

# 점진적 소성화를 고려한 공간 강뼈대구조의 극한강도해석

## Ultimate Strength Analysis of Space Steel Frames Considering Spread of Plasticity

김 성 보<sup>1)</sup> · 한 재 영<sup>2)</sup> · 박 순 철<sup>3)</sup> · 김 문 영<sup>4)</sup>  
*Kim, Sung Bo Han, Jae Young Park, Soon Cheol Kim, Moon Young*

**요약** : 점진적 소성화를 고려한 공간뼈대구조의 극한강도를 평가하기 위한 비선형 유한요소 해석법을 제시한다. 유한한 회전각의 2차항까지 고려된 개선된 변위장을 도입하여 결과적으로 축력 뿐만 아니라 휨모멘트 그리고 비틀모멘트에 의한 비선형 효과를 모두 고려한다. 탄-소성 해석을 위하여 소성힌지 개념을 도입하고 비선형 해석방법으로 하중 및 변위증분법을 이용한다. 잔류응력 분포에 의거한 초기항복함수를 정의하고 축력 뿐만 아니라 모멘트의 함수로 표현되는 소성영역함수를 사용하여 flow rule과 normality condition을 적용하여 탄-소성 강도매트릭스를 도출한다. 계산시간이 빠른 기존의 소성힌지 해석기법을 사용하는 동시에 소성영역의 진전효과를 효율적으로 나타내었다. 요소의 소성화 진행정도를 나타내는 파라미터를 도입하고 여러 가지 강도감소모델을 사용하여 극한해석을 수행하여 그 결과를 소성영역해석, 쉘요소를 이용한 정밀해석 그리고 실험결과와 비교하였다.

**ABSTRACT** : This paper presents a finite element procedure to estimate the ultimate strength of space frames considering spread of plasticity. The improved displacement field is introduced based on the inclusion of second-order terms of finite rotations. All the non-linear terms due to bending moment, torsional moment, and axial force are precisely considered. The concept of plastic hinges is introduced and the incremental load/displacement method is applied for elasto-plastic analyses. The initial yield surface is defined based on the residual stress, and the full plastification surface is considered under the combined action of axial forces, bending and torsional moments. The elasto-plastic stiffness matrices are derived using the flow rule and the normality condition of the limit function. Finite element solutions for the ultimate strength of space frames are compared with available solutions and experimental results.

**핵심용어** : 유한요소, 극한강도, 공간뼈대, 점진적 소성화, 소성힌지, 소성영역

**KEYWORDS** : Finite element, Ultimate strength, Space frame, Spread of plasticity, Plastic hinge, Plastic region

### 1. 서론

공간 강뼈대구조의 극한해석은 소성영역해석(plastic zone analysis)과 소성힌지해석(plastic hinge analysis)으로 구분될 수 있다. 소성영역해석은 부재단면을 미소한 면적으로 분할하여 각각의 위치에서 탄-소성 해석을 수행하는 방법으로서, 해석의 정밀도는 높으나 계산시간이 너무 많이 소요되기 때문에 일반적으로 널리 사용되지 않는다. 소성힌지해석은 부재 양단에서 소성힌지가 발생하기 전까지 부재는 탄성 거동한다고 가정하여 전체 구조물의 극한강도를 계산하는 방법으로서, 해석

결과가 비교적 정확하며 해석법이 상대적으로 간단해서 널리 사용된다. 그러나 부재 길이방향 또는 단면 내부에서의 비탄성 영역의 진전을 고려하지 못하고 전체 뼈대구조의 극한강도가 과대 평가되는 문제점이 있다. 따라서 공간 강뼈대구조물의 극한 거동 해석에서 단면의 초기항복단계부터 소성힌지 발생단계까지 부재 내부의 소성영역의 진전효과를 고려하고 동시에 계산시간을 줄일 수 있는 효율적 해석방법의 개발이 요구된다.

보-기둥 이론을 이용하여 평면 및 공간뼈대의 접선강도행렬이 Oran(1973)에 의하여 제시된 이후 공간뼈대 구조의 좌굴 및 후좌굴 해석에 관한 연구가 다수 발표되었고(Argyris 등,

1) 정회원, 충북대학교 토목공학과 조교수  
(Tel. 043-261-3241, Fax. 043-275-2377, E-mail:sbkim@chungbuk.ac.kr)  
2) 충북대학교 토목공학과 석사과정(han095@daum.net)  
3) 건희엔지니어링 사원(cionship@yahoo.co.kr)  
4) 정회원, 성균관대학교 토목공학과 교수(kmye@yurim.skku.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2003년 12월 30일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

