

부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템의 근사법

이형중 · 허 선[†]

한양대학교 산업공학과

An Approximation of the M/G/1 System with Finite Workload Capacity

Hyung Joong Lee · Sun Hur

Department of Industrial Engineering Hanyang University, Ansan, 425-791

We propose an approximation of the $M/G/1$ system with finite workload capacity, where those customers whose admission to the system would increase the workload beyond a prespecified finite capacity limit are not accepted. Our approximation method is based on the idea that the service time of a customer in the $M/G/1$ system can be approximated as the sum of service times of a batch of customers in the $M^X/d/1$ system where the deterministic service time d is small enough. That is, the original service time is discretized and approximated by the batch size. We exemplified our method by obtaining the average workload of the $M/M/1$ system by means of the $M^X/d/1$ system, where the batch size is geometric. In addition, the approximate blocking probabilities of the $M/M/1$ and $M/E_k/1$ system with finite workload capacities are sought. The proposed method turns out to give a good approximation, which is compared with a simulation.

Keywords: finite capacity, M/G/1, total rejection, blocking probability

1. 서론

고객의 도착 시점에서 부하량에 따라 고객이 시스템에 제한적으로 들어오게 되는 대기시스템들이 있다. 여기서 부하량이란 서버가 서비스중인 고객의 잔여 서비스 양과, 대기공간 내 있는 고객들에게 제공되어야 할 서비스 양의 합을 말한다. 시스템에 도착하는 각각의 고객은 서버가 처리해야 할 서비스 양을 가지고 들어온다. 고객들이 가지고 오는 서비스 양은 고정된 크기의 버퍼에 저장된다. 고객이 도착할 때 그가 가지고 들어오는 서비스 양과, 그 고객의 도착시점에서의 부하량의 합이 버퍼의 크기를 넘게 될 경우에 들어온 고객을 처리하는 방법은 두 가지 경우로 나눌 수 있다. 첫 번째, 고객이 가지고 들어오는 서비스의 양이 버퍼를 채우고도 남을 경우에는 대기시스템은 고객이 가지고 들어오는 서비스 양을 버퍼가 가득 차도록 채우고 나머지 서비스 양을 받지 않는다. 이 모형을 부분거절(partial rejection) 모형이라고 부른다. 두 번째, 고객이 가

지고 들어오는 서비스의 양이 버퍼를 채우고도 남을 경우에는 대기시스템은 고객이 가지고 들어오는 서비스 양을 모두 받지 않는다. 즉, 그 고객은 시스템에 들어오지 못하게 된다. 이 모형은 전체거절(total rejection) 모형이라고 한다.

부분거절 모형의 경우는 댐 모형이라고도 한다. Perry and Asmussen (2000)은 댐 모형에서 도착과정이 포아송 과정이며 버퍼의 크기가 확률변수이고 서비스 시간이 지수분포인 경우 부하량 과정에 대한 안정상태 분포를 도출하였다. 기타 대부분의 댐 모형에 관한 연구는 바쁜 기간의 길이에 대한 분포를 구하는 연구가 많이 진행되어 왔다. 최근에 Lee and Kinatader (2000)는 포아송 도착이며 고객이 가지고 들어오는 서비스 양이 지수분포일 때 바쁜 기간에 대한 라플라스 변환을 도출하였고, Kim, Bae and Lee (2001)는 고객이 가지고 들어오는 서비스 시간이 일반분포일 때 바쁜 기간에 대한 라플라스 변환을 도출하였다. 두 번째 전부거절 모형을 $M/G/1$ 시스템에 적용한 경우를 부하량에 제한이 있는 $M/G/1$ 시스템이라 하자.

[†] 연락저자 : 허선 교수, 425-791 경기도 안산시 서동 1271 한양대학교 산업공학과, Fax : 031-409-2423, e-mail: hursun@hanyang.ac.kr
2003년 8월 접수; 2003년 9월 게재 확정.

