

조합하중을 받는 전단변형 기둥의 좌굴 후 거동 해석

Post-Buckling of Shear Deformable Uniform Columns Under a Combined Load

유 영 찬¹⁾ · 신 영 재²⁾

Yoo, Yeong Chan · Shin, Young Jae

요 약 : 본 연구는 등분포 축하중과 자유단의 집중하중으로 구성된 조합하중을 받는 등단면 기둥을 대상으로 휨과 전단변형을 고려한 비선형 미분 방정식을 유도하고, 미분 변환을 적용한 수치해석을 실시하여 좌굴 하중을 구하고 좌굴 후 거동 해석을 수행하였다. 자유단의 여러 가지 기울기에 따른 좌굴하중을 구하였으며, 미분 변환으로 얻어진 본 연구의 결과는 기존의 연구 결과와 양호한 대응을 나타냈다. 본 연구를 통하여 미분 변환법이 좌굴 후 거동 해석과 같은 비선형 미분방정식의 해법에 적용될 수 있음을 확인하였고, 향후 좀 더 복잡하고 다양한 문제에도 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

ABSTRACT : The governing equation of the post-buckling of shear-deformable uniform columns under a combined load consisting of a uniformly distributed axial load and a concentrated load at a free end was derived and the post-buckling analysis was investigated by using differential transformation. The loads were obtained for various end-slopes. The results obtained by the present method agree well with published results. In this paper, the differential transformation method was illustrated through its application to the non-linear differential equation of the post-buckling. It is expected that applications of the method to more challenging problems will be expected follow in future to ensue.

핵심 용어 : 조합하중, 전단변형, 미분변환, 좌굴 후 해석, 비선형 미분방정식

KEYWORDS : Combined load, shear deformable, differential transformation, post-buckling, nonlinear differential equation

1. 서 론

자유단에 집중하중을 받는 등단면 기둥에 대한 좌굴 후 거동 해석은 Timoshenko와 Gere(1961)의 문헌에서 소개되는 바와 같이 타원적분을 이용하여 좌굴 후 대변형에 대한 지배 방정식인 비선형 미분방정식을 해석하였다. 등분포 축하중을 받는 등단면 기둥에 대한 좌굴 후 해석은 Venkateswara Rao와 Raju(1977)에 의해 유한요소법을 이용하여 수행되었으며, 등분포 축하중과 자유단의 집중하중으로 구성된 조합하중을 받는 등단면 기둥의 좌굴 후 거동 해석은 Lee(2001)에 의해 Butcher's fifth-order Runge-Kutta method를 이용하여 수행되었다.

또한, 등분포 축하중과 자유단의 집중하중으로 구성된 조합하중을 받는 임의단면 기둥의 좌굴 후 거동 해석은 Shin과

Chiba(2002)에 의해 미분변환을 이용하여 시도되었다.

이상의 기존 연구에서는 등단면 및 임의단면 기둥에 대한 좌굴 후 해석으로 전단변형의 영향이 고려되지 않고 휨변형만을 고려하여 비선형 미분방정식을 유도하고 해석을 실시하였다.

본 연구에서는 등분포 축하중과 자유단의 집중하중으로 구성된 조합하중을 받는 등단면 기둥을 대상으로 휨과 전단변형을 고려한 비선형 미분방정식을 유도하고, 미분변환을 적용한 수치해석을 실시하여 좌굴 하중을 구하고 좌굴 후 거동 해석을 수행하였다.

2. 지배 방정식

그림 1에서 보는 바와 같이, 하단은 고정이고 상단은 자유

1) 정회원, 안동대학교 건축공학과 조교수
(Tel.054-820-5597, Fax.820-5860, E-mail:ycyoo@andong.ac.kr)
2) 정회원, 안동대학교 기계공학부 교수(yjshin@andong.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2003년 12월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

인 세장한 캔틸레버 기둥에 축방향을 따라 연속적으로 분포한 등분포 축하중 w 와 자유단의 집중하중 p 로 구성된 조합하중이 작용한 경우를 고려한다. 기본 가정으로 재료는 탄성적으로 거동하고 등질, 등방성이며, 또한 축변형은 무시하고 휨강성과 전단강성은 일정한 것으로 가정한다.