1979; Batos 등, 1979; Yang 등, 1986; Chen 등, 1991; Chang 등, 1996; 김문영 등, 1990; 김성보 등, 2002) Kim 등(2000)은 박벽 공간뼈대구조 및 변단면을 갖는 공간 보의 좌굴 및 자유진동에 관한 개선이론을 발표하였다. 한편, Argyris 등(1982)은 일반적인 소성인지 이론을 제시하고 대변형을 고려한 뼈대구조물의 극한해석을 수행하였다. Kassimali(1983)는 대변형 및 소성인지 영향을 고려한 뼈대구조물의 유한요소해석이론을 제시하였다. Izzuddin 등(1993)은 소성인지 및 소성영역의 변화를 고려하여 공간뼈대구조물의 탄-소성 유한요소해석을 수행하였고 White 등(1993)은 소성인지 개념에 근거한 뼈대구조의 여러 가지 해석이론을 정리하였다. 최근 들어, 컴퓨터의 급속한 발달과 함께 소성영역의 전파에 따른 강도감소 효과를 고려하는 여러 가지 이론들이 발표되고 있다(Attalla, 1995; Nukala, 1997)

본 논문에서는, 공간 강뼈대구조에 대하여 기하학적인 비선형성 및 재료적인 비탄성이 고려될 수 있는 해석이론 및 해석방법을 제시한다. 유한한 회전각의 2차항을 포함하는 개선된 변위장을 도입하여 공간 강뼈대구조에 대한 전체 포텐셜에너지식을 유도한다. 공간 뼈대구조의 기하학적인 비선형성을 고려하기 위하여, updated Lagrangian co-rotational formulation에 근거하여 탄성 및 기하학적 강도행렬을 유도한다. 요소강도행렬의 유도에서 축력 및 모멘트에 의한 횡변형뿐만 아니라 전단변형효과를 함께 고려하도록 한다. 또한, 축력과 휨모멘트 그리고 비틀림모멘트의 함수로 정의되는 여러 가지 한계함수를 사용하여 탄-소성 유한요소해석을 수행한다. 계산시간이 빠른 기존의 소성인지 해석기법을 사용하는 동시에 소성영역의 진전효과를 효율적으로 나타내기 위하여 요소의 소성화 진행정도를 나타내는 파라미터를 도입하고 여러 가지 강도감소모델을 사용하여 극한해석을 수행하고, 여러 문헌의 결과 및 실험적 연구결과와 비교하여 본 논문의 정당성을 입증한다.

## 2. 공간 뼈대구조의 비선형 해석

### 2.1 공간 뼈대요소의 총포텐셜에너지

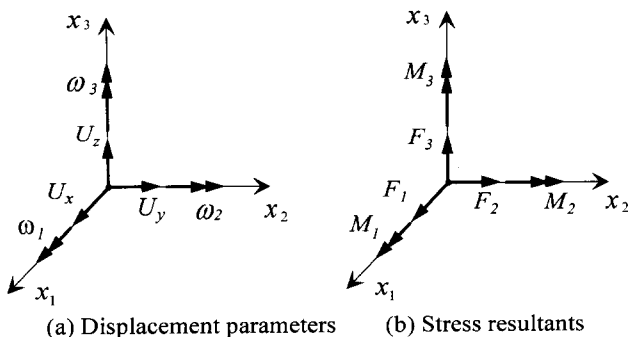


그림 1. Displacement parameters and stress resultants

그림 1은 뼈대요소의 변위장을 정의하기 위하여 도입한 변위파라미터와 단면력들을 보여주고 있다.  $x_1$  축은 단면의 도심을 통과하는 부재축이고  $x_2$ 와  $x_3$  축은  $x_1$  축과 직각을 이루는 단면의 주축이다.  $U_x, U_y, U_z$  과  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  는 각각 단면의 강체이동변위와 회전변위파라미터이다. 유한한 회전각의 2차항까지 포함된 변위장은 다음과 같이 정의할 수 있다 (Kim 등, 2000).

$$U_1 = U_x + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2 + \frac{1}{2} [\omega_1 \omega_2 x_2 + \omega_1 \omega_3 x_3] \quad (1a)$$

$$U_2 = U_y - \omega_1 x_3 + \frac{1}{2} [-(\omega_1^2 + \omega_3^2) x_2 + \omega_2 \omega_3 x_3] \quad (1b)$$

$$U_3 = U_z + \omega_1 x_2 + \frac{1}{2} [\omega_2 \omega_3 x_2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) x_3] \quad (1c)$$

