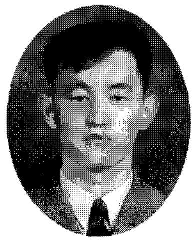
판 및 쉘 구조물의 유한요소해석을 위한 평면 삼각 쉘 요소의 정식화

- Formulation of Flat Triangular Shell Element for FE analysis of Plate and Shell Structures -



장 명 호*
Jang, Myung-Ho

1. 서 론

일반적으로 쉘 구조물의 유한요소 해석에는 대별하여 두 종류의 요소를 고려할 수 있다. 첫 째는 쉘 이론에 바탕을 둔 곡면요소를 이용하는 방법이고, 또 하나는 면외 요소와 면내요소를 조합하여 만든 평면 쉘 요소를 이용하여 곡면구조를 근사(近似)하는 방법이다.

곡면 요소는 평면요소의 기하학적 불연속성을 해결하기 위하여 개발된 요소이다. 일반적으로 곡면요소는 고전 쉘 이론에서 유도되었다. 발표되었던 곡면 요소는 <그림 1>에 나타내었다.

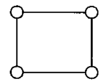
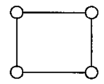
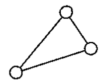
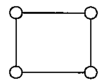
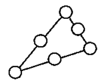
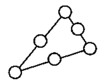
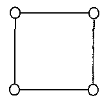
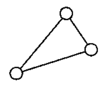
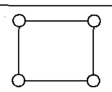
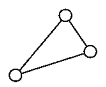
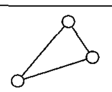
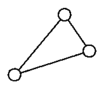
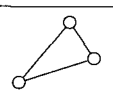
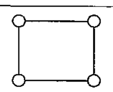
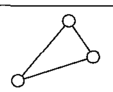
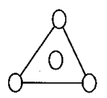
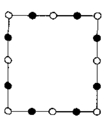
곡면요소를 이용하여 쉘 구조물을 해석함에 있어서 좀더 적은 요소 분할을 통하여 정확한 해를 얻을 수 있는 장점이 있으나, 정식화 과정의 어려움과 곡률을 계산해야 하는 문제 등 여러가지 측면에서 비효율적인 특징이 있다. 특히 기하학적 비선형성을 고려하는 경우에는 이런 비효율적인 특징이 크게 나타날 수 있다.

평면 요소는 면외 요소와 면내 요소의 조합으로 간단하게 만들 수 있기 때문에 그러한 면에서는 효율적이라고 할 수 있다. 평면요소의 특징을 살펴보면 정식화 과정이 간단하고, 모델의 기하 데이터 작성이 쉬우며, 여러 가지 요소를 조합하여 사용할 수 있는 장점이 있다. 그리고 단점으로는 기하학적 불연속 문제와 해의 수렴성 문제 등이 있다. 그러나 이러한 단점들은 많은 요소분할을 통하여 해결할수 있으며 많은 요소분할에 의해 발생하는 해석시간의 증가는 컴퓨터의 발달로 해결되었다고 할 수 있다. 또한 평면요소는 비선형을 고려하여 해석하는 경우에는 그 장점이 두두러지게 나타난다. 기존에 발표되었던 평면요소는 <그림 2>에 나타내었다.

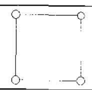
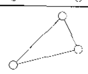
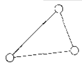
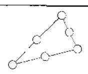
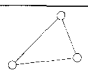
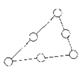
기하학적 비선형성을 포함하는 평형 방정식을 구성하는 방법으로는 반복 수행과정에서 기준형상을 어디에 두느냐에 따라 Total Lagrangian Formulation(TLF)과 Updated Lagrangian Formulation (ULF)을 가장 일반적으로 사용한다.[1] TLF는 기하학적 비선형성을 포함하는 문제와 탄성범위의 안정해석에 폭 넓게 적용되고 있다. ULF는 쉘, 보, 판등 세장한 구조체에 유용하게 적용된다.[2]

본 고에서는 평판 및 쉘구조의 해석에 있어서 좀 더 편리하게 접근할 수 있는 평면 쉘요소의 정식화 과정을 소개하고자 한다.

