

# 현수교의 개선된 초기형상 해석법

## An Improved Method for Initial Shape Analysis of Suspension Bridges

김 문 영<sup>1)</sup> · 경 용 수<sup>2)</sup> · 이 준 석<sup>3)</sup>  
*Kim, Moon Young Kyung, Yong Soo Lee, Jun Sok*

**요 약** : 타정식 및 자정식 현수교의 정확한 초기형상을 결정하기 위하여 초기부재력법과 TCUD법을 효과적으로 결합시킨 개선된 해석 방법을 제시한다. 먼저 기하학적 선형해석을 수행하여 장력의 초기값을 가정한다. 이제 케이블의 무응력길이를 변수로 취급하여 TCUD법에 근거한 반복계산이 이루어진다. 수렴이 되면 현수교의 주탑 및 보강형의 축방향 변위를 제거하기 위하여, 케이블의 장력과 주탑, 보강형의 압축력, 그리고 주케이블의 절점 수직변위의 수렴된 값은 이용하고 나머지 부재력과 좌표값은 초기값으로 재조정하여 초기부재력법을 적용한다. 케이블요소의 모델링에서 무응력길이의 변화를 고려한 트러스-케이블요소와 탄성현수선요소를 각각 사용하고 그 결과를 제시하고 비교한다. 결론적으로, 케이블의 무응력길이를 변수로 추가함으로써 주케이블 및 행어 정착부의 변위와 주탑의 수평변위를 설계목적에 적합하도록 제어하여 휨모멘트를 최소화하였고, 초기부재력법을 결합시켜 보강형, 주탑의 축방향변위가 발생하지 않는 해석결과를 얻을 수 있었다.

**ABSTRACT** : The extended tangent stiffness matrices and force-deformation relations of the elastic catenary element were initially derived through the addition of the unstrained length of cables to unknown nodal displacements. A beam-column element was then introduced to model the deck and pylon of cable-stayed bridges. The conventional geometric nonlinear analysis, initial force method, and TCUD method were summarized, with an effective method combining two methods presented to determine the initial shapes of cable-stayed bridges with dead loads. In this combined method, TCUD method was applied to eliminate vertical and horizontal displacements at cable-supported points of decks and on top of pylons, respectively. The initial force method was also adopted to eliminate horizontal and vertical displacements of decks and pylons. Finally, the accuracy and validity of the proposed combined method were demonstrated through numerical examples.

**핵심용어** : 초기형상, 타정식 현수교, 자정식 현수교, 탄성현수선 케이블, 트러스-케이블

**KEYWORDS** : initial shape, earth-anchored suspension bridge, self-anchored suspension bridge, elastic catenary cable, truss-cable

### 1. 서 론

일반적으로 현수교는 타교량과 비교해서 경간이 긴 장대교량이고, 기하학적인 비선형성 때문에 해석하기가 매우 어렵다. 특히 케이블이 매우 유연한 특성을 가지고 있기 때문에 구조적인 거동을 정확하게 파악할 수 없다. 현수교의 해석이론은 1877년 Ritter의 연구를 시작으로 Melan, Steinman, Moisseiff 등에 의하여 개발되었다. 이후 전자계산기의 급속한

발달과 더불어 이전의 고차부정정 구조물의 문제점들이 일시에 해결되면서, 중흥기를 맞이하였다. Abdel-Ghaffar(1990)는 현수교에 대한 유한요소법을 개발하였으며, Karoumi(1999)는 탄성현수선을 이용한 Trial & Error법을 채택하여 엄밀한 해석을 수행하였다. 국내에서는 초기연구는 1980년대 요소개발을 배경으로 시작하였다. 이후 김호경 등(1997)에 의해 탄성현수선요소를 이용하여 초기부재력법을 개발하여 자정식 현수교의 초기평형상태해석을 성공적으로 수행하였으며, Kim

1) 정회원, 성균관대학교 토목환경공학과 교수  
(Tel. 031-290-7514, Fax. 031-290-7549, E-mail: kmeye@skku.ac.kr)  
2) 학생회원, 성균관대학교 토목환경공학과 박사과(sosory@mail.skku.ac.kr)  
3) 학생회원, 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정(junsok73@yahoo.co.kr)

본 논문에 대한 토의를 2003년 10월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

& Lee(2001)는 케이블부재의 무응력길이를 변수로 가정하여 초기형상을 결정하는 소위 TCUD해석법을 제시하였다. 그러나 초기부재력법은 초기 주케이블 장력을 결정하는데 어려움이 있으며, TCUD법은 자정식 현수교의 경우에 보강형의 수평변위와 주탑의 수직변위를 제어할 수 없다. 김문영 등(2003)은 TCUD법과 초기부재력법을 효과적으로 결합시킨 사장교의 초기형상 해석법을 제안하였다.

본 연구에서는 김 등(2003)의 방법을 확장시켜서 현수교의 정확한 초기형상을 결정하고자 한다. 이를 위하여 초기부재력법과 TCUD해석법의 장점을 활용할 수 있도록 효과적으로 결합시킨 개선된 해석방법을 제시한다. 1) 먼저 주케이블은 트러스 또는 탄성현수선요소, 행어는 트러스요소, 그리고 보강형과 주탑은 3차원의 보-기둥요소를 사용하여 모델링하고 기하학적 선형해석을 수행하여 수렴된 장력값을 장력 초기값으로 가정한다. 또한 포물선 케이블의 처짐형상식을 이용하여 주케이블 절점의 초기 수직좌표값을 결정한다. 2) 이제 케이블의 무응력길이를 변수로 취급하여 현수교 전체의 접선강성행렬을 산정하고, 경계조건 이외에 케이블 개수만큼의 절점변위를 설계자의 초기형상에 가깝게 되도록 추가적으로 절점변위를 구속하여 절점변위 및 무응력길이의 증분을 산정하고 이를 도대로 케이블 부재력과 보강형 및 주탑의 부재력을 산정한다. 이렇게 계산된 부재력으로부터 불평형하중을 산정하고 수렴이 될 때까지 다시 반복계산을 수행한다. 이때 강성행렬은 비대칭행렬이 된다. 3) 수렴이 되었을 때 형상은 자정식 현수교는 주탑, 보강형 그리고 타정식 현수교는 주탑이 압축력을 받아 변위를 일으킨다. 이러한 축방향변위를 없애기 위하여 초기부재력법 즉, 보강형, 주탑의 압축력과 케이블장력은 수렴된 값을 가지고 현수교의 주케이블의 주경간새그점의 수직좌표를 제외한 모든 절점좌표를 처음 위치로 환원시켜서 다시 비선형 반복계산을 수행하면 설계자가 의도하는 초기형상에 가장 근접한 해석결과를 얻을 수 있다. 4) 마지막으로 본 해석 알고리즘의 타당성과 정확성을 검증하기 위하여 수치예제를 제시한다.

