

3차원 고차이론을 이용한 역대칭 앵글-플라이를 갖는 복합재료 적층판의 좌굴 및 진동해석

Buckling and Vibration Analysis of Antisymmetric Angle-ply laminated Composite Plates using a Three-dimensional Higher-order Theory

이 원 홍¹⁾ · 한 성 천²⁾ · 천 경 식³⁾ · 장 석 윤⁴⁾

Lee, Won Hong Han, Sung Cheon Chun, Kyoung Sik Chang, Suk Yoon

요 약: 복합재료 적층판의 보다 정확한 해석결과를 얻기 위해서는 종방향 전단변형, 종방향 수직 변형률/응력에 의한 효과와 두께방향좌 표에 관한 면내변위의 비선형 변화등이 고려되어야 한다. 본 연구에서는 3차원 고차이론을 이용하여 복합적층판의 좌굴하중 및 고유진동수를 구하였다. 단순지지된 적층판과 샌드위치의 해는 이중삼각함수형태의 Fourier 급수로 변환한 Navier 해법을 사용하였고, 일차전단변형, 고차 전단변형이론에 의한 결과와 비교·분석하였다. 본 연구는 매개변수 즉, 보강각도, 적층수와 배열조건, 폭-두께비, 형상비의 변화에 따른 수치 해석 결과를 제시하였다.

ABSTRACT: To obtain a more accurate response from laminated composite structures, the effect of transverse shear deformation, transverse normal strain/stress, and nonlinear variation of in-plane displacements vis-à-vis the thickness coordinate should be considered in the analysis. The improved higher-order theory was used to determine the critical buckling load and natural frequencies of laminated composite structures. Solutions of simply supported laminated composite plates and sandwiches were obtained in closed form using Navier's technique, with the results compared with calculated results using the first order and other higher-order theories. Numerical results were presented for fiber-reinforced laminates, which show the effects of ply orientation, number of layers, side-to-thickness ratio, and aspects ratio.

핵심용어: 3차원 고차이론, 자유진동, 좌굴, 앵글-플라이, 해석적 해법

KEYWORDS: Three-dimensional higher-order theory, Free vibration, Buckling, Angle-ply, Analytical solutions

1. 서 론

높은 자중-강성비 때문에 섬유 보강 복합재료는 항공산업, 교통시설 및 건설산업에 널리 사용되어지고 있다. 복합재료를 효과적으로 사용하기 위해서는 사용하중 하에서 역학적 응답의 확실한 이해와 충분한 연구가 수행되어야 한다. 구조적 거동의 충분한 이해와 변형특성에 대한 정확한 지식 그리고 다양한 하중조건하에서의 처짐, 응력분포에 대한 정확한 이해가 필요하다고 할 수 있다. 고전적 적층판 이론(Reissner 등, 1961)은 전단변형 효과를 무시하였기 때문에 적층된 복합재

료의 해석에 적절치 못한 방법이다. 일반적으로 고전적 적층판 이론에서는 처짐은 작게 계산되고 진동수와 좌굴하중은 크게 계산된다. 1차 전단변형이론(Whitney 등, 1969; Sun 등, 1973)에서는 종방향 전단응력을 두께방향 1차 변형상태로 고려하기 때문에 비현실적인 두께방향 전단변형 및 응력의 보정을 위하여 전단보정계수가 필요하게 된다. 이러한 1차 전단변형이론의 단점을 극복하기 위해 두께방향 좌표가 포함된 변위의 Talyor 전개식의 고차항이 포함된 고차 전단변형 이론이 발전되었다. Levinson(1980)과 Murthy(1981)는 Whitney와 Pagano(1970)의 1차 전단변형이론의 평형방정

- 1) 정회원, 진주산업대학교 토목공학과 조교수, 농학박사
(Tel. 055-751-3297, Fax. 055-751-3299, E-mail: whyee@jinju.ac.kr)
- 2) 정회원, 대원과학기술대학교 토목과 부교수, 공학박사(techy11@daewon.ac.kr)
- 3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정(chsik@sidae.uos.ac.kr)
- 4) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수, 공학박사(changsy@uos.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2003년 10월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

식을 이용하여 종방향 수직 압축/인장을 무시한 고차이론을 제안하였다. Reddy(1979; 1984)는 Levinson과 Murthy의 이론을 발전시킨 단순화된 고차전단변형이론을 제안하였고 Kant는 일반화된 Hook의 법칙을 이용하여 종방향 수직 변형률/응력의 효과와 종방향 뒤틀림이 고려된 대칭 적층판의 유한요소 지배방정식을 유도하였다. 고차전단변형이론에 의한 등방성판, 직교이방성판 그리고 적층판의 진동해석이 Reddy(1985)에 의해 수행되었고 Noor(1973)는 등방성, 직교이방성 및 비등방성 적층복합판의 3차원 탄성해석을 수행하였다.

본 연구에서는 해석적 정밀해를 구하기 위하여 기존의 유한요소 해석에 사용되었던 Kant(1988; 1989)의 고차이론을 이용하였으며 한성천 등(2002)과 Kant 등(2000; 2001; 2002)의 연구에서 직교이방성에 제한되었던 연구를 역대칭 앵글-플라이를 갖는 경우로 확장하였다. 본 연구 해석 결과의 타당성을 규명하기 위하여 다른 여러 이론들과 비교·분석을 수행하였다. 보강각도 변화, 적층수와 배열조건 변화, 폭-두께비의 변화, 형상비의 변화의 효과에 의한 수치해석 결과들을 구하였으며 이러한 결과들은 복합재료 설계자, 이론과 실험의 상호 연관성을 연구하는 연구원 그리고 프로그램의 검증을 원하는 수치해석자들을 위해 사용될 수 있을 것이다.

