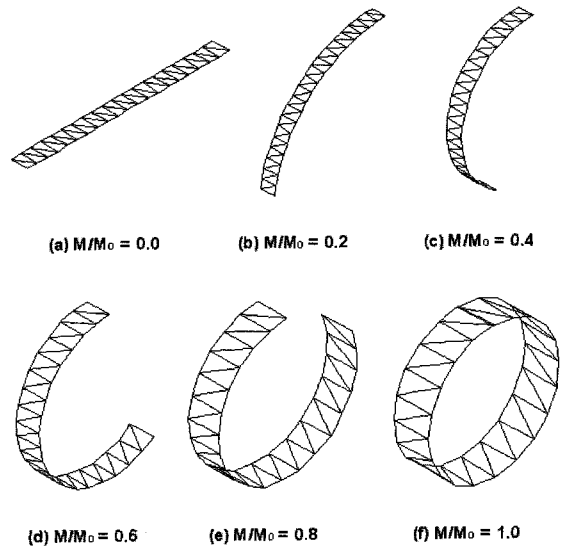
해석결과와 하중-변위 곡선은 무차원량으로 표현하여 <그림 5>에 나타내었다. 해석결과를 이론해와 비교해 보면 잘 일치함을 볼 수 있다. <그림 6>은 하중 증분에 의한 변형 형상을 보여주고 있다.



<그림 4> 모멘트를 받는 캔틸레버보



<그림 5> 캔틸레버보의 하중-변위곡선



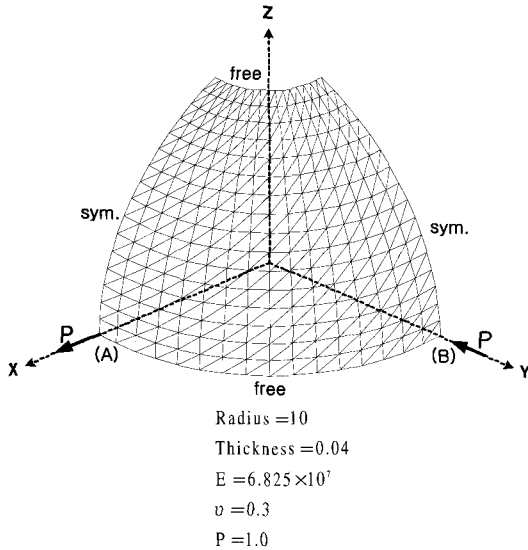
<그림 6> 하중 단계별 변형 형상

4.2 원형 개구부가 있는 반구형 셸의 비선형 해석

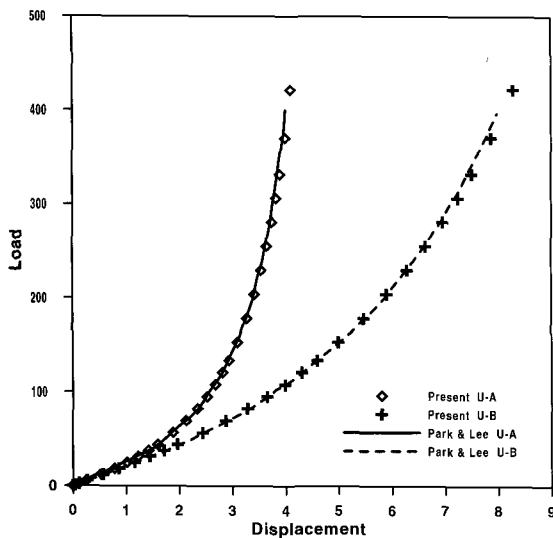
<그림 7>은 셸의 표면에 수직인 4개의 방사방향 하중이 90°의 간격으로 서로 반대방향으로 작용하는 반구형 셸이다. 단 상부에는 z축과 18°의 각을 이루는 원형 개구부를 갖는다. 이 예제 모델은 대칭성을 이용하여 1/4만 해석을 수행하였다. 본 예제의 기하 형상과 재료상수, 경계조건은 <그림 7>과 같다.

변위는 하중 작용하는 두 지점의 변위를 사용하였다. 기본적인 비선형 해법은 호장법을 사용하였다. 변위는 가력점 두 곳의 변위를 기준에 발표된 8

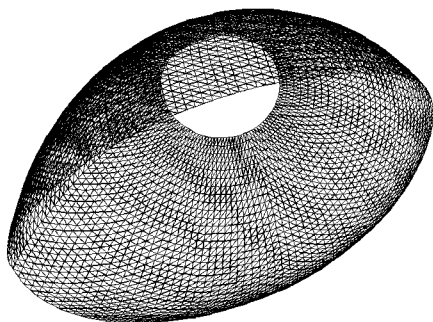
절점 입체요소를 이용한 해석결과와 비교 검토하였다. 검토 결과는 <그림 8>에 나타내었다. 두 결과가 서로 잘 일치함을 볼 수 있다. <그림 9>는 반구형 셀의 변형 형상이다.