## 2. 케이블요소

현수교는 주케이블, 행어, 주탑과 보강형으로 이루어진다. 본 장에서는 먼저 케이블을 모델링하기 위하여 트러스-케이블 그리고 탄성현수선 케이블요소의 장력산정식과 접선강성행렬의 유도과정을 간략히 제시한다. 아울러 보강형과 주탑은 모두 보-기둥요소로 모델링하며 이에 대한 접선강성행렬을 제시한다. 특히 케이블요소의 증분방정식을 유도하는 경우에 케이블의 무응력길이를 추가적인 변수로 간주하기 때문에 이에 대한 항이 추가된다.

### 2.1 트러스-케이블요소

본 절에서는 케이블의 무응력길이(unstrained length)를 고려한 트러스-케이블요소의 탄성 및 기하학적 강성행렬을 유도한다. 그림 1은 트러스-케이블요소의 부재력 및 변위벡터를 나타낸다. 이때, 요소 단부의 장력을 결정하기 위한 힘-변위 관계식은 다음과 같다.

$$T = \frac{EA_0}{L_0}(L - L_0) \quad (1)$$

여기서  $EA_0$ 는 축강성이고,  $L$ ,  $L_0$  그리고  $T$ 는 각각 부재의 최종길이(current length), 무응력길이(unstrained length) 그리고 장력을 나타낸다. 위의 부재력 식을 각각의 좌표성분으로 분해하면 다음과 같은 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F_1 &= -T \cdot \frac{L_x}{L} = -\frac{L_x}{L} \cdot \frac{EA_0}{L_0}(L - L_0) \\ F_2 &= -T \cdot \frac{L_y}{L} = -\frac{L_y}{L} \cdot \frac{EA_0}{L_0}(L - L_0) \\ F_3 &= -T \cdot \frac{L_z}{L} = -\frac{L_z}{L} \cdot \frac{EA_0}{L_0}(L - L_0) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$  이고,

$T = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}$  이다.

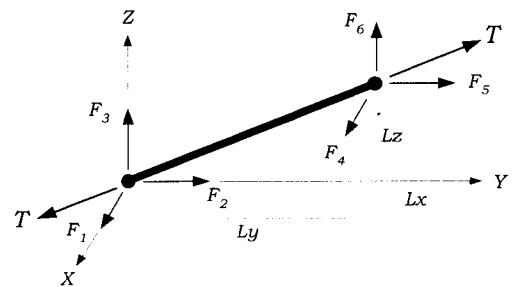


그림 1.(a) 트러스-케이블요소의 부재력벡터

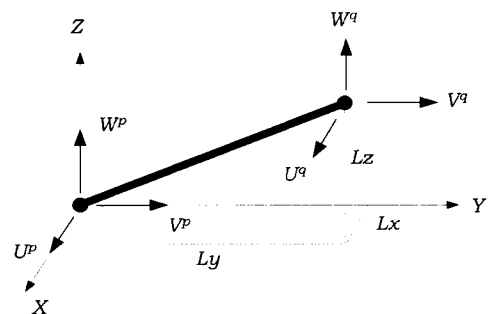


그림 1.(b) 트러스-케이블요소의 변위벡터

식 (2)의 장력성분들은 분명히  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ ,  $L_0$ 의 함수

이다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(L_x, L_y, L_z, L_0) \\ F_2 &= F_2(L_x, L_y, L_z, L_0) \\ F_3 &= F_3(L_x, L_y, L_z, L_0) \end{aligned} \quad (3)$$

이제 요소 양단의 상대적인 변위량과 절점력의 변화량의 증분식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} dF_1 &= \frac{\partial F_1}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_1}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_1}{\partial L_z} dL_z + \frac{\partial F_1}{\partial L_0} dL_0 \\ dF_2 &= \frac{\partial F_2}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_2}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_2}{\partial L_z} dL_z + \frac{\partial F_2}{\partial L_0} dL_0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} dF_3 &= \frac{\partial F_3}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial F_3}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial F_3}{\partial L_z} dL_z + \frac{\partial F_3}{\partial L_0} dL_0 \\ \text{여기서, } dL_x &= dU^a - dU^b, \quad dL_y = dV^a - dV^b, \\ dL_z &= dW^a - dW^b \end{aligned} \quad (5)$$

윗 식을 행렬형태로 다시 쓰면,

$$\begin{Bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \end{bmatrix} dL_0 \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} k_{11} &= -\frac{EA_0 L_x^2}{L^3} - \frac{EA_0(L-L_0)}{L_0 L} \\ k_{12} &= -\frac{EA_0}{L^3} L_x L_y, \quad k_{13} = -\frac{EA_0}{L^3} L_x L_z \\ k_{14} &= \frac{EA_0}{L_0^2} L_x, \quad k_{21} = k_{12} \\ k_{22} &= -\frac{EA_0 L_y^2}{L^3} - \frac{EA_0(L-L_0)}{L_0 L} \\ k_{23} &= -\frac{EA_0}{L^3} L_y L_z, \quad k_{24} = \frac{EA_0}{L_0^2} L_y \\ k_{31} &= k_{13}, \quad k_{32} = k_{23} \\ k_{33} &= -\frac{EA_0 L_z^2}{L^3} - \frac{EA_0(L-L_0)}{L_0 L} \\ k_{34} &= \frac{EA_0}{L_0^2} L_z \end{aligned} \quad (7)$$

트러스 요소는 절점력을 제외한 다른 힘이 작용하지 않기 때문에 평형조건식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_1 + F_4 &= 0 \\ F_2 + F_5 &= 0 \\ F_3 + F_6 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

이제 식 (5)-(8)을 고려하면 다음과 같이 트러스 요소의 증분방정식을 얻을 수 있다.

$$\Delta F_c = (K_{ce} + K_{cg}) \Delta U_c + K_{cl} \Delta L_0 \quad (9)$$

여기서,  $\Delta F_c$  = 케이블요소의 증분절점력벡터;  $K_{ce}$  = 탄성강성행렬;  $K_{cg}$  = 기하학적 강성행렬;  $\Delta U_c$  = 증분변위벡터;  $K_{cl}$  = 무응력길이의 변화에 의한 강성행렬을 나타낸다. 이들의 구체적인 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta F_c &= \begin{Bmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \\ \Delta F_4 \\ \Delta F_5 \\ \Delta F_6 \end{Bmatrix}, \quad \Delta U_c = \begin{Bmatrix} \Delta U^b \\ \Delta V^b \\ \Delta W^b \\ \Delta U^a \\ \Delta V^a \\ \Delta W^a \end{Bmatrix}, \quad K_{cl} = \begin{Bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ -k_{14} \\ -k_{24} \\ -k_{34} \end{Bmatrix} \\ K_{ce} &= \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ -k_{21} & -k_{22} & -k_{23} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ -k_{31} & -k_{32} & -k_{33} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & -k_{21} & -k_{22} & -k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & -k_{31} & -k_{32} & -k_{33} \end{bmatrix} \\ K_{cg} &= \frac{T}{L} \begin{bmatrix} 1-c_1^2 & -c_1 c_2 & -c_1 c_3 & -1+c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & 1-c_2^2 & -c_2 c_3 & c_1 c_2 & -1+c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & 1-c_3^2 & c_1 c_3 & c_2 c_3 & -1+c_3^2 \\ & & & 1-c_1^2 & -c_1 c_2 & -c_1 c_3 \\ & & & & 1-c_2^2 & -c_2 c_3 \\ & & & & & 1-c_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{여기서, } c_1 = \frac{L_x}{L}, \quad c_2 = \frac{L_y}{L}, \quad c_3 = \frac{L_z}{L} \quad (11)$$