Chang 등(1996)은 3차원 연속체의 Hellinger-Reissner 원리로부터 전단변형효과를 고려하는 경우에 공간뼈대요소의 총포텐셜 에너지식을 다음과 같이 유도하였다.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_L [ EA U_x'^2 + EI_2 \omega_2'^2 + EI_3 \omega_3'^2 + GJ \omega_1'^2 \\ & + \frac{GA}{f_2} (U_y' - \omega_3)^2 + \frac{GA}{f_3} (U_z' + \omega_2)^2 \\ & + 'F_1(U_y'^2 + U_z'^2 + \gamma \omega_1'^2) + 'F_2(2U_z' \omega_1 + \omega_1 \omega_2) \\ & - 'F_3(2U_y' \omega_1 - \omega_1 \omega_3) + 'M_1(\omega_2' \omega_3 - \omega_2 \omega_3') \\ & + 'M_2(\omega_1 \omega_3'^2 - 2U_y' \omega_1' + \omega_1' \omega_3) \\ & - 'M_3(\omega_1 \omega_2'^2 + 2U_z' \omega_1' + \omega_1' \omega_2)] dx_1 - \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{U}_e \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

$$\mathbf{U}_e = \langle u^p, v^p, w^p, \omega_1^p, \omega_2^p, \omega_3^p, u^q, v^q, w^q, \omega_1^q, \omega_2^q, \omega_3^q \rangle^T \quad (3a)$$

$$\mathbf{F}_e = \langle F_1^p, F_2^p, F_3^p, M_1^p, M_2^p, M_3^p, F_1^q, F_2^q, F_3^q, M_1^q, M_2^q, M_3^q \rangle^T \quad (3b)$$

윗 식에서,  $EA, EI_2, EI_3, GJ$ 는 각각 축강성,  $x_2$  및  $x_3$  축에 대한 휨강성 그리고 비틀림강성이다.  $\gamma$ 는  $(I_2 + I_3)/A$ 을 나타내고 ( ' )' 은 괄호 안의 값을  $x_1$  축에 대하여 미분함을 의미한다. 또한,  $F_1, F_2, F_3$ 는 축력과  $x_2$  및  $x_3$  축에 대한 전단력이며  $M_2, M_3$ 는  $x_2$ 와  $x_3$ 축에 대한 휨모멘트, 그리고  $M_1$ 은 비틀림모멘트를 나타낸다. 그리고  $\mathbf{U}_e$ 와  $\mathbf{F}_e$ 은 각각 부재좌표계에서의 부재중분변위벡터 및 부재력중분벡터를 나타내고, ' < ' 는 열벡터 그리고 T는 벡터 전치를 의미한다.

### 2.2 공간 뼈대요소의 접선강도행렬

공간 뼈대요소의 접선강도행렬을 유도하기 위하여, 일반화된 좌표들(  $U_x, U_y, U_z, \omega_1, \omega_2, \omega_3$  )을 요소변위벡터로 나타낼 수 있는 형상함수들을 선택하여야 한다. 본 연구에서 축방향변위(  $U_x$  )와 비틀림각(  $\omega_1$  )은 부재축을 따라 선형 변화한다는 가정을 도입하여 1차 다항식을 사용하고, 휨거동에 의한 횡방향 처짐  $U_y, U_z$  는 3차 다항식을 사용한다. 이때, 단면의 회전각에 대한 형상함수는 전단변형효과를 고려하여 횡방향 처짐과 연계하여 유도된 형상함수를 사용하며 전단변형효과가 고려된 3차 Hermitian 형상함수의 유도과정은 문헌(Chang 등, 1996)을 참조할 수 있고 그 결과식은 다음과 같다.

$$U_y = H_{21} U_y^p + H_{22} \omega_3^p + H_{23} U_y^q + H_{24} \omega_3^q \quad (4a)$$

$$\omega_3 = K_{21} U_y^p + K_{22} \omega_3^p + K_{23} U_y^q + K_{24} \omega_3^q \quad (4b)$$

$$U_z = H_{31} U_z^p - H_{32} \omega_2^p + H_{33} U_z^q - H_{34} \omega_2^q \quad (4c)$$

$$\omega_2 = -K_{31} U_z^p + K_{32} \omega_2^p - K_{33} U_z^q + K_{34} \omega_2^q \quad (4d)$$