이 시스템에 대하여 Perry, Stadje and Zacks (2001)는 서비스 규칙이 FIFO(선입선출)인 경우 부하량의 분포를 구하기 위한 안정상태 차등미분 방정식을 세웠고 특히 서비스 시간이 지수 분포일 때는 안정상태 부하량 분포를 구했지만, 이들의 결과에는 일부 오류가 있으며 실제로 이 결과를 이용해서 수치계산을 할 때에는 계산과정이 매우 복잡하다는 어려움이 있다. 그리고 서비스 규칙이 LIFO(후입선출)인 경우에는 대기고객 수와 잔여 서비스 시간에 대한 안정상태 결합분포를 구하였고 바쁜 기간에 대한 라플라스 변환을 구하였지만, 정확한 안정상태 고객 수 분포는 구하지 못하였다.

본 연구에서는 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템의 평균 부하량을 보다 간단한 방법으로 구할 수 있도록 근사법을 제시한다. 근사화 방법의 기본적인 생각은 고객이 가지고 들어오는 서비스 양을 이산화하여 집단도착 고객의 크기로 표현함으로써, 원 모형을 대기공간에 제한이 있고 서비스 시간이 일정하며, 집단도착인 시스템으로 변형시키고자 하는 것이다.

(아래 <Figure 1>의 부하량 과정을 <Figure 2>의 고객 수 과정으로 근사) 여기서는 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템을 대기 고객 수에 제한이 있는 M^x/d/1 시스템으로 근사화한다. 특히 M/G/1 시스템에서 고객이 가지고 들어오는 서비스 양을 M^x/d/1에서 고객집단의 크기 X에 서비스 시간 d를 곱한 양으로 대체하게 된다.

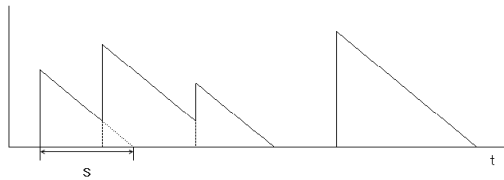


Figure 1. Workload process.

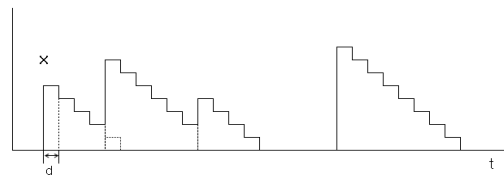


Figure 2. System size process.

2절에서는 근사법의 타당성을 검증하기 위하여 M/M/1 시스템의 부하량 과정을 M^x/d/1 시스템의 고객 수 과정으로 근사화한다. 3절에서는 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템을 Baba (1984)가 제시한 대기고객 수가 m명으로 제한이 있는 M^x/G/1/m 시스템의 해를 이용하여 근사화한다. 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템의 안정상태 부하량 분포와 고객이 시스템에 들어오지 못할 거절확률 등을 구한다. 4절에서는 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템의 근사화 방법의 적합성을 알아보기 위하여 본 연구의 근사법을 시뮬레이션과 비

교한다.

2. M/M/1 시스템의 부하량 과정 근사화

본 절에서는 고객 수 과정으로 부하량 과정을 근사화하는 것의 타당성을 보이기 위해 M/M/1 시스템의 부하량 과정을 집단의 크기가 기하분포인 M^x/d/1 시스템의 고객 수 과정으로 근사화해 보고자 한다. 고객의 도착은 도착률이 λ인 포아송 과정으로 이루어지며, 서버의 서비스 시간 S는 평균이 E(S) = 1/μ인 지수분포를 따르는 M/M/1 시스템이 있다. 이 시스템의 부하량 과정을 고객집단의 크기 X가 기하분포를 따르고 각 고객집단의 도착과정은 도착률이 λ인 복합 포아송 과정으로 이루어지며 서버의 서비스 시간 d는 일정한 값을 가지는 M^x/d/1 시스템의 고객 수 과정으로 근사화한다.