2. 기본 이론

2.1 변위함수

3차원 탄성문제를 2차원 판해석에 적용하기 위하여 판의 임의점에서의 변위성분 u, v, w 를 두께방향 좌표 z 에 관한 Taylor 전개식을 확장하여 적용하였다. 3차원 탄성해석 결과는 종방향 전단응력이 판의 두께방향으로 곡선변화 한다는 것을 보여주고 있다. 따라서 두께방향 좌표의 3차항을 포함하는 면내변위의 가정이 필요하게 되었으며 또한 종방향 수직변형이 판의 두께를 따라 비선형으로 변화하게 된다. 이러한 조건들을 만족하는 변위장은 식(1)과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0 + z\theta_x + z^2\xi_x + z^3\eta_x \\ v(x, y, z, t) &= v_0 + z\theta_y + z^2\xi_y + z^3\eta_y \\ w(x, y, z, t) &= w_0 + z\theta_z + z^2\xi_z + z^3\eta_z \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, u_0, v_0 와 w_0 는 각각 중립면의 한 점 (x, y) 에서의 면내변위와 횡방향 변위를 나타내며, θ_x, θ_y 는 각

각 y 축과 x 축에 대한 중립면의 회전각을 의미한다. $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z$ 그리고 θ_z 는 Taylor 전개식의 고차항을 의미한다. 식(1)은 Kant에 의해 유한요소해석에 사용되었으나, 본 연구에서는 해석적 정밀해를 구하기 위해 Navier 방법에 식(1)을 적용하여 좌굴과 진동해석을 수행하였다. 본 연구에서는 3차원 고차이론을 이용한 해석적 수식과 해석결과들을 제시하고, 기존의 여러 이론들에 의한 해석결과들과 비교·분석하였다. 2차원 적층판의 기하학적 형상은 그림 1에 나타내었다. 식(1)의 변위장을 탄성론의 변형률-변위 관계식에 대입하면 식(2)를 얻을 수 있다. Kant 등(2000; 2001; 2002)은 식(2)에서 두께방향 변형률을 두께의 3차식까지 사용하였으나 탄성론에 의한 변형률-변위 관계식을 이용한 본 연구에서는 두께의 2차식만 사용하였다(한성천 등, 2002).

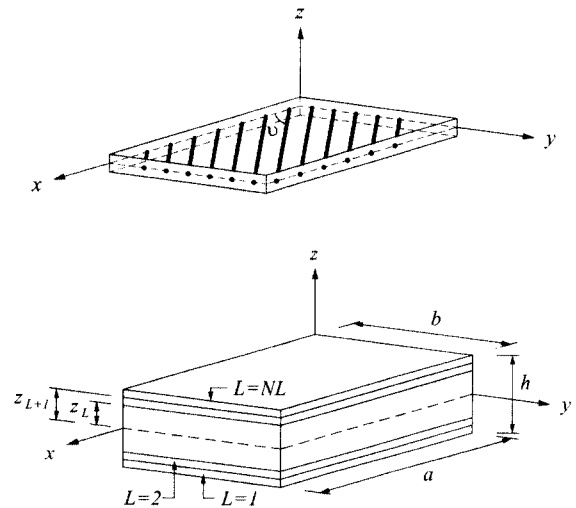


그림 1. 적층판의 기하학적 형상 및 좌표계

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_{x0} + z\chi_x + z^2\epsilon_{x0}^* + z^3\chi_x^* \\ \epsilon_y &= \epsilon_{y0} + z\chi_y + z^2\epsilon_{y0}^* + z^3\chi_y^* \\ \epsilon_z &= \epsilon_{z0} + z\chi_z + z^2\epsilon_{z0}^* \\ \gamma_{xy} &= \epsilon_{xy0} + z\chi_{xy} + z^2\epsilon_{xy0}^* + z^3\chi_{xy}^* \\ \gamma_{yz} &= \phi_y + z\chi_{yz} + z^2\phi_y^* + z^3\chi_{yz}^* \\ \gamma_{xz} &= \phi_x + z\chi_{xz} + z^2\phi_x^* + z^3\chi_{xz}^* \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$(\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \epsilon_{xy0}) = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_{x0}^*, \varepsilon_{y0}^*, \varepsilon_{xy0}^*) &= \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x}, \frac{\partial \xi_y}{\partial y}, \frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) \\
 (\varepsilon_{z0}, \varepsilon_{z0}^*) &= (\theta_z, 3\eta_z) \\
 (x_x, x_y, x_z, x_{xy}) &= \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, 2\xi_z, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\
 (x_x^*, x_y^*, x_{xy}^*) &= \left(\frac{\partial \eta_x}{\partial x}, \frac{\partial \eta_y}{\partial y}, \frac{\partial \eta_x}{\partial y} + \frac{\partial \eta_y}{\partial x} \right) \\
 (x_{xz}, x_{yz}) &= \left(2\xi_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, 2\xi_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right) \\
 (x_{xz}^*, x_{yz}^*) &= \left(\frac{\partial \eta_z}{\partial x}, \frac{\partial \eta_z}{\partial y} \right) \\
 (\phi_x, \phi_x^*) &= \left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, 3\eta_x + \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right) \\
 (\phi_y, \phi_y^*) &= \left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}, 3\eta_y + \frac{\partial \xi_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

2.2 적합 조건식

적층판의 각 층은 3차원 응력상태로 가정되기 때문에 국부 좌표계(1-2-3)와 전체좌표계에서 k 번째 층에서의 적합조건식은 식(3), (4)와 같이 표현된다.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{22} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & Q_{34} & 0 & 0 \\ Q_{14} & Q_{24} & Q_{34} & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (4)$$

여기서, C_{ij} 는 탄성상수 또는 국부좌표계에서의 k 번째의 강성 행렬 요소들이고, Q_{ij} 는 좌표변환에 의한 탄성상수 또는 전체좌표계에서의 k 번째의 강성 행렬 요소들이다. 국부좌표계와 전체좌표계에서의 탄성상수 C_{ij} 와 Q_{ij} 는 참고 문헌(Reddy, 1996)에 제시되어 있다.

2.3 평형방정식

최소 포텐셜 에너지와 Hamilton 이론을 적용하여 좌굴과 진동에 관한 평형방정식을 구하면 식(5)와 같이 나타낼 수

있다. 이 때 응력-변형률 관계식과 변위-변형률 관계식을 식(5)에 대입하면 변위의 항으로 표시하여 해석 할 수 있다. 식(5)에서 시간 t 에 관한 적분과 F_3 은 진동해석시, F_2 는 좌굴해석시 적용된다. $(\sigma_x', \sigma_y', \tau_{xy}')$ 는 면내하중과 전단하중, $(\varepsilon_x', \varepsilon_y', \gamma_{xy}')$ 는 횡방향 변위에 의한 중립면에서의 변형률, ρ 는 재료의 비중을 의미한다.

$$\int_0^t (F_1 - F_2 - F_3) dt = 0 \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \delta_z \varepsilon_z \\
 &\quad + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dA dz
 \end{aligned}$$

$$F_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A (\sigma_x' \delta \varepsilon_x' + \sigma_y' \delta \varepsilon_y' + \tau_{xy}' \delta \gamma_{xy}') dA dz$$

$$F_3 = \frac{\delta}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_A \rho (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) dA dz$$