여기서

$$\begin{aligned} H_{21} &= [ 2\xi^3 - 3\xi^2 - 12S_2\xi + T_2 ] / T_2 \\ H_{22} &= [ \xi^3 - 2(1+3S_2)\xi^2 + (1+6S_2)\xi ] L / T_2 \\ H_{23} &= [ -2\xi^3 + 3\xi^2 + 12S_2\xi ] / T_2 \\ H_{24} &= [ \xi^3 - (1-6S_2)\xi^2 - 6S_2\xi ] L / T_2 \\ K_{21} &= [ 6\xi^2 - 6\xi ] / (T_2 L) \\ K_{22} &= [ 3\xi^2 - 4(1+3S_2)\xi + T_2 ] / T_2 \\ K_{23} &= [ -6\xi^2 + 6\xi ] / (T_2 L) \\ K_{24} &= [ 3\xi^2 - 2(1-6S_2)\xi ] / T_2 \\ T_2 &= 1 + 12S_2, S_2 = f_{s2} \frac{EI_3}{GAL^2}, \xi = \frac{x_1}{L} \end{aligned}$$

식(4c, d)의 (  $U_z, \omega_2$  ) 에 대한 형상함수(  $H_{3i}, K_{3i}$  )는 식(4b, c)의 (  $U_y, \omega_3$  ) 에 대한 형상함수(  $H_{2i}, K_{2i}$  )에  $S_2$  대신에  $S_3 (= f_{s3} \frac{EI_3}{GAL^2})$  를 대입하여 얻는다.

식(2)를 변분하고 식(4)를 대입하여 요소길이에 따라 적분을 행하면 매트릭스 평형방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$'K_e U_e = 'F_e \quad (5)$$

여기서 ' $K_e$  '는 부재좌표계에서 전단변형효과가 고려된 공간 뼈대요소의 접선강도행렬로서 표 1에 제시되어 있다.

표 1. Tangent stiffness matrix including shear factors  $K_e$

$a_1$	·	·	·	·	·	- $a_1$	·	·	·	·	·	·
	$a$	·	- $e$	$v$	$b$	·	- $a$	·	$f$	- $v$	$b$	·
		$a'$	- $e'$	- $b'$	$v'$	·	·	- $a'$	$f'$	- $b'$	- $v'$	·
			$m$	- $h'$	$h$	·	$e$	$e'$	- $m$	$g'$	- $g$	·
				$c'$	- $x$	·	- $v'$	$b'$	$g'$	$d'$	$w$	·
					$c$	·	- $b$	- $v$	- $g$	- $w$	$d$	·
						$a_1$	·	·	·	·	·	·
							$a$	·	- $f$	$v$	- $b$	·
								$a'$	- $f'$	$b'$	$v'$	·
						Sym		$m$	- $i'$	$i$	·	·
									$c'$	$x$	·	·
										$c$	·	·

$$\begin{aligned} a_1 &= EA/L, \\ a &= 12 EI_3 / (T_2 L^3) + 12 F_1^p (12S_2^2 + 2S_2 + 0.1) / (T_2^2 L), \\ b &= 6 EI_3 / (T_2 L^2) + 0.1 F_1^p / T_2^2, \\ c &= 4(1+3S_2) EI_3 / (T_2 L) + 4 F_1^p L (3S_2^2 + 0.5S_2 + 1/30) / T_2^2, \\ d &= 2(1-6S_2) EI_3 / (T_2 L) - 2 F_1^p L (6S_2^2 + S_2 + 1/60) / T_2^2, \\ e &= -M_2^p / L, f = M_2^q / L, g = -(M_2^p + M_2^q) / 6, \\ h &= (2M_2^p - M_2^q) / 6, i = -(M_2^p - 2M_2^q) / 6, \\ m &= GJ/L + F_1^p (I_2 + I_3) / (AL), v = M_1^q / (T_2 L), \\ w &= M_1^q (1 - 144S_2 S_3) / (2T_2 T_3), x = 6 M_1^q (S_2 - S_3) / (T_2 T_3) \\ T_2 &= 1 + 12S_2, S_2 = f_{s2} \frac{EI_3}{GAL^2} \end{aligned}$$

표 1 에서 (  $a', b', c', d', e', f', g', h', i', v'$  ) 은 (  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, v$  ) 의 (  $I_3, f_{s2}, S_2, T_2, M_2$  ) 를 (  $I_2, f_{s3}, S_3, T_3, M_3$  ) 으로 대체시킴으로써 얻을 수 있다.