M^x/d/1 시스템의 집단고객 크기의 확률변수를 X라 하자. M^x/d/1 시스템의 집단고객의 크기가 S ≈ Xd를 성립하게 하고 d의 크기가 아주 작은 값을 갖게 하면 된다. 즉, <Figure 2>에서 S ≈ Xd를 만족하면서 d의 크기를 아주 작게 하면 <Figure 1>과 같이 된다. 따라서 X ≈ [S/d]의 방법으로 근사화할 수 있다. 집단고객의 크기 X는 식 (2.1)과 같이 기하분포를 갖게 된다.

$$\begin{aligned} \Pr(X = n) &\approx \Pr(n - 1 < S/d \leq n) & (2.1) \\ &= \Pr((n - 1)d < S \leq nd) \\ &= (1 - \exp(-\mu d)) (\exp(-\mu d))^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

일반적인 M^x/G/1 시스템의 평균고객 수는 잘 알려진 바와 같이 식 (2.2)와 같다(예를 들면 Lee (1998)).

$$\begin{aligned} L &= \lambda E(X) \left(\frac{\lambda E(X) E(B^2)}{2(1 - \rho)} \right. & (2.2) \\ &\quad \left. + \frac{E(B) E(X(X-1))}{2E(X)(1 - \rho)} + \frac{1}{\mu} \right) \end{aligned}$$

여기서 B는 서비스 시간의 확률변수이고 ρ = λE(X)E(B)이다. 우리가 고려하는 M^x/d/1에서는 도착집단의 크기가 식 (2.1)과 같은 기하확률변수이고 서비스 시간이 상수 d이므로 평균고객 수는 아래와 같다.

$$L = \frac{\lambda d (2 - \lambda d)}{2(1 - \exp(-\mu d))(1 - \exp(-\mu d) - \lambda d)} \quad (2.3)$$

M^x/d/1 시스템의 평균고객 수에 d를 곱하면 M/M/1 시스템의 평균부하량을 근사할 수 있다. 특히 근사의 정확도는 d가 0에 가까워 질수록 더욱 높아지며 이는 다음 식 (2.4)에서 확인할 수 있다.

$$\lim_{d \rightarrow 0} Ld = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad (2.4)$$

식 (2.4)의 우변은 M/M/1 시스템의 평균부하량을 나타낸다.

3. 부하량에 제한이 있는 M/G/1 시스템 근사화 방법

고객의 도착은 도착률이 λ 인 포아송 과정이며, 고객의 서비스 시간 S 는 일반분포를 따르고 $E(S) = 1/\mu$ 라고 하자. 임의의 고객의 도착시점에서, 대기공간에 있는 고객들의 서비스 양과 서버의 잔여 서비스 양(즉, 가상대기시간)과 이 고객이 가지고 들어오는 서비스 양의 합이 특정한 시간 d (임계치)를 넘게 되면 고객이 시스템에 들어오지 못한다(전체거절). 이 모형의 부하량 과정을 $M^X/d/1/m$ 시스템의 고객 수 과정을 이용하여 근사화 된다.

이산화된 서비스 시간 d 는 적절하게 작은 값을 가지게 하고 임계치 c 에 맞게 버퍼의 크기 m 을 결정해 준다. 따라서 d 를 제일 먼저 결정해야 한다. d 를 작게 할수록 보다 정확한 근사값을 구할 수 있으나, 계산량이 많아지고 오버플로 등으로 인한 계산오류가 발생할 수가 있으므로 원하는 근사 정도에 맞게 적당히 작은 d 를 선택해야 한다. 본 연구에서는 경험적인 방법으로 적절한 d 를 결정하는 방법을 4절에서 제시하였다. d 가 정해지면 m 을 결정한다. $c/E(S) \approx m/E(X)$ 와 $E(S) = E(X)d$ 가 성립해야 하므로, 두 식으로부터 $m = \lceil c/d \rceil$ 으로 정하면 된다. 다음으로 도착집단의 크기 X 의 분포는 $X = \lfloor S/d \rfloor$ 에 의해서 정한다.

$$\Pr(X = i) = \Pr((i-1)d < S \leq id), \quad i = 1, 2, \dots, m+1 \quad (3.1)$$

식 (3.1)에서 집단크기를 $m+2$ 명 이상을 확률을 구하지 않는 것은 집단크기가 $m+2$ 명 이상이면 시스템에 들어오지 못하기 때문이다.

위 세 가지 파라미터를 결정한 후에는 Baba (1984)를 이용하여 대기고객 수가 m 명으로 제한이 있는 $M^X/d/1/m$ 모형의 해를 얻을 수 있다. 여기서는 이 해를 구하는 과정을 간단하게 요약하여 제시한다.

다음과 같이 기호와 확률을 정의하자.