식(1), 식(2)와 식(4)를 식(5)에 대입하고 부분적분하여 정리하면 식(6)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \Lambda_{1,x} \\
 \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= \Lambda_{1,y} \\
 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + Z_1 &= \Lambda_{1,z} \\
 \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= \Lambda_{2,x} \\
 \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= \Lambda_{2,y} \\
 \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} - N_z + Z_2 &= \Lambda_{2,z} \\
 \frac{\partial N_x^*}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial y} - 2S_x &= \Lambda_{3,x} \\
 \frac{\partial N_y^*}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}^*}{\partial x} - 2S_y &= \Lambda_{3,y} \\
 \frac{\partial Q_x^*}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^*}{\partial y} - 2M_z + Z_3 &= \Lambda_{3,z} \\
 \frac{\partial M_x^*}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial y} - 3Q_x^* &= \Lambda_{4,x} \\
 \frac{\partial M_y^*}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^*}{\partial x} - 3Q_y^* &= \Lambda_{4,y}
 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_x^*}{\partial x} + \frac{\partial S_y^*}{\partial y} - 3N_z^* + Z_4 = \Lambda_{4,z}$$

여기서, 합응력은 식(7)과 같이 표현되며, $\Lambda_{i,x}, \Lambda_{i,y}, \Lambda_{i,z}$ 는 진동해석시 적용되는 식으로, 식(8)과 같으며, I 는 식(9)와 같이 정의된다. Z_i 는 좌굴해석시 적용되는 식으로 식(10)과 같다.

$$\begin{bmatrix} N_x & N_x^* \\ N_y & N_y^* \\ N_z & 0 \\ N_{xy} & N_{xy}^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} [1 \ z^2] dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x & M_x^* \\ M_y & M_y^* \\ M_z & 0 \\ M_{xy} & M_{xy}^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} [z \ z^3] dz$$

$$\begin{bmatrix} Q_x & Q_x^* \\ Q_y & Q_y^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} [1 \ z^2] dz \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} S_x & S_x^* \\ S_y & S_y^* \end{bmatrix} = \sum_{L=1}^{NL} \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} [z \ z^3] dz$$

$$\begin{bmatrix} \bar{N}_x & \bar{N}_y & \bar{N}_{xy} \\ \bar{M}_x & \bar{M}_y & \bar{M}_{xy} \\ \bar{N}_x^* & \bar{N}_y^* & \bar{N}_{xy}^* \\ \bar{M}_x^* & \bar{M}_y^* & \bar{M}_{xy}^* \\ \bar{N}_x^{**} & \bar{N}_y^{**} & \bar{N}_{xy}^{**} \\ \bar{M}_x^{**} & \bar{M}_y^{**} & \bar{M}_{xy}^{**} \\ \bar{N}_x^{***} & \bar{N}_y^{***} & \bar{N}_{xy}^{***} \end{bmatrix} = \int_{z_L}^{z_{L+1}} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \\ z^6 \end{bmatrix} [\sigma_x' \ \sigma_y' \ \sigma_{xy}'] dz$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,x} &= I_i \ddot{u}_0 + I_{i+1} \theta_x + I_{i+2} \xi_x + I_{i+3} \ddot{\eta}_x \\ \Lambda_{i,y} &= I_i \ddot{v}_0 + I_{i+1} \theta_y + I_{i+2} \xi_y + I_{i+3} \ddot{\eta}_y \\ \Lambda_{i,z} &= I_i \ddot{w}_0 + I_{i+1} \theta_z + I_{i+2} \xi_z + I_{i+3} \ddot{\eta}_z \end{aligned} \quad (8)$$

$$I_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \cdot z^{(i-1)} dz \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \bar{N}_x w_{0,xx} + \bar{M}_x \theta_{z,xx} + \bar{N}_x^* \xi_{z,xx} + \bar{M}_x^* \eta_{z,xx} \\ &+ \bar{N}_y w_{0,yy} + \bar{M}_y \theta_{z,yy} + \bar{N}_y^* \xi_{z,yy} + \bar{M}_y^* \eta_{z,yy} \\ &+ 2\bar{N}_{xy} w_{0,xy} + 2\bar{M}_{xy} \theta_{z,xy} + 2\bar{N}_{xy}^* \xi_{z,xy} + 2\bar{M}_{xy}^* \eta_{z,xy} \\ Z_2 &= \bar{N}_x^* \theta_{z,xx} + \bar{M}_x w_{0,xx} + \bar{N}_x^* \eta_{z,xx} + \bar{M}_x^* \xi_{z,xx} \\ &+ \bar{N}_y^* \theta_{z,yy} + \bar{M}_y w_{0,yy} + \bar{N}_y^* \eta_{z,yy} + \bar{M}_y^* \xi_{z,yy} \\ &+ 2\bar{N}_{xy}^* \theta_{z,xy} + 2\bar{M}_{xy} w_{0,xy} + 2\bar{N}_{xy}^* \eta_{z,xy} + 2\bar{M}_{xy}^* \xi_{z,xy} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Z_3 &= \bar{N}_x^* w_{0,xx} + \bar{M}_x^* \theta_{z,xx} + \bar{N}_x^* \xi_{z,xx} + \bar{M}_x^* \eta_{z,xx} \\ &+ \bar{N}_y^* w_{0,yy} + \bar{M}_y^* \theta_{z,yy} + \bar{N}_y^* \xi_{z,yy} + \bar{M}_y^* \eta_{z,yy} \\ &+ 2\bar{N}_{xy}^* w_{0,xy} + 2\bar{M}_{xy}^* \theta_{z,xy} + 2\bar{N}_{xy}^* \xi_{z,xy} + 2\bar{M}_{xy}^* \eta_{z,xy} \\ Z_4 &= \bar{N}_x^* \theta_{z,xx} + \bar{M}_x^* w_{0,xx} + \bar{N}_x^* \eta_{z,xx} + \bar{M}_x^* \xi_{z,xx} \\ &+ \bar{N}_y^* \theta_{z,yy} + \bar{M}_y^* w_{0,yy} + \bar{N}_y^* \eta_{z,yy} + \bar{M}_y^* \xi_{z,yy} \\ &+ 2\bar{N}_{xy}^* \theta_{z,xy} + 2\bar{M}_{xy}^* w_{0,xy} + 2\bar{N}_{xy}^* \eta_{z,xy} + 2\bar{M}_{xy}^* \xi_{z,xy} \end{aligned}$$