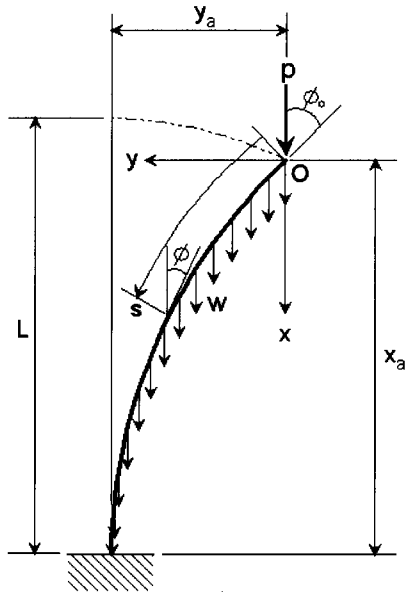


그림 1. 조합하중을 받는 기둥

직각 좌표계의 원점을 자유단에 설정한 후 수직 축을 x 축, 수평축을 y 축으로 정의하고, 자유단에 위치한 원점 O 로부터 축방향에 따른 호의 길이를 s 라 하면, 처짐 곡선의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d\phi}{ds} = -\frac{M}{EI} + \frac{\alpha}{GA} \frac{dQ}{ds} \quad (1)$$

여기서, ϕ 는 임의 점의 x 축에 관한 처짐곡선 호의 기울기이고, M 는 휨모멘트, EI 는 휨강성, α 는 전단계수, GA 는 전단강성, Q 는 전단력이다.

식 (1)을 s 에 관해서 미분하고, 임의 점에 작용하는 휨모멘트와 전단력을 등분포 하중 w 와 집중하중 p 의 항으로 대입하여 정리하면, 지배 미분방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} - \frac{\alpha}{GA} (p+ws) \cos\phi \frac{d^2\phi}{ds^2} + \frac{\alpha}{GA} (p+ws) \sin\phi \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - 2\frac{\alpha}{GA} w \cos\phi \frac{d\phi}{ds} + \frac{1}{EI} (p+ws) \sin\phi = 0 \quad (2)$$

자유단 $s = 0$ 와 고정단 $s = L$ 에서의 경계조건은 다음과

같다.

$$s = 0, \phi = \phi_0 \text{ \& } \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (3)$$

$$s = L, \phi = 0 \quad (4)$$

여기서, L 은 기둥의 길이이다.

새로운 변수 $\xi = \frac{s}{L}$ 를 도입하여 식 (2)를 무차원화하면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \frac{\alpha}{GA} (p+w\xi L) \cos\phi \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \frac{\alpha}{GA} (p+w\xi L) \sin\phi \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 - 2\frac{\alpha w L}{GA} \cos\phi \frac{d\phi}{d\xi} + \frac{L^2}{EI} (p+w\xi L) \sin\phi = 0 \quad (5)$$

식 (3)에서 $\tau = \frac{\alpha p}{GA}$, $\mu = \frac{\alpha w L}{GA}$, $\kappa = \frac{pL^2}{EI}$, $\gamma = \frac{wL^3}{EI}$ 으로 치환하여 정리하면, 등분포 축하중과 집중하중으로 구성된 조합하중을 받는 기둥의 무차원화된 지배 미분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \tau \cos\phi \frac{d^2\phi}{d\xi^2} - \mu \xi \cos\phi \frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \tau \sin\phi \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 + \mu \xi \sin\phi \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 - 2\mu \cos\phi \frac{d\phi}{d\xi} + \kappa \sin\phi + \gamma \xi \sin\phi = 0 \quad (6)$$

자유단 $\xi = 0$ 과 고정단 $\xi = 1$ 에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\xi = 0, \phi = \phi_0 \text{ \& } \frac{d\phi}{d\xi} = 0 \quad (7)$$

$$\xi = 1, \phi = 0 \quad (8)$$

좌굴하중 p 와 w 은 식 (6)로부터 결정될 수 있으며, 본 연구에서는 비선형 미분방정식인 식 (6)에 대하여 미분 변환을 적용하여 해석하고자 한다.