* 원광대학교 건축공학과 시간강사, 공학박사

Shape	Authors	Year	Displacement functions	Nodal d.o.f.s	Total d.o.f.s
	Connor and Brebbia	1967	u, v linear, w cubic	u, v, w, w_x, w_y	20
	Greene et al.	1968	u, v, w cubic	$u, u_x, u_y, u_{xy}, v, \ldots, w_{xy}$	48
	Strickland and Loden	1968	u, v linear, w cubic	u, v, w, w_x, w_y	15
	Gallagher and Yang	1968	u, v linear, w cubic	$u, v, w, w_x, w_y, w_{xy}$	24
	Bonnes et al.	1968	u, v cubic(HCT), w cubic	corner: $u, u_x, u_y, \ldots, w_y$ midside: u_x, v_x, w_x	36
	Argyris and Scharpf	1968	u, v, w cubic	corner: $u, u_x, \ldots, u_{yy}, \ldots, w_{yy}$ midside: u_x, v_x, w_x	63
	Pecknold and Schnobrich	1969	u, v quadratic, w cubic	u, v, w, w_x, w_y	20
	Ford[95]; Megard	1969	u, v linear, w quintic	$u, v, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$	24
	Deb Nath	1969	u, v linear, w cubic	$u, v, w, w_x, w_y, w_{xy}$	24
	Cowper et al.; Morin	1970	u, v cubic, w quintic	$u, u_x, u_y, v, \ldots$ $\ldots, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$	36
	Dupuis and Goel	1970	u, v, w quintic	$u, u_x, \ldots, u_{yy}, v, \ldots, w_{yy}$	54
	Brebbia et al.	1971	u, v linear, w cubic(HCT)	u, v, w, w_x, w_y	15
	Brebbia et al.	1971	u, v cubic, w cubic(HCT)	$u, u_x, u_y, \ldots, w_y$	27
	Yang	1973	u, v, w cubic	$u, u_x, u_y, u_{xy}, v, \ldots, w_{yy}$	48
	Dawe	1975	u, v, w quintic	$u, u_x, u_{yy}, v, \ldots, w_{yy}$	54
	Thomas and Gallagher	1976	u, v, w cubic	corner: $u, u_x, u_y, \ldots, w_y$ center: u, v, w	30
	Idelsohn	1981	u, v, w cubic	cornor: u, v, w, w_x, w_y midside: w_x node(1/3 and 2/3 each side); u, v	40

〈그림 1〉 곡면요소

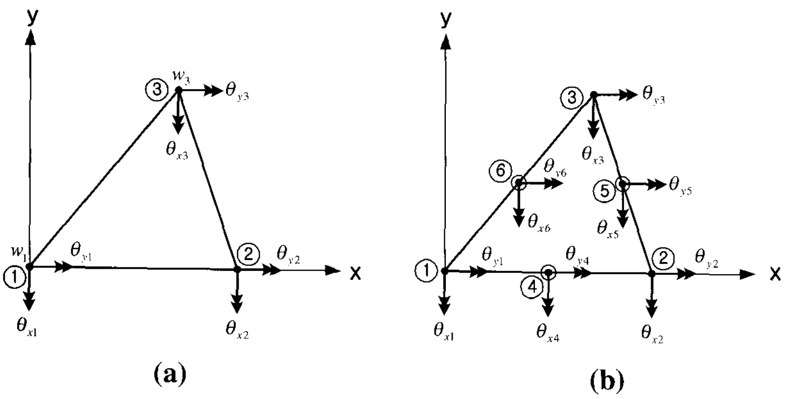
shape	Authors	Year	Displacememt functions	Nodal d.o.f.s	Total d.o.f.s
	Zienkiewicz and Cheung	1965	u, v linear, w cubic	u, v, w, wx, wy	20
	Zienkiewicz et al.	1968	u, v linear, w cubic (HCT)	u, v, w, wx, wy	15
	Clough and Johnson	1968	u, v linear, w cubic	u, v, w, wx, wy	15
	Dawe	1972	u, v linear, w quadratic	corner: u, v, w midside: wn	12
	Argyris et al.	1977	u, v linear, w cubic	u, v, w, wx, wy, wxy	18
	Meek and Tan	1986	u, v, w quadratic	u, v, w : Six Loof nodes (1/3 and 2/3 along each side): wn	24