B : 서비스 시간의 확률변수

g_i : 집단의 크기가 i 명일 확률

$$(i = 1, 2, \dots, m+1)$$

$N(t)$: t 시점에서 시스템 내 고객 수

$U(t)$: t 시점에서 잔여 서비스 시간

$$P_0(t) = P(N(t) = 0), \quad P_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0(t)$$

$$P_k(u, t) du = P((N(t) = k, u < U(t) \leq u + du),$$

$$P_k(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(u, t), \quad u \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m+1$$

$$B^*(s) = \int_0^\infty \exp(-su) dB(u)$$

$$P_k^*(s) = \int_0^\infty \exp(-su) P_k(u) du$$

$P_k^*(0)$ 는 안정상태에서 고객이 k 명 있을 확률임을 알 수 있다.

여기서 고려하는 $M^X/d/1/m$ 모형에서는 서비스 시간이 고정된 값을 가지므로 식 (3.2)를 얻을 수 있다.

$$B^*(s) = \exp(-s/\mu), \quad \mu = 1/d \quad (3.2)$$

위에서 정의한 기호와 확률을 이용하여 다음과 같이 안정상태에서 평형방정식을 얻는다.

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda g_i P_0 = P_1(0) \quad (3.3)$$

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda g_i - s \right) P_1^*(s) = P_0 \lambda g_1 \exp(-s/\mu) + P_2(0) \exp(-s/\mu) - P_1(0) \quad (3.4)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i - s \right) P_k^*(s) = P_0 \lambda g_k \exp(-s/\mu) + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(s) \lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0) \exp(-s/\mu) - P_{k(0)} \quad k = 2, \dots, m \quad (3.5)$$

$$-s P_{m+1}^*(s) = P_0 \lambda g_{m+1} \exp(-s/\mu) + \sum_{i=1}^m P_i^*(s) \lambda g_{m+1-i} - P_{m+1}(0) \quad (3.6)$$

$s = \sum_{i=1}^m \lambda g_i$ 를 식 (3.4)에 대입하고 식 (3.3)을 이용하여 다음을 얻는다.

$$P_2(0) = \frac{[\sum_{i=1}^{m+1} g_i - g_1 \exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)] \lambda P_0}{\exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)} \quad (3.7)$$

$s=0$ 을 식 (3.4)에 대입하고 식 (3.3)와 식 (3.7)를 이용하여 다음을 얻는다.

$$P_1^*(0) = \frac{\sum_{i=1}^{m+1} g_i P_0 [1 - \exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)]}{\sum_{i=1}^m g_i \exp(-(\sum_{i=1}^m \lambda g_i)/\mu)} \quad (3.8)$$

$s = \sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i$ 을 식 (3.5)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$P_{k+1}(0) = [P_k(0) - P_0 \lambda g_k \exp(-(\sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i)/\mu) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) \lambda g_{k-i}] \quad (3.9)$$

$$/ \exp(-(\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) / \mu) \quad k=2, \dots, m$$

식 (3.9)에서 $P_k(0)$ 에서 $P_{k+1}(0)$ 을 얻기 위해서는 P_i^* ($\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j$) ($i=1, 2, \dots, k-1$)이 필요하다. 따라서 식 (3.4)과 식 (3.5)에 각각 $s = \sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j$ 을 대입하여 다음을 얻는다.

$$P_1^* (\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) = [P_0 \lambda g_1 \exp(-(\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) / \mu) + P_2(0) \exp(-(\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) / \mu) - P_1(0)] / \sum_{j=m+2-k}^m \lambda g_j \quad (3.10)$$

$$P_i^* (\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) = [P_0 \lambda g_i \exp(-(\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) / \mu) + \sum_{l=1}^{i-1} P_l^* (\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) \lambda g_{i-l} + P_{i+1}(0) \exp(-(\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j) / \mu) - P_i(0)] / \sum_{j=m+2-k}^{m+1-i} \lambda g_j \quad (3.11)$$

$$i=2, \dots, k-1.$$

식 (3.10)와 식 (3.11)을 순환적으로 계산하면 P_i^* ($\sum_{j=1}^{m+1-k} \lambda g_j$) ($i=1, 2, \dots, k-1$)을 얻을 수 있다. $s=0$ 을 식 (3.5)에 대입하면 다음을 얻는다.