### 2.2 탄성현수선 요소

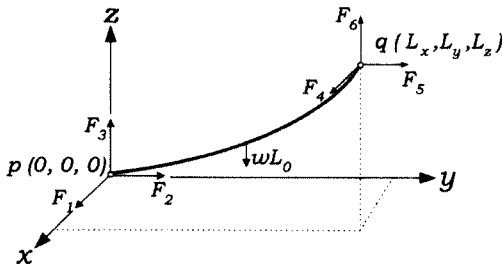


그림 2.(a) 자중을 받는 탄성현수선요소

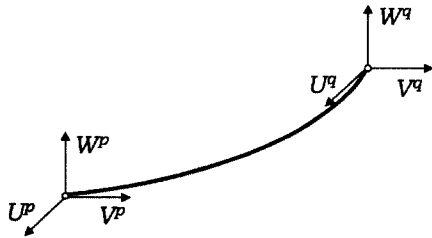


그림 2.(b) 탄성현수선요소의 부재변위 벡터

탄성현수선 요소는 자중을 받는 정적 케이블거동을 엄밀하게 파악할 수 있다(안상섭, 1990). 그림 2와 같이 케이블은 두 개의 고정된 점 p와 q의 사이에 걸려있다고 가정한다. 탄성현수선 케이블요소는 기본적으로 무응력길이  $L_0$ 와 케이블의 각각의 장력성분을 미지수로 사용하여 해석한다. 이때 케이블 요소의 적합방정식을 유도한후, 적합방정식을 이용하여 케이블 상대변위와 절점증분력을 나타낸다. 이 식은 앞절에서 유도한 트러스-케이블요소의 증분방정식 (9)와 유사한 탄성현수선요소의 증분방정식을 얻을 수 있다. 자세한 결과식은 김 등 (2003)을 참조할 수 있다.

### 3. 보-기둥요소

주탑과 보강형을 모델링하기 위해 일반적으로 3차원 보-기둥요소를 사용한다. 그림 3은 보-기둥요소의 절점변위와 부재력벡터를 나타낸다. 보-기둥요소의 전체 포텐셜에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E + \Pi_G - \Pi_{ext} \quad (12)$$

여기서  $\Pi_E$ ,  $\Pi_G$ 와  $\Pi_{ext}$ 는 각각 선형탄성에너지와 증분 부재력에 의한 비선형 탄성에너지, 그리고 외력에 의한 포텐셜 에너지를 나타낸다.

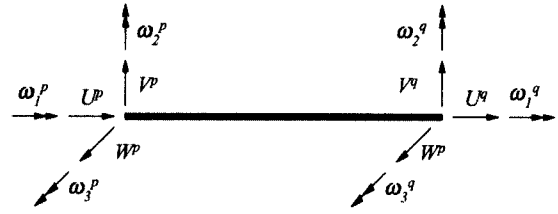


그림 3.(a) 보-기둥요소의 변위 벡터

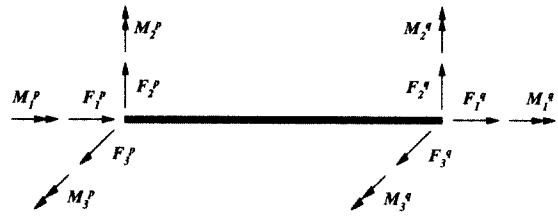


그림 3.(b) 보-기둥요소의 부재력 벡터

보-기둥요소를 유한요소로 나누어 요소의 변위장은 요소변위벡터에 관한 Hermitian 다항식으로 나타낸다. 이때 축방향 변위 및 비틀회전각에 대해서는 1차, 두 직각방향의 횡변위에 대해서는 3차 Hermitian 다항식을 각각 사용하여 탄성 및 기하학적 강성행렬을 유도한다. 여기서 유도된 다항식들을 이용하여 증분평형방정식을 얻는다.

보-기둥요소의 부재력 산정시 Updated Lagrangian co-rotational formulation에 근거한 반복계산에서 총부재력은 이전 단계에서 부재력에 증분부재력을 더하여 구한다.(김과 안 등, 1997; 김 등, 2003)

### 4. 현수교의 초기형상 해석법

현수교는 사장교와는 달리 주케이블과 행어, 주탑 및 보강형으로 이루어져 있으며, 또한 일반 뼈대구조물과는 다르게 주요 구조재로 케이블이 구성되어 있어, 케이블에 막대한 장력이 도입된 후에야 구조적 평형상태에 도달한다. 본 연구에서는 현수교를 모델링할 때 주탑 및 보강형은 보-기둥요소로, 주케이블은 트러스-케이블요소와 탄성현수선 요소, 행어는 케이블요소로 각각 모델링함으로써 초기평형해석을 수행한다. 여기서, 현수교의 초기형상해석이라 함은 완성된 구조계에서 고정하중에 의해 발생하는 보강형의 수직처짐과 휨모멘트, 주탑의 수평변위와 휨모멘트를 최소화하면서 고정하중과 평형을 이룰 수 있는 케이블의 장력과 무응력길이를 결정하는 것을 말한다. 이때 주케이블과 연결되는 행어의 장력은 균등하게 분포되어야 한다. 이와 같이 정의되는 초기형상해석은 일반 기하학적 비선형해석과 유사하지만 통상적인 경계조건에 의한 절점변위 이외에 초기형상가정에 의한 추가적인 절점변위 값이 결정되어 있다는

점에서 큰 차이가 있다.

일반적으로 현수교는 타정식 현수교와 자정식 현수교로 나눌 수 있다. 여기서 타정식 현수교의 경우 주탑 그리고 자정식 현수교는 주탑 및 보강형이 압축력을 받아 변위를 일으킨다. 또한, 현수교를 모델링할 때 케이블의 좌표값은 정해져있지 않다. 따라서, 케이블의 초기좌표값을 어떻게 계산하느냐에 따라 좀더 빠르게 수렴속도를 높일 수 있다. 본 연구에서는 현수교 케이블의 초기 수직좌표값을 결정할 때에 포물선케이블의 처짐형상식을 이용한다.

서론에서 언급한 바와 같이 최근에 개발된 현수교의 초기형상해석법은 초기부재력법과 TCUD법으로 두 가지 방법으로 대별할 수 있다. 본 장에서는 각각의 방법을 간략히 요약하고 장단점을 언급한 후에, 이 두 방법을 결합시킨 효과적인 해석법을 제시한다.