〈그림 2〉 평면요소

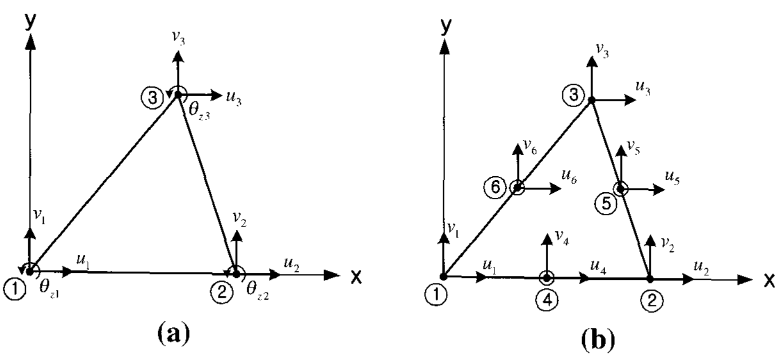
2. 평면 요소의 정식화

2.1 기본요소

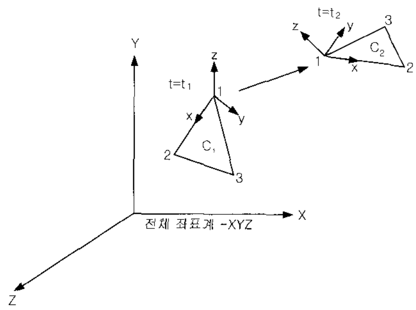
기본적인 평면 요소는 Discrete Kirchhoff Triangle(DKT) plate bending element와 Linear strain triangle(LST) element를 조합하여 사용하였다. <그림 3(a)>는 기본적인 DKT element를 보여준다. 기본적인 DKT element는 <그림 3(b)>처럼 6개의 절점에 12개의 자유도로 구성되어 있으나, 3절점, 9개의 자유도를 삼각요소로 축약하여 적용하였다.



〈그림 3〉 DKT bending element



〈그림 4〉 LST element



〈그림 5〉 탄성체의 변형

<그림 4(a)>는 LST element이다. 여기에서 적용된 LST element는 기본적으로 6개의 절점과 12개의 자유도를 가지고 있다.(<그림 4(b)>) 이것을 3절점 9자유도의 요소로 만들어 적용하였다.

최종적으로 만들어진 평면 쉘 요소는 각 절점에 6개의 자유도($u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)를 지니게 된다.

2.2 비선형 강성 매트릭스의 정식화

단일 요소를 위한 가상 일의 원리는 다음과 같다.

$$\delta W_e = \delta W_i \tag{1}$$

여기에서, δW_e는 외력에 의한 가상의 일, δW_i는 내력에 의한 가상의 일이다.

내부 가상 일은 다음과 같다.

$$\delta W_i = \int_{C_1} \delta\{\varepsilon\}^T \{s\} dV \tag{2}$$

여기에서, V는 C_1에서의 요소의 체적, $\{\varepsilon\}$는 Green-Lagrange 변형도 증분 벡터, $\{s\}$는 2차 Piola-Kirchhoff(PK2) 응력벡터이다.

구조체의 대변형을 고려한 변형도식은 다음과 같이 면내변형도(in-plane strain)와 면외변형도(out-of-plane strain) 성분으로 구분하여 나타낼 수 있다.