### 2.3 공간 뼈대구조의 불평형하중 산정

구조물의 비선형 해석 시 증분형식의 반복계산법을 적용하여야 하며, 이러한 계산에서 변형된 상태에 대응하는 부재력증분을 정확히 산정하는 것이 매우 중요하다. 이를 위하여 updated Lagrangian co-rotational formulation에서는 구조물 평형방정식으로부터 산정하는 부재의 증분변위  $U_e$  를 강체변위(rigid body displacement)  $U_r$  와 순수변형성분(pure



표 2 에서 (  $g', h', i', m', n', o'$  )은 (  $g, h, i, m, n, o$  )의 (  $M_2^p, M_2^q$  )를 (  $M_3^p, M_3^q$  )로 대체시킴으로써 얻을 수 있다.

공간 뼈대요소의 증분평형방정식을 전체좌표계로 좌표변환 시키고 직접강도법을 적용하면 구조물전체의 증분방정식을 얻는다. 전체좌표계에서 증분평형방정식으로부터 증분변위가 구해지면, 각 부재에 대하여 부재력증분을 산정하고 불평형하중을 결정하게 된다. 이때 증분형식의 반복계산법을 사용하는 경우 불평형하중은 다음의 반복계산에서 하중으로 작용한다.

### 3. 점진적 소성화를 고려한 탄-소성 해석

#### 3.1 탄-소성 강도행렬

뼈대 요소의 한쪽 단(p단)에서 소성힌지가 발생한 경우에 탄-소성 강도행렬의 유도과정은 다음과 같다. 부재력 증분벡터와 탄성변형증분벡터의 관계는 다음과 같다.

$$F_d = K_e U_{el} = K_e (U_d - U_{pl}) \quad (13)$$

여기서  $F_d$ 는 부재력 증분벡터,  $U_{el}$ 는 탄성변형증분벡터,  $U_d$ 는 총 변형증분벡터이고  $U_{pl}$ 는 소성변형증분벡터이다. 또한  $K_e$ 는 식(10a)의  $K_{td}$ 에서 기하강도행렬로부터 유도되는 항들을 무시하고 탄성강도행렬에 의한 항들만 고려하여 얻을 수 있다.

한편, 소성변형증분벡터의 방향은 한계함수면(limit function surface)에 수직하고 부재력 증분벡터와 직교함을 가정하면 다음의 식이 성립한다.

$$U_{pl} = \lambda G_p \quad (14a)$$

$$U_{pl}^T \cdot F_d = \lambda G_p^T \cdot F_d = 0 \quad (14b)$$

윗 식에서 p단에서의 한계함수의 gradient 벡터  $G_p$ 는 한계함수를 요소단부(p단)의 단면력 성분들로 편미분하여 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$G_p = \left\langle \frac{\partial \Phi^p}{\partial F_{d1}}, \frac{\partial \Phi^p}{\partial F_{d2}}, \dots, \frac{\partial \Phi^p}{\partial F_{dn}} \right\rangle^T \quad (15)$$

$$= \left\langle \frac{\partial \Phi^p}{\partial F_1}, \frac{\partial \Phi^p}{\partial M_3^p}, 0, \frac{\partial \Phi^p}{\partial M_2^p}, 0, \frac{\partial \Phi^p}{\partial M_1} \right\rangle^T$$

윗 식의 양변에  $G_p^T$ 를 곱하고 식(14b)의 normality 조건식을 고려하면 다음과 같이 소성 변형 벡터성분들의 크기를 결정하는 비례상수( $\lambda$ )를 구할 수 있다.

$$\lambda = (G_p^T K_e G_p)^{-1} G_p^T K_e d U_d \quad (16)$$

여기서 구한  $\lambda$ 를 식(14a) 및 (13)에 대입하면 부재력 증분벡터와 변형증분벡터의 관계를 얻고 이로부터 탄-소성 강도행렬을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_d = K_{ep} \cdot U_d \quad (17)$$