식(7)은 식(4)와 식(2)를 이용하여 전체 변형을 관계식인 식(11), 식(12)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_x^* \\ N_y^* \\ N_z \\ N_z^* \\ M_x \\ M_x^* \\ M_y \\ M_y^* \\ M_z \\ M_z^* \\ N_{xy} \\ N_{xy}^* \\ M_{xy} \\ M_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^1]_{11 \times 11} & [A^2]_{11 \times 04} \\ \text{sym.} & [A^3]_{04 \times 04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \epsilon_{x0}^* \\ \epsilon_{y0}^* \\ \epsilon_{z0} \\ \epsilon_{z0}^* \\ \chi_x \\ \chi_x^* \\ \chi_y \\ \chi_y^* \\ \chi_z \\ \chi_z^* \\ \epsilon_{xy0} \\ \epsilon_{xy0}^* \\ \chi_{xy} \\ \chi_{xy}^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_x^* \\ S_x \\ S_x^* \\ Q_y \\ Q_y^* \\ S_y \\ S_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D^1]_{04 \times 04} & [D^2]_{04 \times 04} \\ \text{sym.} & [D^3]_{04 \times 04} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_x^* \\ \chi_{xz} \\ \chi_{xz}^* \\ \phi_y \\ \phi_y^* \\ \chi_{yz} \\ \chi_{yz}^* \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서, $[A], [D]$ 는 판의 강성행렬이다.

3. 해석적 방법

본 연구에서는 식(6)을 이용하여 복합재료 적층판 및 샌드위치판의 정밀해를 구할 것이다. 경계조건은 단순지지이며 식(13), (14)와 같이 가정한다. Navier의 해석방법을 따라 경계조건을 만족하는 변위함수를 식(15)와 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \text{경계 } x = 0, \ x = a \\ u_0 = 0, \ \xi_x = 0, \ w_0 = 0, \ \xi_z = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\theta_y = 0, \eta_y = 0, \theta_z = 0, \eta_z = 0, \\ M_x = 0, M_x^* = 0, N_{xy} = 0, N_{xy}^* = 0$$

$$\text{경계 } y = 0, y = b \quad (14)$$

$$v_o = 0, \xi_y = 0, w_o = 0, \xi_z = 0,$$

$$\theta_x = 0, \eta_x = 0, \theta_z = 0, \eta_z = 0,$$

$$M_y = 0, M_y^* = 0, N_{xy} = 0, N_{xy}^* = 0$$

$$u_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{o_{mn}} \Psi_1 \Psi_4$$

$$v_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{o_{mn}} \Psi_2 \Psi_4$$

$$w_o = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{o_{mn}} \Psi_3 \Psi_4$$

$$\theta_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{x_{mn}} \Psi_2 \Psi_4$$

$$\theta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{y_{mn}} \Psi_1 \Psi_4$$

$$\theta_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{z_{mn}} \Psi_3 \Psi_4$$

$$\xi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{x_{mn}} \Psi_1 \Psi_4$$

$$\xi_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{y_{mn}} \Psi_2 \Psi_4 \quad (15)$$

$$\xi_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{z_{mn}} \Psi_3 \Psi_4$$

$$\eta_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{x_{mn}} \Psi_2 \Psi_4$$

$$\eta_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{y_{mn}} \Psi_1 \Psi_4$$

$$\eta_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{z_{mn}} \Psi_3 \Psi_4$$

여기서, $\Psi_1 = \sin ax \cos by,$

$\Psi_2 = \cos ax \sin by, \quad \Psi_3 = \sin ax \sin by,$

$\Psi_4 = e^{-i\omega t}$ 이다. $\alpha = m\pi/a, \beta = n\pi/b$ 이고,

ω 는 고유진동수이다. 식(11)과 식(12), 식(15)를 식(6)에 대입하면 식(16)과 같은 평형방정식을 얻을 수 있다.

$$[\Gamma]\{\Delta\} = \{0\} \quad (16)$$

$$\{\Delta\} = \{u_o, v_o, w_o, \theta_x, \theta_y, \theta_z, \xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_x, \eta_y, \eta_z\}^T \quad (17)$$

식(16)에서 행렬 $[\Gamma]$ 는 좌굴과 진동해석시 각기 다른 값을 가진다. 즉, 좌굴해석시 식(18)이 사용되며, 일축으로

면내하중 \bar{N}_x 가 가해질 경우 임계좌굴하중은 식(19)와 같다. 또한, 진동해석시 식(20)이 사용되며, λ 는 고유치를 의미한다. 여기서, $[M]$ 과 $[G]$ 는 각각 질량행렬과 면내하중에 의한 기하학적 강성행렬이다.

$$[\Gamma] = [K] - \lambda[G] \quad (18)$$

$$[N_x]_{cr} = \lambda_{cr}[\bar{N}_x] \quad (19)$$

$$[\Gamma] = [K] - \lambda[M], \lambda = \omega^2 \quad (20)$$

4. 수치해석 및 결과분석

본 연구의 해석결과에 대한 타당성을 규명하기 위하여 Sin 하중을 받는 경우 Pagano 3차원 처짐해석 및 여러 이론들의 결과와 비교하여 표 1, 표 2에 나타내었다. 본 연구의 이론에 의한 결과가 Reddy의 고차전단변형이론과 Whitney의 1차전단변형이론을 고려한 경우의 처짐값들 보다 Pagano의 3차원 해석값에 좀 더 근접되는 것을 알 수 있었다.

표 1. 무차원 처짐($w = w_0 E_2 h^3 10^2 / q_0 a^4$) (0/90/0)

$$h_1 = h_3 = h/4, h_2 = h/2$$

a/h	Pagano	본 연구	Reddy	Whitney
10	0.737	0.718	0.715	0.663
20	0.513	0.507	0.506	0.491
100	0.435	0.434	0.434	0.434

표 2. 무차원 처짐($w = w_0 E_2 h^3 10^2 / q_0 a^4$) (0/90/0)

$$h_1 = h_2 = h_3, b = 3a$$

a/h	Pagano	본 연구	Reddy	Whitney
10	0.919	0.867	0.862	0.803
20	0.610	0.595	0.594	0.594
100	0.503	0.507	0.507	0.506

본 논문은 역대칭 앵글 플라이에 대한 논문으로, 이를 증명할 예제가 없어 대칭형 크로스 플라이 예제로 검증을 대신하였다. 본 연구의 해석방법에 대한 수치해석의 예로서 boron fiber가 epoxy matrix에 재료축 방향으로 묻혀 있는 경우로 각 층의 역학적 성질은 식(21), (22)와 같다. 비등방성 성질에 따라 복합 적층판 및 샌드위치 판의 좌굴 및 진동해석을 수행하였다. 본 연구결과는 Reddy의 고차전단변형이론과 전단보정계수 5/6을 사용한 Whitney의 1차전단변형이론과 비교·분석하였다.