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{x\} \tag{3}$$

여기에서,

$\{e\}$: 면내 변형도 벡터, $\{x\}$: 면외 변형도 벡터 이다.

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ v_{,y} + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

$$\{x\} = \{\ \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x}\}^T \tag{5}$$

여기에서, u, v, w는 중립면에서의 변위, β_x, β_y는 각각 $x-z$, $y-z$ 중립면 법선의 회전이다.

내부 가상 일은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta W_i = \int_{C_1} \delta\{\varepsilon\}^T \{s\} dV = \int_{C_1} (\delta\{\varepsilon\}^T \{N\} + \delta\{x\}^T \{M\}) dA \tag{6}$$

여기에서, A는 C_1에서 요소 중립면의 면적, $\{N\}$는 합응력, $\{M\}$는 합모멘트이다.

$$\{N, M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{s\}(1, z) dz \tag{7}$$

여기에서 h는 두께이며, 합응력과 합 모멘트를 다음과 같이 분해 할 수 있다.

$$\{N\} = \{N_1\} + \{\Delta N^m\} \tag{8}$$

$$\{M\} = \{M_1\} + \{\Delta M^m\} \tag{9}$$

여기에서, $\{N_1\}, \{M_1\}$는 시간이 $t = t_1$일 때 C_1에서의 합응력과 합모멘트, $\{\triangle N^m\}, \{\triangle M^m\}$는 합응력과 합 모멘트의 증분이다.

면내 변형도의 첫 번째 변분은 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\{\delta e\} = \begin{Bmatrix} \delta e_1 \\ \delta e_2 \\ \delta e_3 \end{Bmatrix} \tag{10}$$

여기서.

$$\begin{aligned} \delta e_1 &= \delta u_{,x} + u_{,x}\delta u_{,x} + v_{,x}\delta v_{,x} + w_{,x}\delta w_{,x} \\ \delta e_2 &= \delta v_{,y} + u_{,y}\delta u_{,y} + v_{,y}\delta v_{,y} + w_{,y}\delta w_{,y} \\ \delta e_3 &= \delta u_{,y} + \delta v_{,x} + u_{,x}\delta u_{,y} + u_{,y}\delta u_{,x} \\ &\quad + v_{,x}\delta v_{,y} + v_{,y}\delta v_{,x} + w_{,x}\delta w_{,y} + w_{,y}\delta w_{,x} \end{aligned}$$

위의 방정식을 다음과 같이 다시 정리 할 수 있다.

$$\{\delta e\} = [G_1]\begin{Bmatrix} \delta u_{,x} \\ \delta u_{,y} \\ \delta v_{,x} \\ \delta v_{,y} \\ \delta w_{,x} \\ \delta w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

여기에서

$$[G_1] = \begin{bmatrix} 1+u_{,x} & 0 & v_{,x} & 0 & w_{,x} & 0 \\ 0 & u_{,y} & 0 & 1+v_{,y} & 0 & w_{,y} \\ u_{,y} & 1+u_{,x} & 1+v_{,y} & v_{,x} & w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \quad (12)$$

면내 변위 u, v는 절점 변위량으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{P\}^T & 0 \\ 0 & \{P\}^T \end{bmatrix}\{a_{lst}\} \quad (13)$$

여기에서 $\{a_{lst}\}$는 LST element의 절점 변위 벡터, $\{P\}$는 2차 형상함수 벡터이다.

면내 변위의 미분계수는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{P_{,x}\}^T & 0 \\ \{P_{,y}\}^T & 0 \\ 0 & \{P_{,x}\}^T \\ 0 & \{P_{,y}\}^T \end{bmatrix}[T_{lst}]\{a\} = [B_{lst}]\{a\} \quad (14)$$

여기에서, $\{P_{,x}\}$, $\{P_{,y}\}$는 국부 좌표계의 x, y축에 대한 형상함수의 미분계수 벡터, $[T_{lst}]$는 변환 매트릭스, $\{a\}$는 쉘 요소의 변위 벡터이다.