#### 4.1 기하학적 비선형 해석법

본 연구에서는 케이블 장력의 초기값을 얻거나 초기부재력법을 적용하기 위하여, 반복계산시 케이블 부재의 무응력길이가 일정하다는 가정 하에 고정하중을 받는 현수교의 기하학적 비선형 응답해석을 수행할 필요가 있다. 아래 식은 Newton-Raphson 방법에 근거하여 고정하중  $R$  을 일시에 받는 현수교의 기하학적 비선형 해석과정을 나타낸 것이다.

$$\begin{aligned} K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} &= R - F^{(i-1)} \\ U^{(i)} &= U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \end{aligned} \quad (13)$$

$i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{초기조건 : } U^{(0)} &= 0 ; K^{(0)} = K(F) ; \\ F^{(0)} &= 0 \end{aligned}$$

여기서, 첨자  $(i) = (i)$  번째 반복계산 과정;  $K^{(i)} =$  구조물의 접선강성행렬;  $U$  와  $\Delta U =$  구조물의 총 절점변위와 증분 절점변위벡터;  $R =$  외력벡터;  $F =$  부재력으로 인한 절점력벡터;  $F =$  케이블의 초기장력 만으로 구성된 절점력 벡터를 나타낸다.

#### 4.2 초기부재력법

일반적으로 앞 절의 고정하중을 받는 현수교의 기하학적 비선형해석 방법을 적용하는 경우에 타정식 현수교의 경우 보강형, 자정식 현수교의 경우에는 보강형과 주탑이 수평 및 수직 방향의 변위를 수반하기 때문에 설계목적에 부합하는 초기형상

을 찾기 어렵다. 현수교에 적용하는 초기부재력법은 이러한 변위를 최소화하기 위하여 기하학적 비선형해석에 의하여 수렴한 부재력 즉, 케이블 장력, 축력 및 휨모멘트 등을 다시 초기 부재력으로 사용하고, 모든 절점변위는 영으로 취한 상태에서 고정하중의 작용하의 새로운 평형형상을 결정하는 비선형 해석을 재차 수행한다. 이렇게 하여 가정한 초기부재력에 의하여 원하는 초기형상이 찾아질 때까지 비선형해석을 반복하게되며, 이와 같은 과정을 몇 번 반복하면 보강형의 처짐과 보강형 및 주탑의 휨모멘트가 감소하여 완성계의 초기형상 가정에 근접하는 해를 얻을 수 있다. 이 방법은 초기형상에 근접하는 초기 케이블 장력 값을 얻을 수 있어야 정확도를 향상시킬 수 있다. 그리고 축방향 변위를 감소시키기는 용이하지만 휨모멘트로 인한 변형을 감소시키기가 어려운 단점이 있다.

본 연구에서는 초기부재력법을 이용하여 보강형과 주탑의 축방향변형을 감소시키고자 한다. 이 경우의 초기부재력법은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} K^{(i-1)} \Delta U^{(i)} &= R - F^* - F^{(i-1)} \\ U^{(i)} &= U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

$i = 1, 2, \dots ; k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{초기조건 : } U^{(0)} &= 0 ; K^{(0)} = K(F^*) ; \\ F^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, 윗첨자  $k =$  고정하중을 다시 재하하는 횟수;  $F^*$  는  $k-1$  번째 단계에서 수렴된 보강형과 주탑의 축방향력으로 구성되는 절점력벡터이다.

#### 4.3 TCUD 해석법

TCUD 해석법은 케이블지지 구조물에서 절점변위 이외에 케이블의 초기장력이나 무응력길이를 미지수로 추가하고, 케이블 부재 개수만큼 절점변위를 구속하여 Newton-Raphson 반복법을 적용하므로써 케이블의 무응력길이와 장력 등을 효과적으로 결정하는 방법이다. 케이블 및 보-기둥부재의 증분방정식을 이용하고 직접강도법을 적용하면 현수교 전체의 증분평형 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta F = K_t \Delta U + K_l \Delta L_0 \quad (17)$$

여기서,  $\Delta F = n \times 1$  증분외력 또는 불평형하중벡터;  $K_t, K_l =$  각각 구조물의  $n \times n$  접선강성행렬과 무응력길이

에 대응하는  $n \times m$  강성행렬:  $\Delta U, \Delta L_o = n \times 1$  절점변위벡터,  $m \times 1$  무응력길이벡터;  $n =$  절점의 총 수  $\times 6$ ;  $m =$  케이블부재의 개수이다. 윗 식은 조건식에 비하여 미지수가 케이블부재 개수인  $m$  만큼 많으므로 이 숫자만큼 절점변위를 구속할 수 있다. 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\Delta F = K_{1u} \Delta U_u + K_{1s} \Delta U_s + K_l \Delta L_o \quad (18)$$

여기서,  $\Delta U_u, \Delta U_s =$  각각 미지수인  $(n - m) \times 1$  절점변위, 구속되는  $m \times 1$  절점변위벡터를 나타낸다. 따라서 식 (18)에서 세 번째 항은 사라지고, 나머지 두 개의 항은 비대칭 강성행렬을 구성하게 된다.  $m$ 개의 미지수  $L_o$ 에 대응하여,  $m$ 개의 구속조건을 도입하면, 그 부분의 변위는 영이 되며, 이때 각 케이블에 대응하는 미지수  $L_o$ 를 구속조건에 일대일 대응시킨다. 일대일 대응시킨 식을 이용하여 연립방정식을 풀면, 각각의  $p$ 와  $q$ 의 위치와 현재의 길이  $L_o$ 를 결정할 수 있다. 이때 결정된 좌표와 무응력길이를 가지고 Newton-Raphson 방법을 이용하여 각각의 절점력을 구한다.

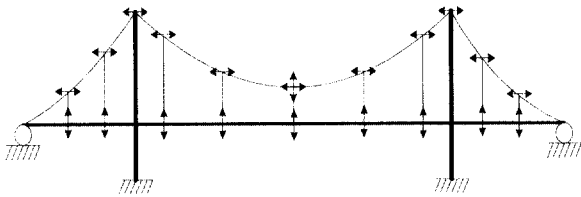


그림 4(a). 자정식 현수교의 기하학적인 구속조건

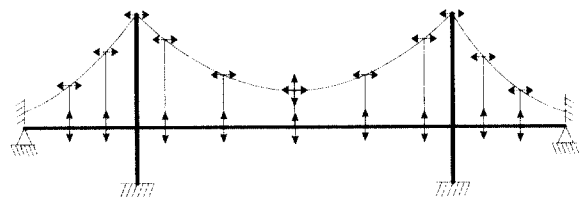


그림 4(b). 타정식 현수교의 기하학적인 구속조건

기존의 초기부재력법은 케이블지지교량을 모델링할 때, 초기 무응력길이를 가정하고 비선형방정식을 사용하여 초기형상을 결정한다. TCUD해석법은 케이블구조물에서 케이블의 초기장력과 무응력길이를 모두 미지수라 가정하므로, 평형방정식의 수보다 미지수의 수가 더 많은 부정방정식이 된다. 따라서 케이블의 요소 개수만큼의 기하학적으로 구속시킨 조건식이 필요하다. 따라서 구조물의 기하학적인 특성을 이용하여 그 미지의 무응력길이와 장력을 Newton-Raphson 방법에 의해 결정할 수 있는 방법이다.