여기서

$$K_{ep} = K_e - K_e G_p (G_p^T K_e G_p)^{-1} G_p^T K_e \quad (18)$$

#### 3.2 잔류응력을 고려한 초기항복합수 및 한계함수

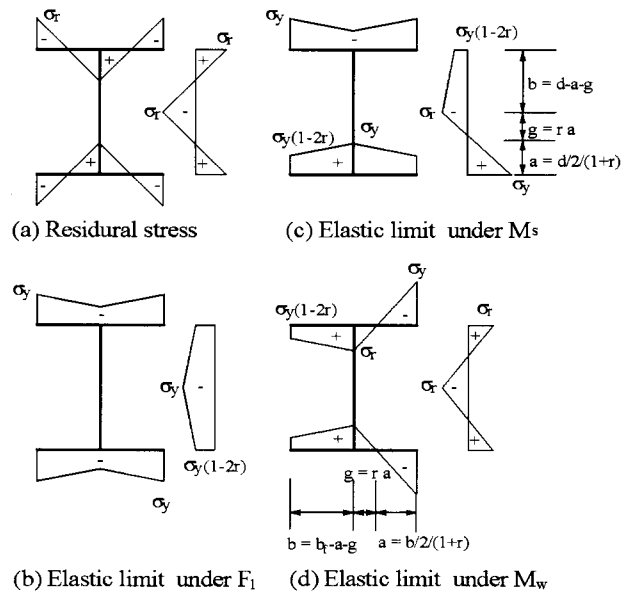


그림 2. Residual stress and stress distribution at elastic limit

압연 형강의 제작 과정에서 발생하는 잔류응력의 분포는 그림 2(a)에 나타나 있다.  $\sigma_r$ 은 잔류응력의 최대값으로서 I-형 단면의 총 높이 ( $d$ )와 플랜지폭 ( $b_f$ )과의 비에 따라 다음의 값을 갖는다(White 등, 1993).

$$\sigma_r = r \sigma_y, \quad \begin{cases} r=0.5 & (\text{for } \frac{d}{b_f} \leq 1.2) \\ r=0.3 & (\text{for } \frac{d}{b_f} > 1.2) \end{cases} \quad (19)$$

이와 같은 잔류응력 분포를 가정하면 그림 2(b)-(d)와 같이, 압연 I-형강 단면의 최외측이 항복응력에 도달하는 탄성한계점에 대응하는 단면력들을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{1y} &= \sigma_y A (1 - r) \\ M_{sy} &= \sigma_y b_f d t_f (1 - r) + \sigma_y d^2 t_w \frac{4 + 4r - 4r^2 - 5r^3}{24(1+r)^2} \\ M_{wy} &= \sigma_y b_f^2 t_f \frac{1-r}{3} \end{aligned} \quad (20a-c)$$

여기서,  $F_{1y}$ 는 잔류응력을 갖는 압연 I-형강이 축력에 의하여 단면의 최외측이 항복응력에 도달할 때의 축력,  $M_{sy}$ 는 강축에 대하여 작용하는 휨모멘트에 의하여 단면의 최외측이 항복응력에 도달할 때 휨모멘트,  $M_{wy}$ 는 약축에 대하여 작용하는 휨모멘트에 의하여 단면의 최외측이 항복응력에 도달할 때 휨모멘트이다. 또한, 단면의 모든 부분이 항복되었을 때의 단면력 성분들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_{1p} &= \sigma_y A \\ M_{sp} &= \sigma_y b_f d t_f + \sigma_y t_w (0.5h - t_f)^2 \\ M_{wp} &= \sigma_y b_f^2 \frac{t_f}{2} \end{aligned} \quad (21a-c)$$

여기서,  $F_{1p}$ ,  $M_{sp}$ ,  $M_{wp}$ 는 각각 소성 축방향력(plastic axial force)과 강축, 약축에 대한 소성모멘트(plastic moment)를 나타낸다.

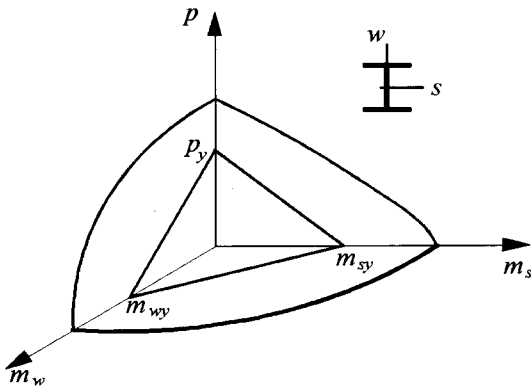


그림 3. Initial yield surface and limit surface

식(20) 및 식(21)과 같이 항복이 시작되는 단면력과 소성축력, 소성모멘트 성분 등이 계산되면 그림 3에 도시된 초기항복평면을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$m_{wy} m_{sy} p + p_y m_{sy} m_w + p_y m_{wy} m_s = m_{wy} m_{sy} p_y \quad (22)$$

여기서,

$$p_y = F_{1y}/F_{1p}, \quad m_{sy} = M_{sy}/M_{sp}, \quad m_{wy} = M_{wy}/M_{wp}$$

한편, 완전소성영역을 결정하는 한계함수(limit function)는 부재단면의 형상과 중립축의 위치가 정의되면 엄밀히 유도될 수 있으나 수치해석에서 적용하기는 어려운 단점이 있다(Chen 등, 1977). 따라서 유한요소해석에 효율적으로 적용되는 한계함수는 단면력 성분들의 함수로 표현되는 단일식이 많이 사용된다(Argyris 등, 1982; Shi 등, 1988; Orbison 등, 1982). 단일식으로 표현되는 가장 간단한 한계함수는 다음과 같은 한계함수이다.