적분지점의 면외변위의 미분계수 $w_{,x}$, $w_{,y}$는 절점값에서 선형보간법을 적용하면 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} -b_2-b_3 & b_2 & b_3 \\ -c_2-c_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}[T_w]\{a\} = [B_w]\{a\} \quad (15)$$

여기에서, $[T_w]$는 변환 매트릭스이다.

식(14), 식(15)를 조합하여 면내변형도에 대한 첫 번째 변분을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{\delta e\} = [G_1][G_2]\{\delta a\} \quad (16)$$

여기에서, $[G_2]$는 6×18 매트릭스이다.

또한, 면외 변형도에 대한 첫 번째 변분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\{\delta \chi\} = \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} b_2H^T_{x,\xi} + b_3H^T_{x,\eta} \\ c_2H^T_{y,\xi} + c_3H^T_{y,\eta} \\ c_2H^T_{x,\xi} + c_3H^T_{x,\eta} + b_2H^T_{y,\xi} + b_3H^T_{y,\eta} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$[T_{dkt}]\{\delta a\} = [B_{dkt}]\{\delta a\}$$

여기에서 $H_{x,\xi}$, $H_{x,\eta}$, $H_{y,\xi}$, $H_{y,\eta}$는 좌표계에 대한 형상함수의 미분계수[10]이다.

외부 가상 일은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\delta W_e = \{\delta a\}^T\{f\} \quad (18)$$

여기에서 $\{f\}$는 요소의 외력 벡터이다. 단일 요소의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\{g\} = \{q\} - \{f\} = 0 \quad (19)$$

여기에서 $\{q\}$는 요소의 내력 벡터이고, $\{g\}$는 잔류 응력 벡터이다.

$$\{q\} = \int_{C_1}\left([G_2]^T[G_1]^T\{N\} + [B_{dkt}]^T\{M\}\right)dA \quad (20)$$

임의의 시간 t일 때 전체 좌표계에서 전체요소의 비선형 평형 방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{g}_t = \mathbf{q}_t - \mathbf{f}_t = \mathbf{0} \quad (21)$$

여기에서 $\mathbf{g}$는 외력과 내력 사이의 불평형력이다.

비선형 평형방정식은 뉴튼-랩슨법등을 사용하여 풀수 있으며, t_1에 대한 평형상태가 존재한다고 가정하면, $t_1 + \triangle t$에 대한 평형방정식을 t_1에 대하여 간

략화된 Taylor 급수를 적용하여 선형화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{t_1+\Delta t} &= \mathbf{q}_{t_1} + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{a}}\right)_{t_1} \delta \mathbf{a} - \mathbf{f}_{t_1+\Delta t} \\ &= \boldsymbol{q}_{t_1} + [\boldsymbol{K}]\delta \boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}_{t_1+\Delta t} = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

여기에서, $[\boldsymbol{K}]$는 요소강성매트릭스를 조합한 것이다.

전체강성매트릭스 $[\boldsymbol{K}]_T$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{K}]_T = & \int_{C_1} \Big([C_2]^T [G_1]^T [A][G_1][G_2] \\ & + [B_{dkt}]^T [D][B_{dkt}] + [B_{dkt}]^T [B][G_1][G_2] \\ & + [G_2]^T [G_1]^T [B][B_{dkt}] + [G_2]^T \begin{bmatrix} \hat{N} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{N} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{N} \end{bmatrix} [G_2] \Big) dA \end{aligned} \tag{23}$$

여기에서

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} n_x & n_{xy} \\ n_{xy} & n_y \end{bmatrix} \tag{24}$$