<그림 7> 반구형 셀



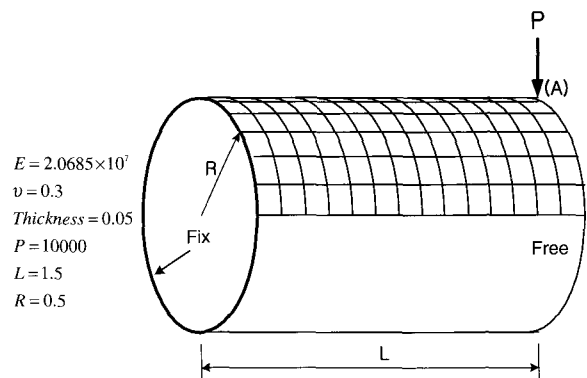
<그림 8> 반구형 셀의 하중 변위 곡선



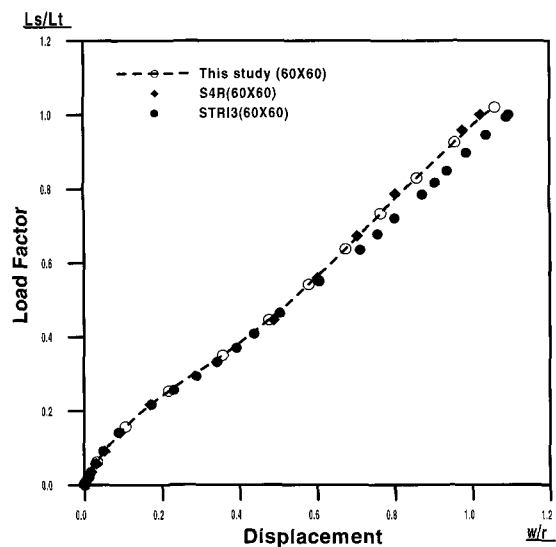
<그림 9> 반구형 셀의 변형 형상

4.3 캔틸레버형 원통셀

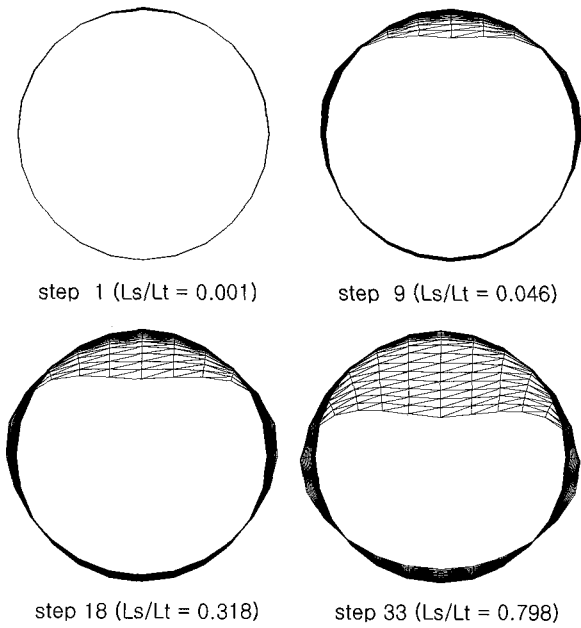
<그림 10>은 단부에 집중하중을 받는 캔틸레버형 원통셀 모델이다. 해석 결과는 <그림 11>에 나타내었고, <그림 12>는 하중 증분에 따른 캔틸레버형 원통셀의 변형 모습을 보여주고 있다. 같은 조건으로 해석한 ABAQUS의 결과를 살펴보면 삼각 셀요소 (STR13)로 해석한 결과가 하중 벡터가 0.5를 넘어서면서 사각 셀요소(S4R)로 해석한 결과와 서로 다르게 나타나는 것을 볼 수 있다. 그러나 본 연구에서 개발한 프로그램을 이용해서 구한 해는 삼각 셀요소임에도 불구하고 ABAQUS의 사각 셀요소(S4R)로 해석한 결과와 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 이것은 조합된 막요소의 차이에서 기인된 것으로 볼 수 있다. 참고로 ABAQUS의 평면 삼각 셀요소는 평판 휨요소와 막요소 CST(Constant Strain Triangle)