3. 미분 변환

미분 변환(Differential Transformation)⁵⁾은 J. K. Zhou가 1986년에 전기회로에 관한 연구에서 선형과 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 위해서 처음으로 제시한 것으로 Taylor series에 기본을 두었다. 이 방법은 선형과 비선형의

공학 문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환 관계에 의해서 해를 구할 수 있으며 정확도가 대단히 높다.

임의의 원함수(Original Function)에 대한 미분 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{d x^k} \right]_{x=0} \quad (9)$$

여기서, Y(k)를 미분변환 함수(Transformed Function, 간단히 T-function이라 함)라고 한다.

미분변환 함수인 Y(k)의 미분 역변환(Differential Inverse Transformation)은 다음과 같이 정의된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (10)$$

식 (9)와 (10)에 의하여 원함수 y(x)는 다음 식으로 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{d x^k} \right]_{x=0} \quad (11)$$

이상의 정의로부터 다음과 같은 미분 변환에 관한 기본적인 연산을 구할 수 있다.

표 1. 원함수와 미분변환 함수의 관계

원 함수	변환 함수
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$w(x) = \lambda y(x)$	$W(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{d x^n}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+n)Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(x) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m)$

λ : Constant, $\delta(k)$: Dirac delta function

실제의 적용문제에 있어서 y(x)는 근사적으로 유한개의 항만을 고려하여 나타낸다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n x^k Y(k) \quad (12)$$

식 (8)은 $y(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k Y(k)$ 이 무시해도 좋을 만큼

작다는 것을 의미하며, 일반적으로 n은 해의 수렴 정도에 의해 결정된다.

본 연구의 대상인 등분포 축하중과 집중하중으로 구성된 조합하중을 받는 기둥의 지배 미분방정식인 식 (6)에 미분 변환의 연산을 적용하여 정리하면 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)\Phi[k+2] - \tau \sum_{L=0}^k \Phi_c[L](k+1-L) \\ & (k+2-L)\Phi[k+2-L] - \mu \sum_{L=0}^k \Phi_c[k-L] \\ & \sum_{n=0}^L (L+1-n)(L+2-n)\Phi[L+2-n] \delta(n-1) \\ & + \tau \sum_{L=0}^k \Phi_s[k-L] \sum_{n=0}^L (L+1-n)\Phi[L+1-n] \\ & (n+1)\Phi[n+1] + \mu \sum_{L=0}^k \Phi_s[k-L] \sum_{n=0}^L (L+1-n) \\ & \Phi[L+1-n] \sum_{nn=0}^n (n+1-nn)\Phi[n+1-nn] \\ & \delta[nn-1] - 2\mu \sum_{L=0}^k (k+1-L)\Phi[k+1-L]\Phi_c[L] \\ & + \gamma \sum_{L=0}^k \Phi_s[k-L]\delta[L-1] + \kappa\Phi_s[k] = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

여기서, $\Phi[k]$, $\Phi_s[k]$, $\Phi_c[k]$ 는 각각 $\phi[\xi]$, $\sin\phi[\xi]$, $\cos\phi[\xi]$ 에 대한 미분 변환 함수이고, $\delta(k)$ 는 Dirac delta 함수이다.

경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\xi=0, \Phi[0] = \Phi_0 \ \& \ \Phi[1] = 0 \quad (14)$$

$$\xi=1, \sum_{k=1}^{\infty} \Phi[k] = 0 \quad (15)$$

식 (13)은 컴퓨터를 이용한 계산 수행에 적합한 비선형 순환 대수식이며, 식 (13)에 $k=0$ 를 대입하여 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Phi[2] = \frac{\kappa\Phi_s[0]}{-2 + 2\tau\Phi_c[0]} \quad (16)$$

또한, 식 (13)으로부터 $k \geq 1$ 정수 n에 대하여 $\Phi[k]$ 의 계

산에 적용할 수 있는 순환식을 산정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi[k+2] = & \{-\tau \sum_{L=1}^k \Phi_c[L](k+1-L)(k+2-L) \\ & \Phi[k+2-L]-\mu \sum_{L=1}^k \Phi_c[k-L](L)(L+1)\Phi[L+1] \\ & +\tau \sum_{L=0}^k \Phi_s[k-L] \sum_{n=0}^L (L+1-n)\Phi[L+1-n] \\ & (n+1)\Phi[n+1]+\mu \sum_{L=1}^k \Phi_s[k-L] \sum_{n=1}^L (L+1-n) \\ & \Phi[L+1-n](n)\Phi[n]-2\mu \sum_{L=0}^k (k+1-L) \\ & \Phi[k+1-L]\Phi_c[L]+\gamma\Phi_s[k-1]+\kappa\Phi_s[k]\} / \\ & \{\tau\Phi_c[0](k+1)(k+2)-(k+1)(k+2)\} \end{aligned} \quad (17)$$