$$P_k^*(0) = [\lambda g_k P_0 + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(0) \lambda g_{k-i} + P_{k+1}(0) + P_k(0)] / \sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i \quad k=2, \dots, m \quad (3.12)$$

식 (3.6)을 s 에 관해 미분하여 $s=0$ 을 대입하면 다음을 얻는다.

$$P_{m+1}^*(0) = P_0 \lambda g_{m+1} / \mu - \sum_{i=1}^m P_i^*(1)(0) \lambda g_{m-i+1} \quad (3.13)$$

식 (3.13)의 좌변을 구하기 위해서 $P_i^*(1)$ ($i=1, 2, \dots, m$)이 필요하므로 식 (3.4)과 식 (3.5)을 미분하여 $s=0$ 을 대입하면 다음을 얻는다.

$$P_1^*(1)(0) = [-P_0 \lambda g_1 / \mu - P_2(0) / \mu + P_1^*(0)] / \sum_{i=1}^m \lambda g_i \quad (3.14)$$

$$P_k^*(1)(0) = [-P_0 \lambda g_k / \mu + \sum_{i=1}^{k-1} P_i^*(1)(0) \lambda g_{k-i} - P_{k+1}(0) / \mu + P_k^*(0)] / \sum_{i=1}^{m+1-k} \lambda g_i, \quad k=2, 3, \dots, m \quad (3.15)$$

식 (3.8), 식 (3.12), 식 (3.13)로서 $P_k^*(0)$, $k=0, 1, \dots, m+1$ 즉 안정상태에서의 고객 수 분포를 얻을 수 있다. 단, 미지의 값 P_0 은 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$P_0 + \sum_{i=1}^{m+1} P_i^*(0) = 1 \quad (3.16)$$

안정상태 평균고객 수 $\sum_{i=1}^{m+1} i P_i^*(0)$ 에 d 를 곱하여 주면 부하량에 제한이 있는 $M/G/1$ 모형의 안정상태에서의 평균부하량의 근사값을 얻을 수 있다. 한편, 도착집단이 시스템에 들어오지 못하는 거절확률은

$$P_0 \sum_{i=m+2}^{\infty} g_i + \sum_{i=1}^{m+1} P_i^*(0) \sum_{j=m+2-i}^{\infty} g_j \quad (3.17)$$

와 같이 구할 수 있다.

4. 수치분석을 통한 정밀도 검증

3절에서 제시한 부하량에 제한이 있는 $M/G/1$ 시스템의 근사법의 타당성을 검증하기 위하여 c (임계치), d , 제공로드 ρ 등을 변화시켜 가며 고객 거절확률에 대한 수치분석을 하였다. 고객의 도착률 $\lambda=1$ 로 고정하였고 서비스 시간 분포는 지수분포와 얼랑분포를 사용하였으며, 제공로드 $\rho=0.5, 1, 2$ 와 임계치의 상대적 크기를 나타내는 값으로 $c/E(S)=2, 3, 4$ 로 바꾸어 가면서 실험을 하였다.

특히 서비스 시간을 작게 이산화할수록 근사의 정확도가 커지므로 이를 살펴보기 위해 $E(S)/d=10, 20, 40, 80$ 으로 늘려 가면서 실험을 하였다. 실험은 Matlab 6.5을 이용하여 계산하였고 시뮬레이션은 Arena 5.5로 수행하였다.

<Table 1>은 부하량에 제한이 있는 $M/M/1$ 시스템에 대하여 근사법과 시뮬레이션에 의한 거절확률을 각각 계산하여 비교한 것이다. 당연한 결과이지만, $E(S)/d$ 가 클수록 좋은 근사정도를 보이고 있고, 특히 $E(S)/d^2$ 가 40 이상이면 상대오차를 3% 이내의 근사정도를 보이고 있다.

그리고 $c/E(S)$ 가 4이고 $E(S)/d$ 가 80일 때는 근사값을 구하지 못하는 경우가 있다. 이것은 m 의 크기가 320이 되어 계산량이 많아지고 g_{320} 값이 너무 작기 때문에 계산하는 데 오류가 발생하였기 때문이다.