식(23)에서, 오른쪽 첫 번째 항이 미소변위를 지배하는 강성매트릭스 $[\boldsymbol{K}]_E$, 두 번째, 세 번째, 네 번째항이 초기변위 매트릭스 혹은 대변위 매트릭스 $[\boldsymbol{K}]_{NL}$라고 하고, 마지막 다섯 번째 항이 초기응력 매트릭스 혹은 기하강성매트릭스 $[\boldsymbol{K}]_\sigma$라고 한다. 즉,

$$[\boldsymbol{K}]_T = [\boldsymbol{K}]_E + [\boldsymbol{K}]_{NL} + [\boldsymbol{K}]_\sigma \tag{25}$$

3. 결 론

지금까지 평판 및 쉘 구조물 해석을 위한 삼각 평면 쉘요소의 강성매트릭스의 구성에 대하여 살펴보았다. 기하학적 비선형성을 고려한 방법에 대해서는 이미 다양한 유한요소 개발에 따른 정식화가 발표되었고 프로그램화 된 것이 사실이다.

본 고에서 소개된 것 이외에도 많은 부분을 다른 참고 논문에서 찾을 수 있으리라 생각되며, 연속체 쉘 구조물의 비선형 해석을 위한 기초 학습 차원에서 조금이나마 도움이 되었으면 한다.

참 고 문 헌

1. O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method, 3rd ed, McGraw-Hill, 1979, p.329.
2. J. L. Meek, Y. C. Wang, "Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shell Structures with Finite Rotation", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, V.162, No.1-4, 1998, pp.301~315.
3. J. H. Argyris, P .C. Dunne, G. A.Malejannakis and E. Schelkle, "A Simple Triangular Facet Shell Element with Applications to Linear and Non-linear Equilibrium and Elastic Stability Problems", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.10, 1977, pp.371~403.
4. G. Horrigmoe and P. G. Bergan, "Nonlinear Analysis of Free-Form Shells by Flat Finite Elements", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.16, 1978, pp.11~35.
5. K. J. Bathe and L. W. Ho, "A simple and Effective Element for Analysis General Shell Structures", Computer and Structures, V.13, 1991, pp.673~681.
6. M. Fafard, G. Dhan, and J. L. Batoz. "A New Discrete Kirchhoff Plate/Shell Element with Updated Procedures", Computer and Structures, V.31, 1989, pp.591~606.
7. J. L. Meek, and H. S. "Instability Analysis of Thin Plates and Arbitrary Shells Using a Faceted Shell Element with Loof Nodes", Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, V.57, 1986, pp.143~170.
8. P. G, Bergan and C. A. Felippa "A triangular membrane element with rotational degree of freedom", Computer Method in Applied Me-

chanics and Engineering, V.50, 1985, pp.25~59.

9. D. J. Allam "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, V.26, 1988, pp.717~730.
10. J. C. Simo, D. D. Fox and M.S. Rifai, "On a stress resultant geometrically exact shell model PartⅡ: The linear theory : computational aspects", Computer Method in Applied Mechanics & Engineering, V.53, 1989, pp.53~92.
11. R. H. MacNeal and R. L. Harder, "A proposed Standard set of Problems to Test Finite Element Accuracy", Finite Elements in Analysis and Design, Vol.1, 1985, pp.3~20.
12. R. L. Taylor, "Finite element analysis of linear shell problem", in Whiteman, J. R.(ed.), Proc. of the mathematics in Finite Elements and Application, Academic Press, NewYork, 1987, pp.191~203.
13. J. L. Battoz, K. J. Bathe, L. W. Ho "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, V.25, No.5, 1998, pp.665~675.

◆ 바로잡음 ◆

학회지 제3권 제3호(2003년 9월호)의 학술기사 "한국막구조의 현황과 문제점(Ⅱ)" 중에서 아래와 같이 바로 잡습니다.

(1) 그림 3.57, 그림 3.59, 그림 3.60, 그림 3.64는 아주렌탈(주)에서 발주하여 (주)에어돔에서 시공한 것임.

(2) 그림 3.66에서 그림 3.73은 모두 (주)에어돔에서 제공한 것임.