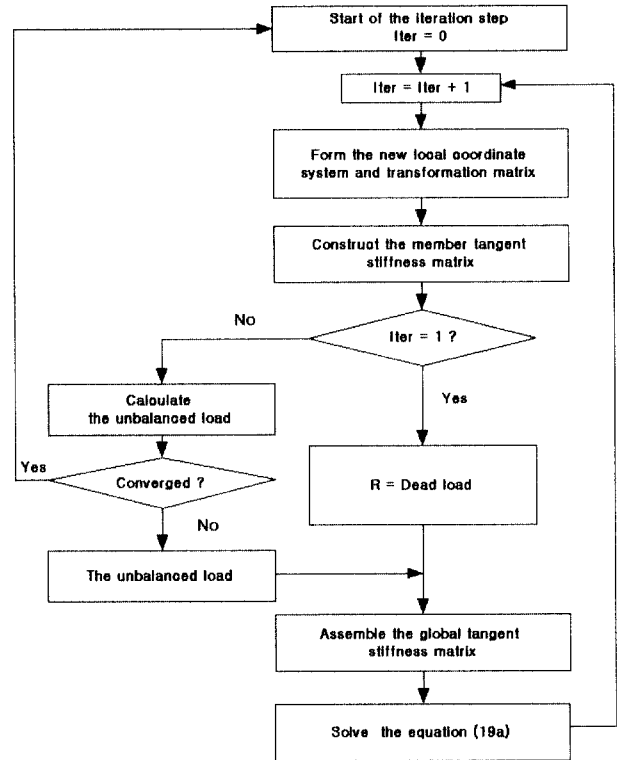


그림 5. TCUD법 알고리즘

이미 언급한 바와 같이 케이블의 개수만큼 미지수가 생기므로 이를 절점변위의 구속조건식으로 나타내야 한다. 그림 4는 케이블부재의 무응력길이를 변수로 추가할 때 이에 대응하는 현수교의 기하학적 구속조건을 표시한 것이다. 현수교의 경우는 일반 사장교와는 다르게 주케이블과 행어로 구성되어 있기 때문에 행어의 경우는 보강형의 수직변위를 제어함으로써 미지조건을 활용할 수 있다. 그리고 주케이블의 경우는 절점의 수평변위와 현수교의 새그가 기하학적 구속조건으로 주어지므로 새그의 위치에서 수직변위를 제어함으로써 미지조건을 충족시킬 수가 있으며, 결과적으로 주탑의 수평변위 및 보강형의 수직변위를 최소화시킬 수 있다.

유한요소 비선형 해석법을 적용하기 위해 절점력의 증분항을 사용하여 케이블요소의 무응력 길이와 절점좌표의 증분항으로 표현한 전체 증분평형방정식을 도출할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_u^{(i-1)} \Delta U_u^{(i)} + K_l^{(i-1)} \Delta L_o^{(i)} &= R - F^{(i-1)} \\ U_u^{(i)} &= U_u^{(i-1)} + \Delta U_u^{(i)} \\ L_o^{(i)} &= L_o^{(i-1)} + \Delta L_o^{(i)} \end{aligned} \quad (19)$$

$$i = 1, 2, \dots$$

$$\text{초기조건 : } U_u^{(0)} = 0 ; K_u^{(0)} = K_u^{(0F)} ;$$

$$F^{(0)} = 0 ; K_1^{(0)} = K_1(^0F) \quad (20)$$

여기서,  $\Delta U_u =$  미지절점 증분변위벡터;  $\Delta L_0 =$  케이블 길이 증분벡터이다. 이때,  $\Delta L_0$ 는 그림 4에서 보듯이 케이블 개수만큼의 제한조건식을 나타낼 수 있는데, 그 구속조건을 도입하면 그 부분에서의 변위는 영이 되므로 위의 증분평형방정식에 케이블의 요소만큼의 미지수가 첨가된다. 일반적인 경계조건은 Penalty Method를 사용하여 구속하였다. 여기서, 케이블 개수만큼의 미지수를  $L_0$ 에 대응하여, 구속조건을 대입하면, 그 부분의 변위는 영이 되며, 이때 각 케이블에 대응하는 미지수  $L_0$ 를 구속조건에 일대일 대응시킨다. 일대일 대응시킨 식을 이용하여 연립방정식을 풀면, 각각의 절점단부에서의 위치와 현재의 길이  $L_0$ 를 결정할 수 있다. 이때 결정된 좌표와 무응력길이를 가지고 Newton-Raphson 방법을 이용하여 각각의 절점력을 구한다.

#### 4.4 초기부재력법과 TCUD 법의 결합법

본 연구에서는 현수교의 정확한 초기형상을 결정하기 위하여 초기부재력법과 TCUD법을 효과적으로 결합시킨 개선된 해석방법을 제시한다.

$$\begin{aligned} {}^kK_u^{(i-1)} \Delta U_u^{(i)} + {}^kK_g^{(i-1)} \Delta L_0^{(i)} \\ = R - {}^kF^* - {}^kF^{(i-1)} \\ U_u^{(i)} = U_u^{(i-1)} + \Delta U_u^{(i)} \\ L_0^{(i)} = L_0^{(i-1)} + \Delta L_0^{(i)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{초기조건 : } U_u^{(0)} = 0 ; K^{(0)} = K(^0F) ; \\ {}^kF^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

이때 초기형상해석시 주케이블요소는 탄성현수선 케이블요소와 트러스 케이블요소를, 행어는 트러스 케이블요소를 이용하여 나타내며, 초기형상을 결정하기 위하여 초기부재력법과 TCUD해석법을 효과적으로 결합시킨 개선된 해석방법을 제시한다. 초기형상결정 알고리즘은 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 먼저 주케이블을 트러스 또는 탄성현수선요소, 행어는 트러스요소, 그리고 보강형과 주탑은 3차원의 보-기둥요소를 사용하여 모델링하고 고정하중하에서 기하학적 선형해석을 수행하여 수렴된 장력값을 초기장력값으로 사용한다. 이때 계산되

는 케이블 장력값이 최종적으로 수렴된 값에 가깝게 되도록 하기 위하여, 케이블 강성은 변동이 없지만 주형 및 주탑의 휨강성은 1/10로 감소시키고 축강성은  $10^{10}$ 배 증가시킨다. 아울러, 중앙경간과 측경간의 주케이블의 수직좌표는 다음과 같이 포물선식으로부터 결정한다. 즉, 중앙경간의 새그위치에서 좌표원점을 취할 때,

$$z = \frac{w_c}{2T} x^2 \quad (23)$$

이다. 여기서,  $T = \frac{w_c L_c^2}{8h_c}$ ;  $w_c =$  중앙경간의 단위길 이당 고정하중;  $L_c =$  중앙경간의 길이;  $h_c =$  새그의 길이이다. 그리고 측경간의 경우는 주케이블의 정착단을 원점으로 취하여 수직좌표는

$$z = \frac{w_s}{2T} x^2 + \left( \frac{h_s}{L_s} - \frac{w_s L_s}{2T} \right) x \quad (24)$$

이다. 여기서,  $T =$  중앙경간의 장력;  $w_s =$  측경간의 고정하중;  $L_s =$  측경간의 길이;  $h_s =$  정착단으로부터 주탑상부까지의 상대적인 높이이다.