따라서 근사의 정확도를 높이기 위하여 무작정 $E(S)/d$ 값을 크게 하면 g_m 이 너무 작아져서 계산이 어렵다. 본 연구에서의 계산경험에 의하면 적절한 $E(S)/d$ 값은 $c/E(S)$ 가 3 이하면 $E(S)/d$ 값은 최대 100정도가 적당하고, $c/E(S)$ 가 3을 초과하면 50정도가 적당하다.

Table 1. Loss probability of $M/M/1$ system

| ρ (제공로드) | $c/E(S)$ | $E(S)/d$ | approx. | sim. | 상대오차 (%) |
|------------------|----------|----------|---------|---------|-------------|
| 0.5 | 2 | 10 | 0.1548 | 0.1729 | 10.48 |
| | | 20 | 0.1643 | | 4.99 |
| | | 40 | 0.1692 | | 2.16 |
| | | 80 | 0.1717 | | 0.71 |
| | 3 | 10 | 0.0781 | 0.0876 | 10.90 |
| | | 20 | 0.0831 | | 5.19 |
| | | 40 | 0.0857 | | 2.22 |
| | | 80 | 0.0870 | | 0.74 |
| | 4 | 10 | 0.0421 | 0.0468 | 10.08 |
| | | 20 | 0.0451 | | 3.67 |
| | | 40 | 0.0460 | | 1.75 |
| | | 80 | N/A | | N/A |
| 1 | 2 | 10 | 0.2042 | 0.21559 | 5.28 |
| | | 20 | 0.2099 | | 2.64 |
| | | 40 | 0.2130 | | 1.20 |
| | | 80 | 0.2145 | | 0.51 |
| | 3 | 10 | 0.1349 | 0.13958 | 3.47 |
| | | 20 | 0.1375 | | 1.51 |
| | | 40 | 0.1389 | | 0.49 |
| | | 80 | 0.1397 | | 0.09 |
| | 4 | 10 | 0.0994 | 0.10210 | 2.72 |
| | | 20 | 0.1009 | | 1.19 |
| | | 40 | 0.1017 | | 0.39 |
| | | 80 | N/A | | N/A |
| 2 | 2 | 10 | 0.3041 | 0.30127 | 0.93 |
| | | 20 | 0.3024 | | 0.37 |
| | | 40 | 0.3018 | | 0.18 |
| | | 80 | 0.3015 | | 0.08 |
| | 3 | 10 | 0.2687 | 0.25850 | 3.8 |
| | | 20 | 0.2641 | | 2.12 |
| | | 40 | 0.2621 | | 1.37 |
| | | 80 | 0.2611 | | 0.1 |
| | 4 | 10 | 0.2571 | 0.24364 | 5.24 |
| | | 20 | 0.2514 | | 3.09 |
| | | 40 | 0.2487 | | 2.03 |
| | | 80 | N/A | | N/A |

<Table 2>는 부하량에 제한이 있는 $M/E_2/1$ 시스템으로 근사법과 시뮬레이션의 거절확률을 비교한 것이다. 역시 $E(S)/d$ 가 클수록 좋은 근사정도를 보이고 있고, 80 이상이면 3% 이내의 근사정도를 보이고 있다. 서비스 시간 분포가 지수분포일 때는 $c/E(S)$ 가 4이고 $E(S)/d$ 가 80일 때는 계산값을 구

하지 못하였는데 서비스 시간이 일량분포를 따를 때는 가능한 것은 g_{320} 값이 서비스 시간이 지수분포를 따를 때보다 크기 때문이라고 보인다.