표 3. 역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판의 보강각도와 폭 두께비에 따른 임계좌굴하중

$$a/b = 1, \bar{N}_x = N_x b^2 / (E_2 h^3), (\theta / -\theta)_n$$

a/h	Theory	$\theta = 5^\circ$		$\theta = 30^\circ$		$\theta = 45^\circ$	
		n = 2	n = 3	n = 2	n = 3	n = 2	n = 3
4	Present	7.9568	8.0513	9.8281	10.6506	10.3183	11.2110
	Reddy (HSDT)	8.1761	8.2497	10.9658	11.4473	11.5833	12.0977
	Whitney (FSDT)	7.9651	8.0112	11.0148	11.2653	11.6264	11.8774
10	Present	22.1799	22.5021	29.9039	32.8503	32.5493	35.8907
	Reddy (HSDT)	22.2883	22.5916	31.3352	33.7010	34.2726	36.9084
	Whitney (FSDT)	22.2895	22.5624	31.7760	33.9033	34.7969	37.1461
20	Present	31.0266	31.5512	42.7561	47.2446	47.4985	52.6964
	Reddy (HSDT)	31.0497	31.5771	43.4315	47.6433	48.3542	53.1975
	Whitney (FSDT)	31.0732	31.5865	43.6688	47.7791	48.6467	53.3649
50	Present	35.0325	35.6652	48.6432	53.8863	54.5415	60.6721
	Reddy (HSDT)	35.0072	35.6569	48.7455	53.9507	54.6866	60.7603
	Whitney (FSDT)	35.0134	35.6602	48.7947	53.9806	54.7482	60.7977
100	Present	35.6949	36.3466	49.6207	54.9921	55.7231	62.0138
	Reddy (HSDT)	35.6611	36.3322	49.6146	54.9933	55.7310	62.0221
	Whitney (FSDT)	35.6627	36.3331	49.6274	55.0011	55.7470	62.0320

적층복합판의 물성치

$$E_1 / E_2 = 40, E_2 = E_3 \quad (21)$$

$$G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2, G_{23} = 0.5 E_2$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25$$

Face Sheets (Graphite-Epoxy T300/934) (22a)

$$E_1 = 131 \text{ GPa}, E_2 = 10.34 \text{ GPa}, E_2 = E_3$$

$$G_{12} = 6.895 \text{ GPa}, G_{13} = 6.205 \text{ GPa}, G_{23} = G_{13}$$

$$\nu_{12} = 0.22, \nu_{13} = 0.22, \nu_{23} = 0.49$$

Core Properties (Isotropic) (22b)

$$E_1 = E_2 = E_3 = 2G = 6.89 \times 10^{-3} \text{ GPa}$$

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.445 \times 10^{-3} \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0$$

n = 2 인 경우 적층배열은 $(\theta / -\theta / \theta / -\theta)$ 으로 그림 2와 같다. 본 연구의 해석결과는 다른 이론의 해석결과에 비해 작은 좌굴하중을 나타내었다. 표 4에서는 $a/b = 1$, $a/h = 10$ 인 적층판의 탄성계수비에 따른 임계좌굴하중을 비교하였다. 식(21)의 물성치에서 탄성계수비를 변화시키면서 연구하였다. 탄성계수비가 커질수록 거동차이가 크게 발생하며, $E_1/E_2 = 40$ 에서는 다른 이론과 비교하여 대략 5%의 차이를 보이고 있다.

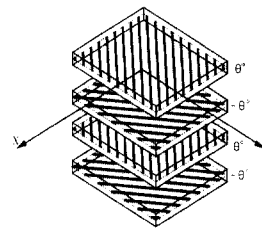


그림 2. 적층배열

4.1 좌굴 해석

표 3은 역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판의 보강각도와 폭 두께비에 따른 임계좌굴하중을 무차원화하여 나타낸 것이다. 여기서, 아래첨자 n 은 반복횟수를 의미하며, 예를 들어

표 5는 $a/h = 10$ 인 적층판의 형상비(a/b)에 따른 임계좌굴하중을 비교하여 나타낸 것이다. 형상비가 5인 경우 Reddy 의 고차이론과 비교하여 11% 정도의 차이를 보이고 있다.

표 4. 역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판의 탄성계수비에 따른 임계좌굴하중 $\bar{N}_x = N_x b^2 / (E_2 h^3)$, $(45/-45)_2$

Theory	E_1/E_2				
	3	10	20	30	40
Present	5.9663	13.3203	21.3877	27.6031	32.5493
Reddy	5.9824	13.5040	22.0181	28.7708	34.2726
Whitney	5.9865	13.5662	22.2222	29.1373	34.7969

표 5. 역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판의 형상비에 따른 임계좌굴하중 $\bar{N}_x = N_x b^2 / (E_2 h^3)$, $(45/-45)_2$

Theory	a/b				
	0.5	1.0	2.0	3.0	5.0
Present	52.2055	32.5493	28.3660	30.3255	34.9929
Reddy	54.0033	34.2726	30.6011	33.1580	39.2902
Whitney	54.5895	34.7969	31.1407	33.5860	38.9475

그림 3~5는 샌드위치판의 임계좌굴하중을 나타낸 것이다. 역대칭 앵글-플라이로 적층된 면재를 갖는 샌드위치판은 매개 변수 즉, 폭 두께비, 형상비, 면재-심재 두께비에 따라 적용이론에 따른 거동차이가 크게 발생하였다. 즉, 3차원 고차이론을 적용한 본 연구의 해석결과는 다른 이론과 비교하여 임계좌굴하중이 작게 발생하였다. 따라서, 복합구조중 샌드위치 구조물은 3차원 고차이론을 반드시 고려하여 보다 안정성을 확보해야 한다. 임계좌굴하중의 다른 기본적인 조건은 $a/b = 1$, $a/h = 10$, $t_c/t_f = 10$ 이며, 매개변수에 따라 적절히 적용하였다.