이상의 순환 관계식으로부터 구한 $\Phi[0] \sim \Phi[k]$ 를 식 (15)에 대입하여 다음의 좌굴하중 산정식을 얻는다.

$$f^{(k)}(Q^{(k)})=0 \quad (18)$$

여기서, $Q^{(k)}$ 는 k에 대한 변수 $\tau, \mu, \kappa, \gamma$ 의 다항식이다.

식 (18)으로부터 k에 대한 i번째의 추정 좌굴하중인 좌굴하중 변수 $Q=Q_i^{(k)}(i=1,2,\dots)$ 가 산정되고, k는 다음의 식으로부터 결정된다.

$$|Q_i^{(k)} - Q_i^{(k-1)}| \leq \epsilon \quad (19)$$

여기서, $Q_i^{(k-1)}$ 는 (k-1)에 대한 i번째의 추정 좌굴하중이며, ϵ 은 허용 오차이다.

$Q_i^{(k)}$ 를 $\Phi[0] \sim \Phi[k]$ 에 대입하고 $\Phi[0] \sim \Phi[k]$ 를 식 (12)에 적용하면, $Q_i^{(k)}$ 에 대하여 다음과 같은 유한급수식을 얻는다.

$$\phi_i(\xi) = \sum_{k=0}^n \xi^k Q(k) \quad (20)$$

여기서, $\phi_i(\xi)$ 는 무차원화된 좌굴하중 $Q_i^{(k)}$ 에 대한 조합

하중을 받는 기둥의 i번째 좌굴모드의 기울기이다.

4. 해석 결과

미분 변환은 기본적으로 Taylor급수에 기초한 변환기법이기 때문에 미분 변환법에 의해서 얻어진 해석 해는 무한급수의 형태로 나타난다. 이러한 해는 수학용 소프트웨어를 이용하여 비교적 편리하게 구할 수 있으며, 본 연구의 해석은 Wolfram Research, Inc. 제품의 Microsoft Windows용 Mathematica Version 4.2 6)를 사용하여 수행하였다.

본 연구의 좌굴 후 거동 해석시 작용하중 조건으로 자유단의 집중하중 p만을 받는 경우, 축방향을 따라 연속적으로 분포한 등분포 축하중 w만을 받는 경우 그리고 자유단의 집중하중 p와 축방향을 따라 연속적으로 분포한 등분포 축하중 w로 구성된 조합하중이 작용한 경우의 3가지 형태를 선정하였다.

이상의 3가지 형태의 작용하중 조건에 대해 본 연구의 해석법의 검증과 기존의 연구 결과를 비교하기 위하여 전단변형의 영향이 고려되지 않고 휨변형 만을 고려한 경우에 대한 해석을 각각 수행하여 자유단의 여러 가지 기울기에 대한 좌굴하중을 구하여 표 2~4 및 그림 2~4에 나타내었고, 또한 전단변형의 영향을 파악하기 위하여 휨과 전단변형을 고려한 경우에 대한 해석을 각각 수행하여 표 5~10에 나타내었다.

표 2~4 및 그림 2~4에서 보는 바와 같이, 전단변형의 영향이 고려되지 않고 휨변형 만을 고려한 경우에 대한 해석 결과에서 기존의 연구 결과인 타원적분 및 Butcher's fifth-order Runge-Kutta method의 결과와 비교적 양호한 대응을 나타내고 있는 것으로 볼 수 있다.