2) TCUD법에 근거한 평형반복계산:

i. 케이블의 무응력길이를 변수로 취급하여 케이블 교량 전체의 접선강성행렬을 산정한다. 여기서 접선강성행렬은 비대칭행렬이 된다.

ii. 경계조건 이외에 케이블 개수만큼의 절점변위를 설계자의 초기형상에 가깝게 되도록 추가적으로 절점변위를 구속하여 절점변위 및 무응력길이의 증분을 산정한다.

iii. i 과 ii를 토대로 케이블 부재력과 보강형 및 주탑의 부재력을 산정한다.

iv. 구조물 전체의 증분평형방정식으로부터 부재력과 불평형하중을 산정하고,

v. 수렴이 될 때까지 다시 반복계산을 한다.

3) 초기부재력법 적용: 수렴이 되었을 때 형상은 사장교 및 자정식 현수교는 주탑, 보강형 그리고 타정식 현수교는 주탑이 압축력을 받아 변위를 일으킨다. 이때 축방향변위를 제거하기 위하여 초기부재력법 즉, 보강형, 주탑의 압축력과 케이블장력은 수렴된 값을 가지고 현수교의 주케이블의 수직좌표를 제외한 모든 절점좌표를 처음 위치로 환원시켜서 다시 비선형 반복계산을 수행하면 설계자가 의도하는 초기형상에 가장 근접한 해석결과를 얻을 수 있다.

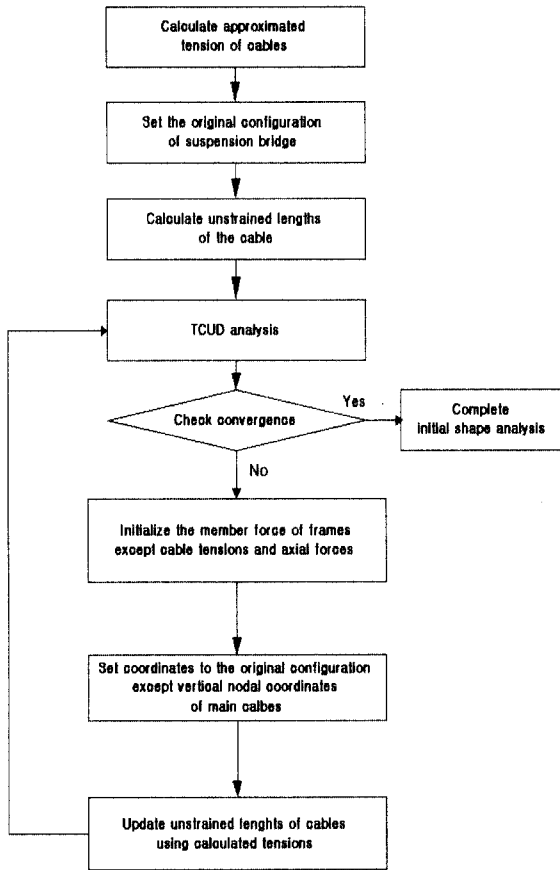


그림 6. 초기부재력법과 TCUD법의 결합

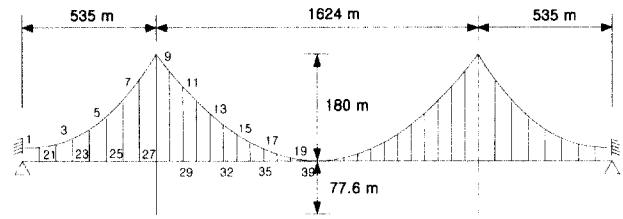


그림 7. 타정식 현수교 모델

표 1. 타정식 현수교 모델의 단면상수 및 물성값

부재	E(Gpa)	A(m <sup>2</sup> )	I(m <sup>4</sup> )	w(KN/m)
Main span cable	210	0.40	-	32.9
Side spans cable	210	0.41	-	33.8
Hanger	210	0.025	-	-
Deck	210	0.5	1.66	72.4
Tower(0-75.5m)	40	37.5	750	882.0
Tower(75.5-136.2m)	40	32.5	275	764.4
Tower(136.2-196.9m)	40	30.0	200	705.6
Tower(196.9-257.6m)	40	25.0	150	588.0

본 연구에서는 두 가지 모델링 방법 즉, 주케이블과 행어를 모두 트러스-케이블요소로, 주케이블은 탄성현수선 케이블요소 그리고 행어는 트러스-케이블요소로 모델링하고 현수교의 초기형상해석을 수행한다. 해석시 사용한 케이블의 초기장력은 표 2에 보이듯이 일반적인 기하학적 선형해석결과를 이용한다. 초기장력은 최종장력과는 적지 않은 차이를 보이고 있다. 또한 주케이블 장력의 수평성분에 대한 본 연구와 Kim & Lee(2001)의 결과가 각각 193.7, 194 MN (표 4 참조)으로 서로 잘 일치함을 알 수 있다. 아울러, 표 2에서 주케이블의 장력분포를 살펴보면 주탑부근에서 상대적으로 더 큰 장력이 발생함을 관찰할 수 있다.

## 5. 수치해석

본 장에서는 앞에서 언급한 초기형상 알고리즘을 검증하기 위해 2차원의 타정식 현수교와 자정식 현수교에 대해 수치해석을 수행한다.

### 5.1 타정식 현수교

본 예제는 Karoumi(1999)의 논문에서 인용된 예제로서, 덴마크에 위치한 그레이트 벨트교(Great Belt Bridge)이다. 그림 7에서 보는 바와 같이, 교량의 형식은 타정식 현수교이고, 중앙경간과 측경간의 길이는 각각 1624m와 535m 이고, 중앙경간의 새그는 180m이다. 교량의 보강형과 주탑은 각각 40개와 8개의 보-기둥요소로 모델링하였으며, 주케이블은 트러스-케이블요소와 탄성현수선요소로, 행어는 트러스-케이블요소로 모델링하였다. 각 지점의 지지조건을 살펴보면, 주탑은 지반에 직접적으로 고정지지되어 있으며, 보강형과 주탑의 교차부분은 롤러로 연결되어 있다. 주케이블은 가운데 부분은 보강형에 직접적으로 고정되어 있다. 교량의 단면상수와 물성값은 표 1에 자세하게 나타나 있다.

표 2. 주케이블의 장력(MN)

Cable No.	Initial Tension	Truss-Cable	Elastic Catenary Cable
1	127.7525	197.6760	197.6789
4	131.6607	203.2325	203.2332
7	136.7833	210.8380	210.8454
10	136.6424	207.8226	207.8239
14	130.6263	199.1732	199.1724
17	127.7051	195.2891	195.2884

일반적으로 행어는 보강형에 정착되는 케이블로서 장력값이 가능하면 균일한 값을 가질 필요가 있다. 뿐만 아니라 보강형에 발생하는 휨모멘트도 균등하게 분포하여야 한다. 한편, 그림 8과 그림 9는 본 연구의 두 모델링 방법을 적용하여 얻은 보강형의 휨모멘트와 행어의 장력분포를 각각 나타낸 것이다.