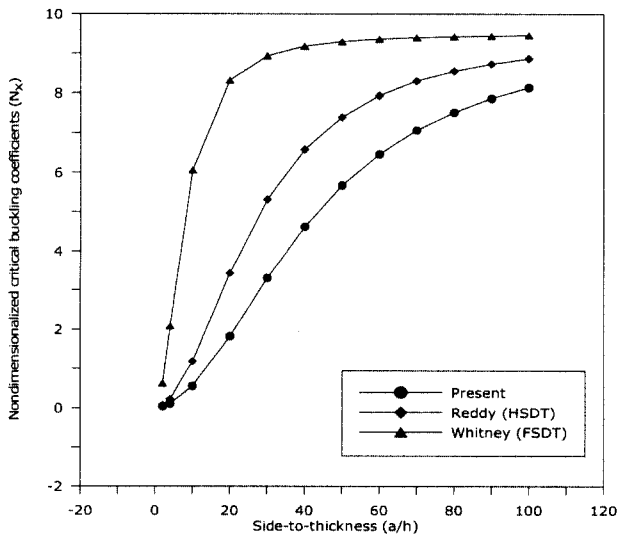


그림 3. 샌드위치판의 폭 두께비에 따른 임계좌굴하중

$$\bar{N}_x = N_x b^2 / (E_2 h^3), [(45/-45)_2 / core / (45/-45)_2]$$

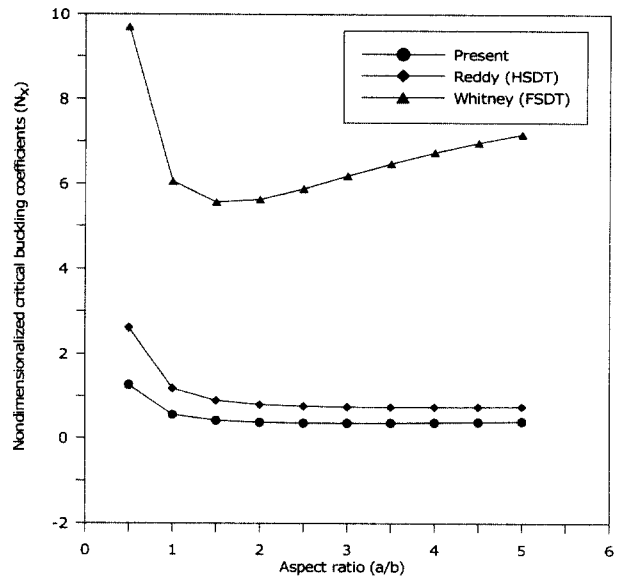


그림 4. 샌드위치판의 형상비에 따른 임계좌굴하중

$$\bar{N}_x = N_x b^2 / (E_2 h^3), [(45/-45)_2 / core / (45/-45)_2]$$

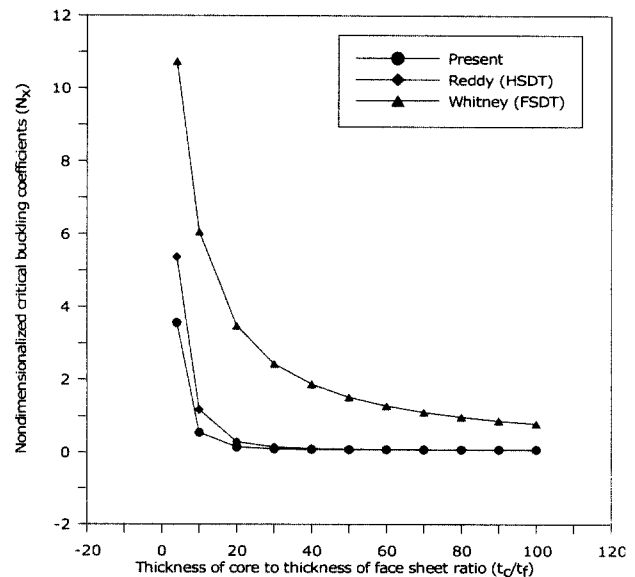


그림 5. 샌드위치판의 면재-심재 두께비에 따른 임계좌굴하중

$$\bar{N}_x = N_x b^2 / (E_2 h^3), [(45/-45)_2 / core / (45/-45)_2]$$

4.2 진동 해석

역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판의 보강각도와 폭 두께비, 탄성계수비와 적층수에 따른 고유진동수를 무차원화하여 표 6, 7에 나타내었다. 기하학적 조건과 재료의 물성치는 앞서 제시된 식(21)의 경우와 동일하다. 3차원 고차이론을 적용한 본 연구의 해석결과는 다른 이론과 비교하여 폭 두께비가 작아질수록, 탄성계수비가 커질수록 고유진동수가 큰 차이를 보이고 있다.

표 6. 역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판의 보강각도와 폭-두께비에 따른 고유진동수

$$a/b = 1, \bar{\omega} = \omega_{11} a^2 / (h \sqrt{\rho/E_2}), (\theta / -\theta)_n$$

a/h	Theory	$\theta = 5^\circ$		$\theta = 30^\circ$		$\theta = 45^\circ$	
		n = 2	n = 3	n = 2	n = 3	n = 2	n = 3
4	Present	8.7594	8.8193	9.8155	10.2403	10.0731	10.5218
	Reddy (HSDT)	8.8115	8.8590	10.3415	10.5772	10.6508	10.8950
	Whitney (FSDT)	8.7078	8.7374	10.3775	10.5021	10.6839	10.8051
10	Present	14.7308	14.8459	17.1281	17.9652	17.8773	18.7857
	Reddy (HSDT)	14.7392	14.8482	17.5099	18.1705	18.3221	19.0248
	Whitney (FSDT)	14.7420	14.8402	17.6343	18.2263	18.4633	19.0873
20	Present	17.4705	17.6218	20.5132	21.5678	21.6229	22.7799
	Reddy (HSDT)	17.4671	17.6193	20.6643	21.6478	21.8063	22.8767
	Whitney (FSDT)	17.4740	17.6221	20.7208	21.6787	21.8722	22.9128
50	Present	18.5888	18.7567	21.9046	23.0558	23.1949	24.4646
	Reddy (HSDT)	18.5803	18.7528	21.9257	23.0675	23.2237	24.4802
	Whitney (FSDT)	18.5819	18.7537	21.9367	23.0739	23.2368	24.4877
100	Present	18.7680	18.9388	22.1283	23.2955	23.4496	24.7381
	Reddy (HSDT)	18.7587	18.9346	22.1265	23.2952	23.4508	24.7392
	Whitney (FSDT)	18.7591	18.9348	22.1293	23.2968	23.4541	24.7411

그림 6, 7과 그림 8은 샌드위치판의 고유진동수를 무차원화하여 나타낸 것이다. [45/ - 45/45/ - 45]로 역대칭 앵글-플라이 적층된 면재를 갖는 샌드위치판의 고유진동수는 적층판과는 달리 폭-두께비, 형상비, 면재-심재 두께비에 따라 이론에 의한 결과에서 큰 차이를 보인다. 특히, 일차전단변형을 고려한 Whitney의 이론은 폭-두께비, 면재-심재의 두께비에 따른 고유진동수에서 매우 큰 차이를 보이고 있다. 진

동해석시 다른 기본적인 조건은 좌굴해석시 적용한 조건과 동일하며, 매개변수에 따라 적절히 적용하였다.