표 2. 자유단에 집중하중 p만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하지 않는 경우의 좌굴하중 κ 의 비교 ($\kappa=pL^2/EI$)

ϕ (deg.)	본 연구 해석결과	타원 적분 참고문헌 ¹⁾	Lee's Re. 참고문헌 ³⁾	Shin's Re. 참고문헌 ⁴⁾
0	2.4674	2.4674	2.4671	2.4674
20	2.5057	2.5044	2.5049	2.5054
40	2.6238	2.6228	2.6240	2.6245
60	2.8360	2.8424	2.8412	2.8418
80	3.1815	3.1903	3.1920	3.1925
100	3.7506	3.7455	3.7458	3.7456
120	4.7418	4.6486	4.6498	-
140	6.5755	6.2697	6.2719	-
160	10.2282	9.9412	9.9428	-
176	40.7759	22.4928	-	-

미분변환에 적용한 유한급수는 11항까지 급수전개한 결과임.

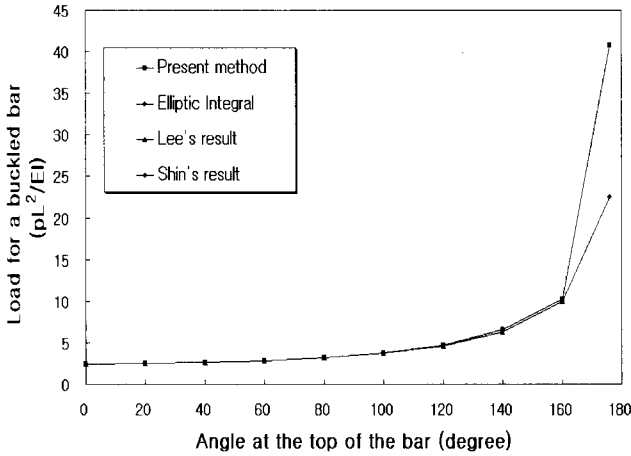


그림 2. 자유단에 집중하중 p만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하지 않는 경우의 좌굴하중과 자유단 각도의 관계

표 3. 등분포 축하중 w만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하지 않는 경우의 좌굴하중 γ 의 비교 ($\gamma = wL^3/EI$)

ϕ (deg.)	본 연구 해석결과	Lee's Re. 참고문헌 ³⁾	Shin's Re. 참고문헌 ⁴⁾
0	7.8373	7.8356	7.8373
20	7.9497	7.9448	7.9471
40	8.2868	8.2877	8.2899
60	8.8754	8.9101	8.9108
80	9.8394	9.9070	9.9130
100	11.4827	11.4638	11.4956
120	14.4542	13.9685	-
140	19.8382	18.3809	-
160	28.5646	28.1280	-
176	105.3010	-	-

미분변환에 적용한 유한급수는 16항까지 급수전개한 결과임.

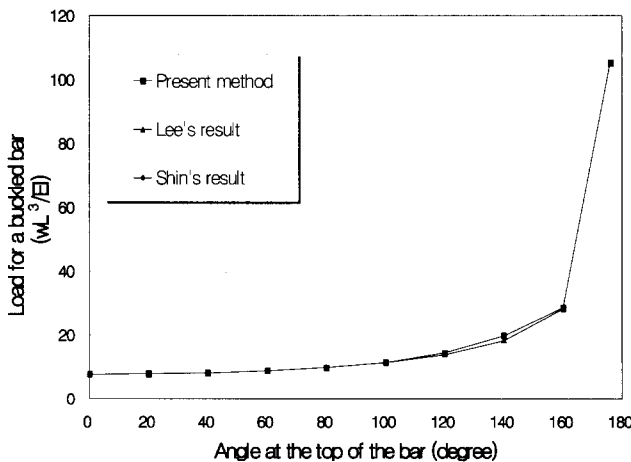


그림 3. 등분포 축하중 w만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하지 않는 경우의 좌굴하중과 자유단 각도의 관계

표 4. 자유단에 집중하중 p와 등분포 축하중 w의 조합하중이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하지 않는 경우의 좌굴하중 κ 와 γ 의 비교

$$(\kappa = \gamma = pL^2/EI = wL^3/EI)$$

ϕ (deg.)	본 연구 해석결과	Lee's Re. 참고문헌 ³⁾	Shin's Re. 참고문헌 ⁴⁾
0	1.8959	1.8957	1.8960
20	1.9228	1.9237	1.9189
40	2.0098	2.0120	1.9923
60	2.1758	2.1726	2.1328
80	2.4561	2.4309	2.3783
100	2.9089	2.8368	2.8189
120	3.6137	3.4948	-
140	4.6994	4.6649	-
160	7.0633	7.2815	-
176	29.9863	-	-

미분변환에 적용한 유한급수는 16항까지 급수전개한 결과임.