Table 2. Loss probability of $M/E_2/1$ system

| ρ (제공로드) | $c/E(S)$ | $E(S)/d$ | approx. | sim. | 상대오차 (%) |
|------------------|----------|----------|---------|---------|-------------|
| 0.5 | 2 | 10 | 0.1566 | 0.15914 | 1.60 |
| | | 20 | 0.1576 | | 0.97 |
| | | 40 | 0.1582 | | 0.59 |
| | | 80 | 0.1586 | | 0.34 |
| | 3 | 10 | 0.0693 | 0.06540 | 5.96 |
| | | 20 | 0.0678 | | 3.67 |
| | | 40 | 0.0671 | | 2.60 |
| | | 80 | 0.0668 | | 2.14 |
| | 4 | 10 | 0.0329 | 0.02966 | 10.92 |
| | | 20 | 0.0315 | | 6.20 |
| | | 40 | 0.0308 | | 3.84 |
| | | 80 | 0.0304 | | 2.49 |
| 1 | 2 | 10 | 0.2396 | 0.23080 | 3.81 |
| | | 20 | 0.2354 | | 1.99 |
| | | 40 | 0.2334 | | 1.13 |
| | | 80 | 0.2325 | | 0.74 |
| | 3 | 10 | 0.1611 | 0.14656 | 9.92 |
| | | 20 | 0.1545 | | 5.42 |
| | | 40 | 0.1513 | | 3.23 |
| | | 80 | 0.1497 | | 2.14 |
| | 4 | 10 | 0.1226 | 0.10592 | 15.75 |
| | | 20 | 0.1153 | | 8.86 |
| | | 40 | 0.1118 | | 5.55 |
| | | 80 | 0.1100 | | 3.85 |
| 2 | 2 | 10 | 0.3885 | 0.36425 | 6.66 |
| | | 20 | 0.3777 | | 3.69 |
| | | 40 | 0.3723 | | 2.21 |
| | | 80 | 0.3696 | | 1.47 |
| | 3 | 10 | 0.3580 | 0.32698 | 9.49 |
| | | 20 | 0.3447 | | 5.42 |
| | | 40 | 0.3379 | | 3.34 |
| | | 80 | 0.3345 | | 2.30 |
| | 4 | 10 | 0.3504 | 0.31752 | 10.36 |
| | | 20 | 0.3361 | | 5.85 |
| | | 40 | 0.3289 | | 3.58 |
| | | 80 | 0.3253 | | 2.45 |

주: 상대오차 = $\frac{|sim. - approx. |}{sim.} \times 100(\%)$

위의 수치예제에 의해서 $E(S)/d$ 가 커서 m 이 너무 커지면 계산에 오류가 발생하는 문제가 발생하지만 부하량에 제한이 있는 $M/G/1$ 시스템을 제공로드와 임계치에 영향을 받지 않고 높은 근사의 정도를 가지는 값으로 근사화할 수 있음을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 해석적으로 난해한 부하량에 제한이 있는 $M/G/1$ 시스템을 대기고객 수에 제한이 있는 $M^X/d/1$ 시스템을 이용하여 근사화하였다. $M/M/1$ 시스템의 부하량 과정을 $M^X/d/1$ 시스템의 고객 수 과정을 이용하여 근사화하였고, 근사화 과정에서 $d \rightarrow 0$ 으로 보내면 $M/M/1$ 시스템의 평균부하량을 정확하게 구할 수 있음을 통하여 근사화 방법이 적당하다는 것을 보였다. 수치예제를 보면 제공로드와 임계치에 영향을 받지 않고 좋은 근사값을 얻을 수 있음을 나타내고 있다.

본 연구에서 사용한 근사법은 대기 모형을 부하량으로 분석

해야 하는 댐 모형이나 $M/G/1$ D 정책 시스템을 근사화하는 데도 매우 적합한 근사법이라고 할 수 있으며, 이 방면의 연구가 진행중이다.

참고문헌

- Lee, H.W. (1998), *Queueing Theory*, Sigma Press, Seoul, Korea.
- Baba, Y. (1984), The $M^X/G/1$ Queue with Finite Waiting Room, *Journal of Operations Research Society of Japan*, **27**(3), pp. 260-271.
- Kim, S., Bae, J., and Lee, E.Y. (2001), Busy Periods of Poisson Arrival Queues with Loss, *Queueing System*, Vol. 39, pp. 201-212.
- Lee, E.Y. and Kinatader, K.J.K. (2000), The expected wet period of finite dam with exponential inputs, *Stochastic Processes. Appl.*, Vol. **90**, pp. 175-180.
- Perry, D. and Asmussen, S. (2000), Rejection rules in the $M/G/1$ queue, *Queueing Systems*, Vol. **19**, pp. 105-130.
- Perry, D., Stadge, W. and Zacks, S. (2001), The $M/G/1$ Queue with Finite Workload Capacity, *Queueing Systems*, Vol. **39**, pp. 7-22.