$$\Phi = p^2 + m_s^2 + m_w^2 + m_1^2 - 1 = 0 \quad (23)$$

여기서

$$\begin{aligned} p &= F_1/F_{1p}, \quad m_s = M_s/M_{sp}, \quad m_w = M_w/M_{wp}, \\ m_1 &= M_1/M_{1p} \end{aligned}$$

식 (23)의 한계함수는 형태가 간단하고 한계함수로서 convexity 조건을 만족시키므로 널리 사용되어 왔다. 그러나 문헌(Attalla 등, 1995; Duan 등, 1990)에 의하면, 완전소성 영역을 결정하는 한계함수들은 식 (23)과 같이 완전 구형이 아니라, 그림 3과 같이 축력과 약축모멘트면에서는 원형, 축력과 강축면에서는 직선과 같이 표현된다. Duan 등(1990)은 이러한 한계함수의 특성을 고려할 수 있는 함수를 다음과 같이 발표하였다.

$$\Phi = \left( \frac{m_s}{1-p^{\beta_s}} \right)^{\alpha_s} + \left( \frac{m_w}{1-p^{\beta_s}} \right)^{\alpha_s} - 1 = 0 \quad (24)$$

여기서  $p$ ,  $m_s$ ,  $m_w$ 는 각각 정규화된 축력, 강축 그리고 약축에 대한 휨모멘트이고  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ 는 단면의 형상에 따라 다음과 같은 값을 갖는다.

- 1) 구형 단면
 
$$\alpha_x = \alpha_y = 1.7 + 1.3p, \quad \beta_x = \beta_y = 2$$
- 2) I-형 단면
 
$$\alpha_x = 2, \quad \alpha_y = 1.2 + 2p$$

$$\beta_x = 1.3, \quad \beta_y = 2 + 1.2A_w/A_f$$
- 3) 박벽 원형 단면
 
$$\alpha_x = \alpha_y = 2, \quad \beta_x = \beta_y = 1.75$$
- 4) 상자형 단면

$$\alpha_x = \alpha_y = 1.7 + 1.5\beta$$

$$\beta_x = \beta_y = 2 - 0.5B \geq 1.3$$

윗 식에서  $A_w$ ,  $A_f$ ,  $B$ 는 각각 I-형 단면의 복부면적, 플랜지 면적 그리고 상자형 단면의 폭높이 비이다.

### 3.3 점진적 소성화를 고려한 강도감소 모델

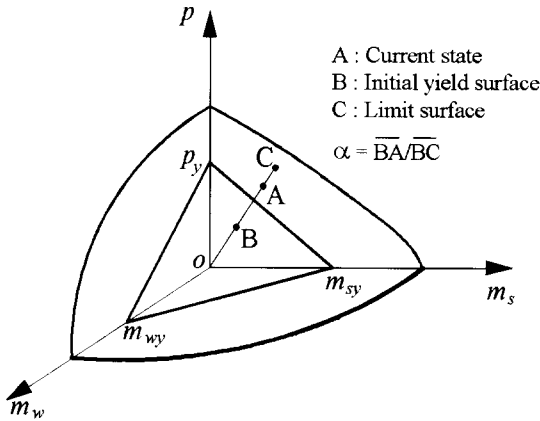


그림 4. Reduced stiffness model

그림 4는 초기항복평면과 한계함수면 그리고 정규화된 단면력상태를 나타내고 있다. 점 A( $p_0$ ,  $m_{w0}$ ,  $m_{s0}$ )는 현재의 정규화된 단면력의 좌표이고, 점 B( $p^*$ ,  $m_w^*$ ,  $m_s^*$ )는 직선 OA와 초기항복평면과의 교점이며 점 C( $\hat{p}$ ,  $\hat{m}_w$ ,  $\hat{m}_s$ )는 직선 OA와 한계함수면과의 교점이다. 현재의 정규화된 단면력성분들은 식(25)와 같고 B점의 좌표는 초기항복평면의 식(22)으로부터 식(26)과 같이 얻어진다.

$$p_0 = \frac{F_1}{F_{1p}}, m_{u0} = \frac{M_w}{M_{wp}}, m_{s0} = \frac{M_s}{M_{sp}} \quad (25a-c)$$

$$p^* = p_0 d_1, m_w^* = m_{u0} d_1, m_s^* = m_{s0} d_1 \quad (26a-c)$$

$$d_1 = \frac{m_{wy} m_{sy} p_y}{m_{wy} m_{sy} p_0 + p_y m_{sy} m_{u0} + p_y m_{wy} m_{s0}} \quad (26d)$$