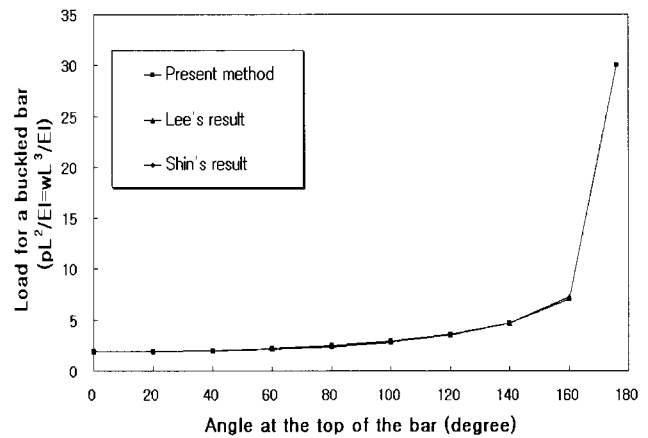


그림 4. 자유단에 집중하중 p와 등분포 축하중 w의 조합하중이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하지 않는 경우의 좌굴하중과 자유단 각도의 관계

표 5. 자유단에 집중하중 p만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 κ 의 비교 ($\kappa = pL^2/EI, \lambda = 120, \nu = 1/3$, 원형)

ϕ (deg.)	전단영향 무시(κ_b)	전단영향 고려(κ_s)	$\frac{\kappa_s}{\kappa_b}$
0	2.4674	2.4649	0.9990
20	2.5057	2.5031	0.9990
40	2.6238	2.6210	0.9989
60	2.8360	2.8330	0.9989
80	3.1815	3.1782	0.9990
100	3.7506	3.7470	0.9990
120	4.7418	3.7360	0.9988
140	6.5755	6.5510	0.9963
160	10.2282	10.1704	0.9943
176	40.7759	40.9395	1.0040

미분변환에 적용한 유한급수는 11항까지 급수전개한 결과임.

표 6. 자유단에 집중하중 p만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 κ 의 비교 ($\kappa = pL^2/EI, \lambda = 120, \nu = 1/3$, 정방형)

ϕ (deg.)	전단영향 무시(κ_b)	전단영향 고려(κ_s)	$\frac{\kappa_s}{\kappa_b}$
0	2.4674	2.4646	0.9989
20	2.5057	2.5028	0.9988
40	2.6238	2.6207	0.9988
60	2.8360	2.8326	0.9988
80	3.1815	3.1778	0.9988
100	3.7506	3.7465	0.9989
120	4.7418	4.7352	0.9986
140	6.5755	6.5470	0.9957
160	10.2282	10.1634	0.9937
176	40.7759	40.9601	1.0045

미분변환에 적용한 유한급수는 11항까지 급수전개한 결과임.

다만, 표 2의 자유단 176° 기울기에 대해서는 타원적분 결과와 차이가 있는 결과가 산출되었는데 이는 자유단의 기울기가 증가함에 따라 기하학적 비선형성이 증대되어 발생한 오차로 추정되며 미분변환의 유한급수 전개시 항수를 증가시켜 산정하면 발생 오차를 감소시킬 수 있을 것으로 생각된다.

표 5~10은 전단변형의 영향을 알아보기 위하여 세장비(λ) 120과 프와송 비(ν) 1/3의 원형과 정방형 단면을 갖는 기둥을 대상으로 휨과 전단변형을 고려한 경우에 대한 해석을 각각 수행하여 전단변형의 영향이 고려되지 않고 휨변형만을 고려한 경우의 해석 결과와 비교하여 나타낸 것이다.

표 5~10에서 알 수 있듯이, 자유단 176° 기울기를 제외한 0° ~160° 기울기 범위에 대해서 전반적으로 전단변형이 고려된 경우의 좌굴하중이 전단변형의 영향이 고려되지 않은 경우보다 낮게 나타났다.