좌굴해석과 진동해석에서 알 수 있듯이 적층판의 경우와는 다르게 샌드위치판은 면재의 강성에 비해 상대적으로 코어의 강성이 작아서 종방향 수직변형의 영향이 고려됨으로 인해 매개변수의 변화에 따른 해석결과들의 차이가 더욱 큼을 알 수 있었다. 적층판과 샌드위치판의 해석결과를 분석하여 보면 적

표 7. 역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판의 탄성계수비와 적층수에 고유진동수

$$a/b = 1, a/h = 10, \bar{\omega} = \omega_{11} a^2 / (h \sqrt{\rho/E_2}), (45/-45)_n$$

적층수 n	Theory	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
2	Present	7.6340	11.4116	14.4735	16.4544	17.8773
	Reddy (HSDT)	7.6267	11.4675	14.6610	16.7750	18.3221
	Whitney (FSDT)	7.6293	11.4939	14.7292	16.8825	18.4633
3	Present	7.7329	11.8385	15.1447	17.2678	18.7857
	Reddy (HSDT)	7.7262	11.8662	15.2433	17.4388	19.0248
	Whitney (FSDT)	7.7276	11.8802	15.2778	17.4898	19.0873
5	Present	7.7841	12.0607	15.5008	17.7084	19.2876
	Reddy (HSDT)	7.7769	12.0659	15.5337	17.7702	19.3770
	Whitney (FSDT)	7.7774	12.0702	15.5418	17.7780	19.3804

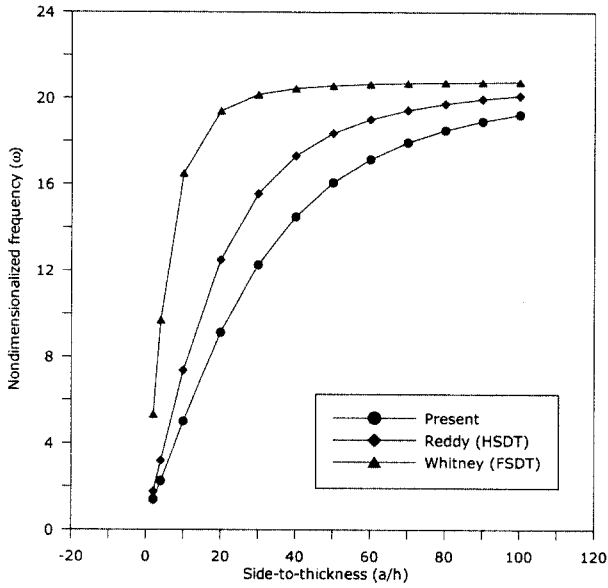


그림 6. 샌드위치판의 폭-두께비에 따른 고유진동수

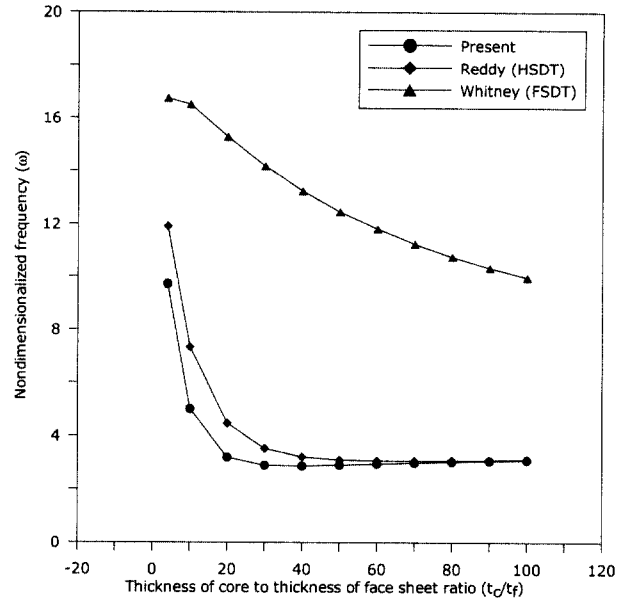


그림 8. 샌드위치판의 면재-심재 두께비에 따른 고유진동수

$$\bar{\omega} = \omega_{11} a^2 / (h \sqrt{\rho/E_2}), [(45/-45)_2 / core / (45/-45)_2]$$

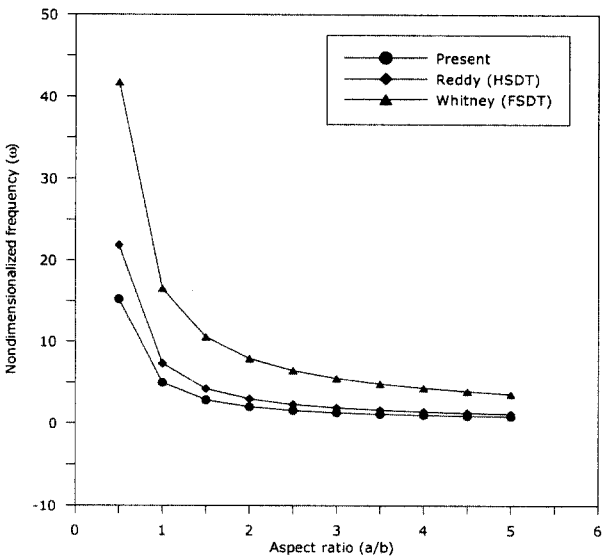


그림 7. 샌드위치판의 형상비에 따른 고유진동수

$$\bar{\omega} = \omega_{11} a^2 / (h \sqrt{\rho/E_2}), [(45/-45)_2 / core / (45/-45)_2]$$

층판의 경우 좌굴하중은 Whitney의 이론과 약 6.5%, Reddy의 이론과는 약 5%의 차이를 보였고 고유진동수의 경우에는 이보다 작은 Whitney의 이론과 약 3.2%, Reddy의 이론과는 약 1.3%의 차이를 보였다. 이러한 차이는 본 연구에서 고려한 종방향 변형률의 효과가 강성행렬의 구성에 큰 영향을 미치고 질량 강성행렬에는 상대적으로 작은 영향을 미침으로 발생하는 원인으로 분석된다. 본 연구의 결과와 다른 연구결과들의 차이는 종방향 변형률을 고려한 3차원 해석이므

$$\bar{\omega} = \omega_{11} a^2 / (h \sqrt{\rho/E_2}), [(45/-45)_2 / core / (45/-45)_2]$$