그림의 결과를 살펴보면, 휨모멘트는 약 27MN·m 그리고 장력은 약 5MN의 균등한 값을 보이고 있다. 이로부터 본 연구의 결과는 초기형상결정시 요구하는 조건들을 잘 충족하고 있음을 알 수 있다. 아울러 두 모델링 방법에 의한 결과값은 서로 거의 일치함을 관찰할 수 있다.

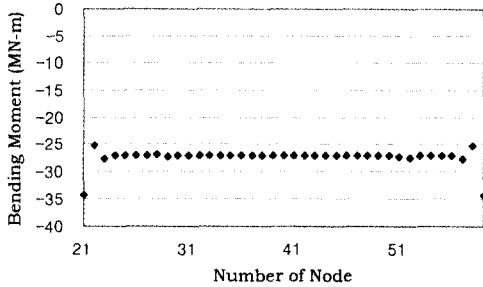


그림 8. 보강형의 휨모멘트

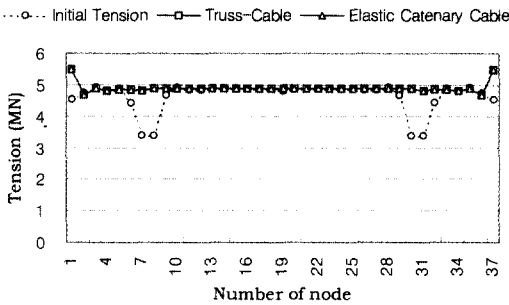


그림 9. 행어의 장력

표 3. 주케이블의 초기 입력좌표와 최종좌표(m)

Node number of the main cable	The initial coordinates	The converged coordinates
1(좌측지점)	0.000	0.000
3	32.430	29.974
7	122.370	119.961
9(주탑상부)	180.000	180.000
12	101.250	101.030
18	11.250	11.198
21(새그지점)	0.001	0.001

현수교의 경우 초기형상결정을 할때 주케이블의 Z축좌표는 처음부터 정해져있지 않다. 따라서, 초기형상을 결정하기 위해 반복계산을 시행할때마다 Z축의 좌표는 계속적으로 변하는 것을 알 수 있다. 표 3은 초기 입력좌표값과 최종좌표값과의 차이를 나타내고 있다. 케이블의 3번 절점좌표값을 보면, 초기 입력좌표값은 최종입력값과 최대 2.456m 차이가 난다. 여기서, 1번 절점과 9번, 21번 절점은 각각 좌측지점과, 주탑상부 그리고 새그의 주케이블의 절점을 나타내고 있다.

마지막으로 그림 10은 두 모델링 방법을 적용하여 얻은 주

탑상부의 축방향변위의 제어과정을 나타내고 있다. 그림은 4 단계의 초기부재력법을 적용한 결과를 굵은 원으로 나타내며, 각 단계내에서 TCUD반복법에 의한 변위값은 마름모로 표시한다. 그림에서 보는 바와 같이 1 단계에서 TCUD법을 적용한 결과는 축방향변위가 두 모델링 방법에 의한 본 연구의 결과는 모두 4cm 이며 (Kim & Lee는 5cm, 표 4 참조), 4 단계의 초기부재력법을 적용한 후에 축방향 변위는 영이 됨을 알 수 있다. 이는 TCUD법 만으로는 주탑의 축방향변위가 발생하지만, 본 연구의 결합된 해석법을 적용하면 주탑의 변위가 거의 영이 되도록 제어할 수 있음을 보여준다.

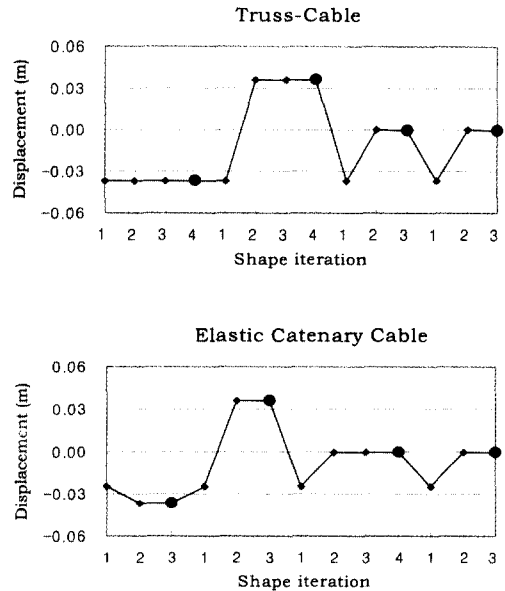


그림 10. 주탑상부에서 축방향변위 수렴도

표 4. 해석모델의 TCUD 해석 결과(Kim & Lee)와 본 연구의 비교

Quantity	This Study	Kim & Lee (2001)
Sag(m)	180	180
Disp. of the Tower top (cm)	X	0
	Y	-4 → 0
Horizontal component of the main cable tension(MN)	193.7	194
Tension at the anchor(MN)	197.68	198

### 5.2 자정식 현수교

본 예제는 기존의 타정식 현수교인 남해대교를 자정식 현수교의 전체계에 맞게 임의로 바꾸었으며, 보강형과 주탑은 각각 54개와 22개의 보-기둥요소로 모델링하였으며, 주케이블은 트러스-케이블요소와 탄성현수선요소로, 행어는 트러스-케이블요소로 모델링하였다. 교량의 물성치는 아래 표 5와 같다. 보

는 바와 같이 모든 물성치는 기존에 설계된 남해대교와 같으며, 다만 보강형의 단면적을 자정식임을 감안하여 기존의 단면적보다 5배 증가시켰다.

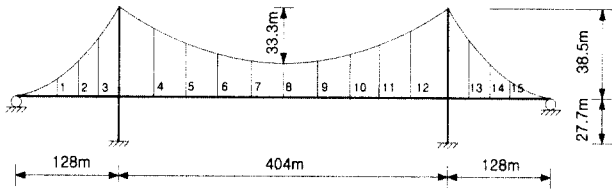


그림 11. 자정식 현수교 모델

표 5. 자정식 현수교 모델의 단면상수 및 물성값

부재	E(KN/m <sup>2</sup> )	A(m <sup>2</sup> )	I22(m <sup>4</sup> )	I33(m <sup>4</sup> )	J(m <sup>4</sup> )	w(KN/m)
Main cable	2.0×10 <sup>8</sup>	0.08356	-	-	-	6.908
Hanger	1.3×10 <sup>8</sup>	0.0417	-	-	-	0.328
Girder	2.1×10 <sup>8</sup>	5	3.2667	0.1316	0.4399	42.35
Tower	2.1×10 <sup>8</sup>	10	50	50	-	500

앞 절의 경우와 마찬가지로 해석시 주케이블을 트러스-케이블요소와 탄성현수선 케이블요소를 이용하여 모델링하는 두 가지 방법을 적용하여 해석결과를 제시하고 비교한다. 먼저, 주케이블의 장력을 표 6에 나타내었는데, 표를 살펴보면, 트러스-케이블요소의 장력과 탄성현수선 케이블요소의 장력값이 거의 0.1% 이내로 일치함을 알 수 있다.