자유단에 집중하중 p만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 κ 는 원형 단면의 경우 0.10~0.57%, 정방형 단면의 경우 0.11~0.63% 낮게 나타났다. 등분포 축하중 w만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 γ 는 원형 단면의 경우 0.65~2.47%, 정방형 단면의 경우 0.74~2.75% 낮게 나타났는데, 집중하중 p만이 작용하는 경우보다 감소율이 크게 나타났다. 또한, 자유단에 집중하중 p와 등분포 축하중 w의 조합하중이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 κ 와 γ 는 원형 단면의 경우 0.21~0.57%, 정방형 단면의 경우 0.24~0.64% 낮게 나타났다. 전단변형을 고려한 이상의 해석 결과는 전단변형의 영향을 비교적 잘 설명해 주고 있는 것으로 볼 수 있다.

표 7. 등분포 축하중 w만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 γ 의 비교 ($\gamma = wL^3/EI, \lambda = 120, \nu = 1/3$, 원형)

ϕ (deg.)	전단영향 무시(γ_b)	전단영향 고려(γ_s)	$\frac{\gamma_s}{\gamma_b}$
0	7.8373	7.7854	0.9934
20	7.9497	7.8962	0.9933
40	8.2868	8.2301	0.9932
60	8.8754	8.8164	0.9934
80	9.8394	9.7751	0.9935
100	11.4827	11.3952	0.9924
120	14.4542	14.2755	0.9876
140	19.8382	19.3476	0.9753
160	28.5646	28.1007	0.9838
176	105.3010	104.4910	0.9923

미분변환에 적용한 유한급수는 16항까지 급수전개한 결과임.

표 8. 등분포 축하중 w만이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 γ 의 비교 ($\gamma = wL^3/EI, \lambda = 120, \nu = 1/3$, 정방형)

ϕ (deg.)	전단영향 무시(γ_b)	전단영향 고려(γ_s)	$\frac{\gamma_s}{\gamma_b}$
0	7.8373	7.7790	0.9926
20	7.9497	7.8896	0.9924
40	8.2868	8.2231	0.9923
60	8.8754	8.8090	0.9925
80	9.8394	9.7670	0.9926
100	11.4827	11.3842	0.9914
120	14.4542	14.2534	0.9861
140	19.8382	19.2924	0.9725
160	28.5646	28.0456	0.9825
176	105.3010	104.3970	0.9914

미분변환에 적용한 유한급수는 16항까지 급수전개한 결과임.

본 연구에서는 전단변형의 영향을 알아보기 위하여 한 예로 세장비(λ) 120과 프와송 비(ν) 1/3의 원형과 정방형 단면을 갖는 기둥을 대상으로 축하중 조건으로 자유단의 집중하중 p만을 받는 경우, 축방향을 따라 연속적으로 분포한 등분포 축하중 w만을 받는 경우 그리고 자유단의 집중하중 p와 축방향을 따라 연속적으로 분포한 등분포 축하중 w로 구성된 조합하중이 작용한 경우의 3가지 형태를 선정하여 좌굴 후 거동 해석을 실시하였다.

표 9. 자유단에 집중하중 p와 등분포 축하중 w의 조합하중이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 κ 와 γ 의 비교 ($\kappa = \gamma = pL^2/EI = wL^3/EI$, $\lambda = 120$, $\nu = 1/3$, 원형)

ϕ (deg.)	전단영향 무시(κ_b)	전단영향 고려(κ_s)	$\frac{\kappa_s}{\kappa_b}$
0	1.8959	1.8918	0.9979
20	1.9228	1.9187	0.9979
40	2.0098	2.0055	0.9979
60	2.1758	2.1710	0.9978
80	2.4561	2.4502	0.9976
100	2.9089	2.8999	0.9969
120	3.6137	3.5964	0.9952
140	4.6994	4.6727	0.9943
160	7.0633	7.0366	0.9962
176	29.9863	30.1266	1.0393

미분변환에 적용한 유한급수는 11항까지 급수전개한 결과임.