<그림 10> 캔틸레버형 원통셀



<그림 11> 원통셀의 하중-변위 관계 (A점)



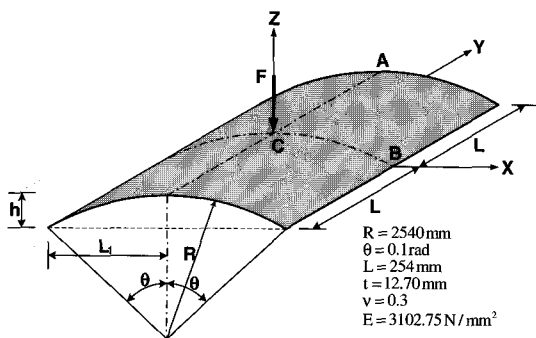
〈그림 12〉 원통셸의 하중 증분에 따른 변형

가 조합된 것이고, 본 프로그램에서 사용한 것은 평균 휨요소와 LST(Linear Strain Triangle)이다.

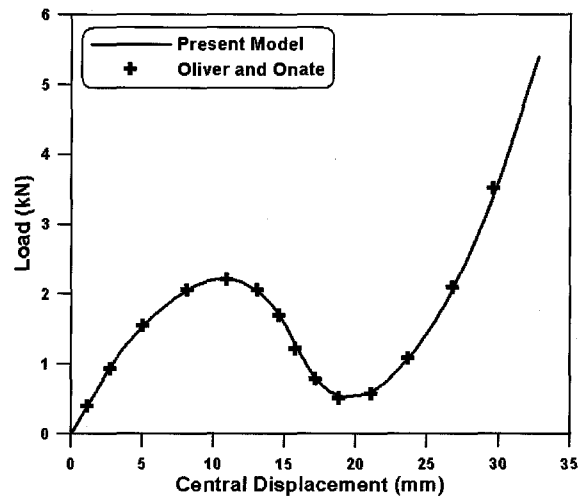
4.4 집중하중을 받는 원통형 셸

본 예제는 중앙에 집중하중을 받는 원통형 셸 모델이다. 기하형상과 재료적 성질은 <그림 13>에 표현하였다. 경계조건은 곡선부분은 자유단, 직선부분은 단순지지로 구성하였다. 우선 <그림 13>에서 보는 바와 같이 등질등방성 재료로 가정하여 해석을 수행하여 비선형 해석 능력을 검토하였다.

중앙부 C점에서의 처짐은 스냅스투의 거동을 보였으며, 기존에 발표된 연구결과와 비교적 잘 일치하였으며, 안정적인 결과를 얻을 수 있었다. 그 결과는 <그림 14>에 나타내었다.



〈그림 13〉 집중하중을 받는 원통셸



〈그림 14〉 하중변위곡선

4. 결 론

본 연구에서는 셸 구조물의 기하학적 비선형을 다루고 있다. 비선형 방정식을 정식화 하는 기법으로는 Updated Lagrangian Formulation(ULF)를 적용하였고, 해를 구하는 기법으로는 하중증분법과 호장법을 사용하였다. 해석에 사용한 요소는 평면요소와 plate요소를 결합시킨 평면 셸요소를 사용하였다. 가장 일반적인 예제들을 통해 해석에 적용된 요소와 기법의 유효성을 확인하였다. 또한 기하학적 비선형 해석이 가능한 상용 프로그램인 ABAQUS의 비교도 시도하였다. 똑같은 요소 분할의 조건을 가지고 해석한 결과 이 논문에서 해석한 결과가 ABAQUS의 평면요소(STRI3)로 해석한 결과보다 좀더 ABAQUS의 4절점 곡면 요소(S4R)의 결과와 근접한 결과를 볼 수 있었다. 이것은 평면 셸요소를 구성하는 평면요소와 휨요소의 종류의 차이에서 비롯된 것으로 본다.

또한 해에 대한 수렴 속도의 비교를 통하여 본 모델링 기법의 효율성을 확인 할 수 있었다. 수렴 속도의 비교는 단순한 계산 시간의 비교는 불합리한 점이 있기에 총증분수와 반복수를 가지고 비교하였다. 비교 결과는 <표 1>에 나타내었다.