로 이에 따라 기존의 연구들과는 다른 결과를 나타내었다. 샌드위치판의 경우 본 연구와 Reddy의 결과에서 폭-두께비의 변화에 따른 좌굴하중과 고유진동수의 차이는 심재의 종방향 변형률 효과가 폭-두께비는 커지더라도 면재-심재의 두께비는 일정하므로 상대적으로 영향이 크을 알 수 있었다. 반면에 형상비 증가는 판의 형태가 보로 변하게 되어 고차 전단변형이론과 종방향 변형률 고려로 인한 효과의 차이가 작아지게 되고 면재-심재두께비의 증가는 결국 적층판과 같은 형태의 판으로 변하게 되므로 좌굴하중과 고유진동수의 차이가 매우 작아짐을 알 수 있었다. 본 연구 결과와 다른 해석과의 비교시 적층판과 샌드위치판의 경우가 다른 결과를 나타내게 되는 이유는 기존의 연구에서 무시되었던 두께방향 변형률이 고려됨에 있다. 강성이 작고 전체 판의 두께에서 상대적으로 많은 부분을 차지하는 심재의 종방향 변형효과가 증대되고 이로 인한 영향을 상대적으로 많이 받게 되는 샌드위치판의 경우가 적층판의 경우와는 달리 다른 연구들과 비교하였을 때 많은 차이를 나타내게 된 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구는 기존의 고차전단변형이론에서 고려하지 않았던 종방향 수직 변형률을 고려한 변위장을 적용하였다. 크로스-플라이를 갖는 적층구조물의 정적 및 진동해석을 수행한 참고문헌(한성천 등, 2002)에서 크로스-플라이 적층판의 3차원 고차이론의 결과가 3차원 탄성해석(Whitney 등, 1970)

의 결과에 상대적으로 보다 근접하게 수렴됨을 보였고 또한 기존의 1차 혹은 3차 전단변형이론에 비해 처짐은 커지고, 진동수는 작아지는 것을 발표하였다. 이러한 선행연구의 결과들을 바탕으로 하여 역대칭 앵글-플라이를 갖는 적층판과 샌드위치판의 좌굴 및 진동해석을 수행하였고 다음과 같은 결론을 얻었다.

3차원 고차이론을 이용한 본 연구의 임계좌굴하중과 고유진동수 모두 기존의 고차전단변형과 일차전단변형이론에 비교하여 탄성계수비와 보강각도가 커질수록 거동차이가 크게 발생하였으며, 형상비가 5인 경우 고차전단이론과 비교하여 11% 정도의 차이를 보였다. 역대칭 앵글-플라이로 적층된 면재를 갖는 샌드위치판은 면재의 강성에 비해 상대적으로 코어의 강성이 작아 종방향 수직변형의 영향이 고려됨으로 인해 매개변수 즉, 폭-두께비, 형상비, 면재-심재 두께비의 변화에 따른 해석결과들이 1차 및 3차전단변형이론과 많은 차이를 가졌다. 즉, 본 연구의 해석결과는 다른 이론과 비교하여 고유진동수와 임계좌굴하중이 작게 발생하였다. 따라서, 복합재료 적층판 형태의 구조물 중 특히 샌드위치 적층판은 두께방향의 변형이 상대적으로 발생하기 쉬운 구조물이므로 두께방향의 변형률을 고려하는 것이 보다 안정성을 확보할 수 있는 방법이라고 할 수 있다.

참 고 문 헌

한성천, 유용민, 박대용, 장석윤 (2002), 3차원 고차이론을 이용한 복합재료 적층판의 탄성 및 점탄성적 좌굴해석, 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제22권 제6-A호, pp.1309-1319.

한성천, 유용민, 박대용, 장석윤 (2002), 개선된 고차이론을 이용한 복합재료 적층구조물의 탄성 및 점탄성적 휨, 진동해석, 한국강구조학회논문집, 한국강구조학회, 제14권, 제1호, pp.1-12.

Kant T., Gupta A. (1988), A finite element model for a higher order shear deformable beam theory, *J. Sound. Vib.*, Vol. 125, pp.193-202.

Kant T., Mallikarjuna B. S. (1989), A higher order theory for free vibration of unsymmetrically laminated composite and sandwich plates-finite element evaluations, *Comput. Struct.*, Vol. 32(11), pp.25-32.

Kant T., Mallikarjuna B. S. (1989), Vibration of unsymmetrically laminated plates analysis by using a higher order theory with a C^0 finite element formulation, *J. Sound. Vib.*, Vol. 134, pp.1-16.

Kant T., Swaminathan K. (2000), Analytical solutions using a higher order refined theory for the stability analysis of laminated composite and sandwich plates, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 10(4), pp.337-357.

Kant T., Swaminathan K. (2001), Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher-order refined theory, *Composite Structures*, Vol. 53, pp.73-85.

Kant T., Swaminathan K. (2002), Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Composite Structures*, Vol. 56, pp.329-344.

Levinson M. (1980), An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mech. Res. Commun.*, Vol. 7, pp.343.

Mallikarjuna B. S., Kant T. (1989), Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher order theory with finite element technique, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, pp.1875-1889.

Murthy M. V. V. (1981), An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates, *NASA Technical Paper*, No. 1903.

Noor A. K. (1973), Free vibration of multilayered composite plates, *AIAA J.*, Vol. 11, pp.1038-1039.

Reddy J. N. (1979), Free vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method, *J. Sound Vib.*, Vol. 4, pp.565-576.

Reddy J. N. (1984), A simple higher order theory for laminated composite plates, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 51, pp.745-752.

Reddy J. N. (1996), *Mechanics of Laminated Composite Plates, Theory and Analysis*, Boca Raton : CRC Press.

Phan N. D., Reddy J. N. (1985), Stability and vibration of isotropic and laminated plates according to higher order shear deformation theory, *J. Sound Vibration*, Vol. 98, pp.157-170.

Reissner E. (1945), The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 12(2), pp.69-77.

Reissner E., Stavsky Y. (1961), Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 28, pp.402-408.

Sun C. T., Whitney J. M. (1973), Theories for the

- dynamic response of laminated plates, *AIAA J.*, Vol. 11, pp.178-183.
- Whitney J. M. (1969), The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates, *J. Compos. Mater.*, Vol.3, pp.534-547.
- Whitney J. M., Pagano N. J. (1970), Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 37(4), pp.1031-1036.
- (접수일자 : 2002. 11. 12 / 심사일 2002. 12. 4 /
심사완료일 2003. 3. 2)