표 10. 자유단에 집중하중 p와 등분포 축하중 w의 조합하중이 작용할 때, 전단의 영향을 고려하는 경우의 좌굴하중 κ 와 γ 의 비교 ($\kappa = \gamma = pL^2/EI = wL^3/EI$, $\lambda = 120$, $\nu = 1/3$, 정방형)

ϕ (deg.)	전단영향 무시(κ_b)	전단영향 고려(κ_s)	$\frac{\kappa_s}{\kappa_b}$
0	1.8959	1.8913	0.9976
20	1.9228	1.9182	0.9976
40	2.0098	2.0049	0.9976
60	2.1758	2.1705	0.9976
80	2.4561	2.4496	0.9974
100	2.9089	2.8988	0.9965
120	3.6137	3.5943	0.9946
140	4.6994	4.6694	0.9936
160	7.0633	7.0333	0.9958
176	29.9863	30.1443	1.0399

미분변환에 적용한 유한급수는 11항까지 급수전개한 결과임.

본 연구의 미분변환 해석법을 이용하는 경우 다양한 세장비와 프와송 비 및 단면 형상을 갖는 기둥을 대상으로 이상에서 적용된 집중하중 p만을 받는 경우, 등분포 축하중 w만을 받는 경우, 그리고 집중하중 p와 등분포 축하중 w의 조합하중이 작용한 경우의 3가지 형태의 하중조건 각각에 대하여 좌굴 후 거동 해석이 가능하며, 조합하중의 예로 적용된 $\kappa = \gamma$ 뿐 만 아니라 $\kappa = c\gamma$ (c:상수)와 같은 다양한 조건의 선형 하중조합에 대해서도 해석이 가능한 것으로 생각된다.

5. 결 론

본 연구는 등분포 축하중과 자유단의 집중하중으로 구성된 조합하중을 받는 등단면 기둥을 대상으로 휨과 전단변형을 고

려한 비선형 미분방정식을 유도하고 미분변환을 적용한 수치 해석을 실시하여 좌굴 하중을 구하고 좌굴 후 거동 해석을 수행하였다.

미분변환으로 얻어진 본 연구의 해석 결과는 기존의 연구 결과와 비교적 양호한 대응을 나타냈으며, 여러 가지 기율기에 따른 좌굴하중을 구한 결과 자유단 176° 기율기를 제외한 0° ~ 160° 기율기 범위에 대해서 전반적으로 전단변형이 고려된 경우의 좌굴하중이 전단변형의 영향이 고려되지 않은 경우보다 낮게 나타났는데, 이와 같은 해석 결과는 전단변형의 영향을 비교적 잘 설명해 주고 있는 것으로 볼 수 있다.

본 연구의 미분변환 해석법은 다양한 세장비와 프와송 비 및 단면 형상을 갖는 기둥을 대상으로 적용된 3가지 형태의 하중조건 각각에 대하여 좌굴 후 거동 해석이 가능하며, 다양한 조건의 선형 하중조합에 대해서도 해석이 가능한 것으로 생각된다.

본 연구를 통하여 미분변환법이 좌굴 후 거동 해석과 같은 비선형 미분방정식의 해법에 적용될 수 있음을 확인하였고, 향후 좀 더 복잡하고 다양한 문제에도 응용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 2003년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음. This work was supported by the Brain Korea 21 Project in 2003.

참 고 문 헌

- Chen Chao-Kuang and Ho Shing-Huei (1996) "Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 79, pp. 173-188.
- Mathematica Version 4.2 For Microsoft Windows, *Wolfram Research, Inc.*
- Lee Kyungwoo (2001) "Post-buckling of uniform cantilever column under a combined load", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, pp. 813-816.
- Shin Y.oung-Jae and Chiba M. (2002) "Post-buckling of Non-uniform Cantilever Column Subjected to a Combined Load", *Journal of the Korean Society of Noise and Vibration Engineering*, Vol. 12, No. 5, 2002, pp. 323-329.

- Timoshenko S. P. and Gere J. M. (1961) "Theory of Elastic Stability", *McGraw-Hill*, New York, pp. 76-81.
- Venkateswara Rao G. and Raju P. C. (1977) "Post-buckling of uniform cantilever column - Galerkin finite element solution", *Engng. Fract. Mechanic.*, 1-4.

- Zhou J. K. (1986) "Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits", *Huazhong University Press*.

(접수일자 : 2003. 3. 3 / 심사일 2003. 3. 17 /
심사완료일 2003. 6. 5)