본 논문에서는 평면삼각요소를 이용한 셸구조물의 기하학적 비선형 해석을 수행하였고, 그 적용성을 예제를 통하여 확인하였다. 그러나 변위 뿐만 아니라 휨내력등 다른 여러가지 구조거동에 대한 검토

〈표 1〉 총 증분수와 반복수 비교

| 예제 | ABAQUS | Present |
|---------------------|--|-------------|
| 모멘트를 받는 캔틸레버보 | STR13 : N=50, I=313 S4R : N=50, I=245 | N=50, I=200 |
| 원형 개구부가 있는 반구형 셸 | STR13 : N=48, I=267 S4R : N=25, I=131 | N=22, I=88 |
| N : 총 반복횟수, I=총증분횟수 | | |

도 필요하다고 여겨진다. 본 연구에서 이용한 평면 셸 요소를 이용하여 동적 해석과 좌굴 문제등 셸의 전반적인 거동에 관한 문제로의 확대 적용이 필요하다고 사료된다.

참 고 문 헌

1. Seide, P. and Jamjooon, T. M. M., "Large Deformation of Circular Rings Under Nonuniform Pressure", Journal of Applied Mechanics, Vol. 41, 1974, pp.192~196.
2. Schweizerhoff, K. and Ramm, E., "Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analysis", Computer & Structures, V. 14, No.1-4, 1984, pp.1413~1429.
3. Crisfield, M. A., "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through", Computer & Structures, V.13, 1981, pp.55~62.
4. Argyris, J. H., Dunne, P. C., Malejannakis, G. A. and Schelkle, E. "A Simple Triangular Facet Shell Element with Applications to Linear and Non-linear Equilibrium and Elastic Stability Problems", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.10, 1977, pp.371~403.
5. Horrignoe, G. and Bergan, P. G., "Nonlinear Analysis of Free-Form Shells by Flat Finite Elements", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.16, 1978, pp.11~35.

6. Brank, B. and Carrera, E., "A family of shear-deformable shell finite elements for composite structures", Computers & Structures, Vol.76, 2000, pp.287~297.
7. Malvern, L. E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall Inc, 1969.
8. Argyris, John and Tenek, Lazarus, "An Efficient and Locking-free Flat Anisotropic Plate and Shell Triangular Element", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.118, pp.63~119.
9. Fatt, Michelle S. Hoo, "Elastic-plastic collapse of non-uniform cylindrical shells subjected to uniform external pressure", Thin-Walled Structures, Vol.35, 1999, pp.117~137.
10. Blachut, J. and Jaiswal, O. R., "On buckling of toroidal shells under external pressure", Computers & Structures, Vol.77, 2000, pp.233~251.
11. Tian, J., Wang, C. M. and Swaddiwudhipong, S., "Elastic buckling analysis of ring-stiffened cylindrical shells under general pressure loading via the Ritz method", Thin-Walled Structures, Vol.35, 1999, pp.1~24
12. Combescure A. and Galletly, G.D., "Plastic buckling of complete toroidal shells of elliptical cross-section subjected to internal pressure", Thin-Walled Structures, Vol.34, 1999, pp.135~146.
13. Godoy, Luis A., "Stressws and Pressures in thin-walled structures with damage and imperfections", Thin-Walled Structures, Vol.32, 1998, pp.181~206.
14. Gusic, G., Combescure, A. and Jullien, J. F., "The influence of circumferential thickness variations on the buckling of cylindrical shells under external pressure", Computers & Structures, Vol.74, 2000, pp.461~477.
15. Sekhon, G. S. and Bhatia, R. S. "Generation of exact stiffness matrix for a spherical shell ele-

- ment", *Computers & Structures*, Vol.74, 2000, pp.335~349.
16. Boote, D., Mascia, D., Monti, M., Rizzuto E. and Tedeschi, R., "Elastic instability of thin Cylindrical shells: Numerical and experimental investigation", *Ocean Engineering*, Vol. 24, No.2, 1997, pp.133~160.
 17. Paliwal, D.N. and Pande, A., "Orthotropic cylindrical pressure vessels under line load", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol.76, pp.455~459, 1999.
 18. Carnoy, E. G., Guennoun, N. and Sander, G., "Static Buckling Analysis of Shells Submitted to Follower Pressure by the Finite Element Method", *Computers & Structures*.
 19. Loganathan, K., Chang, S. C., Gallagher, R. H. and Abel, J. F., "Finite Element Representation and Pressure Stiffness in Shell Stability Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.14, pp.1413~1429.
 20. Ross, Carl T. F., Sawkins, David and Terry Johns, "Inelastic buckling of thick-walled circular conical shells under external hydrostatic pressure", *Ocean Engineering*, Vol.26, 1999, pp.1297~1310.