표 6. 주케이블의 장력(MN)

Cable No.	Initial Tension	Truss-Cable	Elastic Catenary Cable
1(맨좌측케이블)	22.149	30.986	30.985
2	22.087	31.410	31.410
3	22.668	31.860	31.860
4(주탑좌측)	22.787	32.374	32.374
5(주탑우측)	30.363	31.583	31.583
6	33.525	31.063	31.062
7	33.138	30.678	30.678
8	30.861	30.417	30.417
9(맨그좌측)	28.909	30.287	30.286

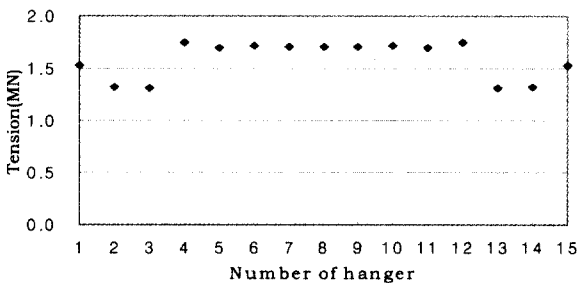


그림 12. 행어의 장력

또한, 자정식 현수교에 작용하는 행어의 장력값이 그림 12에서 보는 바와 같이 중앙경간에서 대체로 1.71MN으로 일정함을 알 수 있다.

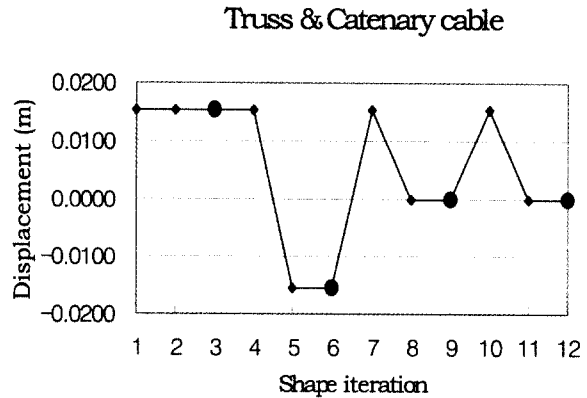


그림 13. 주형의 축방향 변위 수렴도

타정식 현수교와 마찬가지로 자정식 현수교 또한 주케이블의 Z축 좌표는 처음부터 결정되어 있지 않다. 따라서 초기형상을 결정하기 위해 반복계산을 시행할 때마다 Z축의 좌표는 계속적으로 변화하므로, 식 (23), (24)를 이용하여 변화된 좌표를 구할 수 있다.

그림 13은 반복횟수에 따른 주형의 P1지점에서 축방향변위의 변화추이를 보이고 있다. 전 예제와 유사하게 TCUD법을 적용하는 1 단계 해석결과는 P1위치의 축방향변위가 1.53cm이며, 4단계 후에 변위는 영이 된다. 주탑의 경우도 전예제와 유사하게 수렴하지만 변위의 값이 매우 작기 때문에 생략한다. 따라서 본 연구의 초기형상해석법을 적용하는 경우에 최종적으로 주형 및 주탑의 축방향변위는 영으로 제어할 수 있다고 판단된다. 추가하여, 두 모델링에 의한 축방향변위 결과값은 거의 일치한다.

## 6. 결 론

유한요소법을 이용하여 현수교의 초기형상을 정확하게 결정하기 위하여 케이블요소는 탄성현수선 케이블요소와 트러스-케이블요소, 행어는 트러스-케이블요소, 보강형 및 주탑을 모델링하기 위해서는 보-기둥요소를 각각 사용하였다. 본 연구에서는 케이블 부재를 트러스-케이블요소로 모델링하고 고정하중에 의한 기하학적인 선형해석을 수행한 결과를 초기형상의 반복계산시 최초로 도입되는 케이블 장력값으로 사용하였다. 이때 현수교의 초기형상을 결정하기 위하여 초기부재력법과 TCUD법을 효과적으로 결합시킨 개선된 해석방법을 제시하였으며, 이 방법을 이용한 해석결과를 제시하였다. 이 연구를 통

하여 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 첫 번째 단계에서 TCUD법을 적용함으로써 주케이블의 새크크기와 수평좌표에 대한 구속조건을 만족시킬 수 있을 뿐만 아니라, 보강형의 수직처짐, 주탑 상부의 수평변위를 완전히 제어할 수 있다. 따라서 주탑, 보강형부의 휨모멘트를 최소화할 수 있으며, 비교적 균일한 행어 장력값을 얻을 수 있다.
- (2) TCUD법을 적용한 이후에 반복적으로 보강형 및 주탑의 축방향력만을 초기부재력으로 취한 초기부재력법을 적용하여 보강형 및 주탑의 축방향 변위를 만족할 만한 정도로 제어할 수 있다.
- (3) 케이블 부재를 모두 트러스요소로 모델링하는 방법과 주케이블은 탄성현수선 요소, 행어는 트러스요소로 모델링하는 방법을 사용하여 초기형상해석을 수행하고 얻은 결과들을 비교하여 서로 잘 일치함을 알 수 있었다.
- (4) 결과적으로 TCUD법과 초기부재력법의 장점을 효과적으로 결합시킨 본 초기형상 해석법을 사용하여 설계자가 의도하는 가장 적절한 현수교의 초기형상결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학재단의 목적기초사업비(과제번호 : R01-2002-000-00265-0)에 의하여 연구되었기에 이에 깊은 감사를 드립니다.

### 참 고 문 헌

- 김문영, 경용수, 이준석, (2003), 사장교의 개선된 초기형상 해석법, 한국강구조학회 논문집, 4월(예정)
- 김문영, 안성원, (1997), 공간뼈대구조의 기하학적 비선형 유한요소해석, 한국전산구조공학회 논문집, 제10권 제1호, pp.201~211
- 김호경, 장승필, (1997), 초기축력을 도입한 자정식 현수교의 초기형상 결정, 대한토목학회논문집, 제17권 제1-2호, pp.197-205
- 안상섭, (1990), 탄성현수선 케이블요소를 이용한 3차원 케이블망의 정적 및 동적 비선형해석, 석사학위논문, 서울대학교
- Karoumi R. (1999) Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges, *Computer & Structures* Vol.71, pp.397-412
- Kim, Ki-Seok, Lee, Hae-Sung, (2001), Analysis of target configurations under dead loads for cable-supported bridges, *Computer & Structures*, Vol.79, pp.2681~2692
- Kim, Ho-Kyung, Lee, Myeong-Jae, Chang, Sung-Pil, (2002), Nonlinear shape-finding analysis of a self-anchored suspension bridge, *Engineering Structures*, Vol.24 No.12, pp.1547-1559
- Nazmy, Abdel-Ghaffar, (1990), Three-dimensional nonlinear static analysis of cable-stayed bridges, *Computer & Structures* Vol.34 No.2, pp.257-271
- Wang, P. H., Tseng, T. C. Yang, C. G., (1993) Initial Shape of Cable-Stayed Bridges, *Computer & Structures*, Vol.46 No.6, pp.1095-1106
- (접수일자 : 2002. 12. 30 / 심사일 2003. 1. 18 / 심사완료일 2003. 2. 5)