또한, 한계함수가 식(23)과 같이 원형일 때, 점 C의 좌표는 다음과 같다.

$$\hat{p} = \frac{p_0}{d_2}, \hat{m}_w = \frac{m_{u0}}{d_2}, \hat{m}_s = \frac{m_{s0}}{d_2} \quad (27)$$

$$d_2 = \sqrt{p_0^2 + m_{s0}^2 + m_{w0}^2}$$

현재의 단면력 성분들이 초기항복평면과 한계함수면 사이에 존재할 때, 부재 길이방향 및 단면 내부로 점진적 항복이 진행된다. 소성영역해석에서는 이와 같은 강도 감소효과를 엄밀히 계산할 수 있으나 계산시간이 너무 많이 소요되어 비경제적이다. 따라서 본 연구에서는 다음과 같은 강도 감소모델을 설정하고 이에 따른 비선형해석을 수행하여 기존의 연구결과 및 실험결과와 비교한다.

1)  $\overline{OA} \leq \overline{OB}$  인 경우 : 점선탄성계수는 초기 탄성계수와 동일하다.

$$E_t = E \quad (28)$$

2)  $\overline{OA} > \overline{OB}$  인 경우 : 다음의 세 가지 함수를 사용하여 점선탄성계수를 감소시킨다.

$$\frac{E_t}{E} = (\beta - 1)\alpha + 1 \quad (29a)$$

$$\frac{E_t}{E} = (\beta - 1)\alpha^n + 1 \quad (29b)$$

$$\frac{E_t}{E} = (1 - \beta)(1 - \alpha)^n + \beta \quad (29c)$$

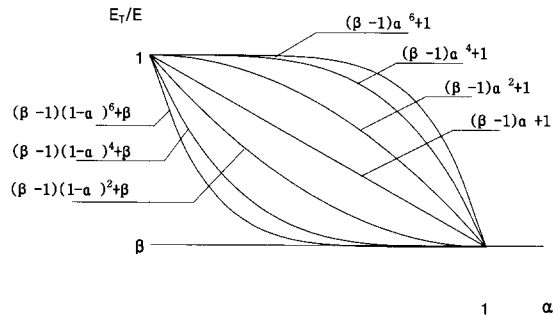


그림 5. Stiffness decrease function

여기서  $\alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ 로서 요소의 소성화 진행정도를 나타내는 파라미터이고  $\beta$ 는  $\alpha = 1$  일 때의 점선탄성계수를 결정하는 파라미터이다. 위의 세가지 감소함수를  $\alpha$ 의 차수에 따라 그림 5에 나타내었다.

## 4. 수치 해석 예

### 4.1 Vogel 직각 뼈대 구조

그림 6에 양단 고정단인 Vogel(1985)의 문형 라멘이 도시되어 있고, 본 연구에서 제시한 뼈대요소를 사용하여 극한해석을

수행하여 그 결과를 ABAQUS(1994)의 쉘 요소를 이용한 해석 결과와 비교하였다. 뼈대모델에서는 기둥과 보를 각각 4개의 요소로 이산화하였고 쉘 모델에서는 플랜지와 복부를 각각 8개의 4절점 쉘요소(S4R5)를 사용하여 해석 모델을 작성하였다. 기둥과 보의 접합부에 강결효과를 발생시키기 위하여 X-형태의 보강재를 배치하였고 수평 및 수직하중은 그림 7(b)와 같이 단면에 등분포로 나누어 재하하였다. 또한, 그림 2(a)와 같은 잔류응력을 ABAQUS에서 제공되는 \*INITIAL CONDITION 을 이용하여 도입하였다. 기둥과 보에 대한 단면 재원은 표 3에 나타나있으며 여기서,  $d$ 는 I-단면의 총 높이,  $bf$ 는 플랜지의 폭,  $t_w$ 는 복부의 두께,  $t_f$ 는 플랜지의 두께,  $Z$ 는 소성단면계수이다. 모든 부재의 항복응력은  $23.5 \text{ kN/cm}^2$ 이고 탄성계수는  $20500 \text{ kN/cm}^2$ , 포아송비는 0.3이다. 잔류응력의 분포는 그림 2(a)와 같고 최대 잔류응력은 항복응력의 1/2 값을 사용하였다. 기둥의 초기 처짐 효과는 해석모델의 절점좌표값을 조정하여 고려하였다.

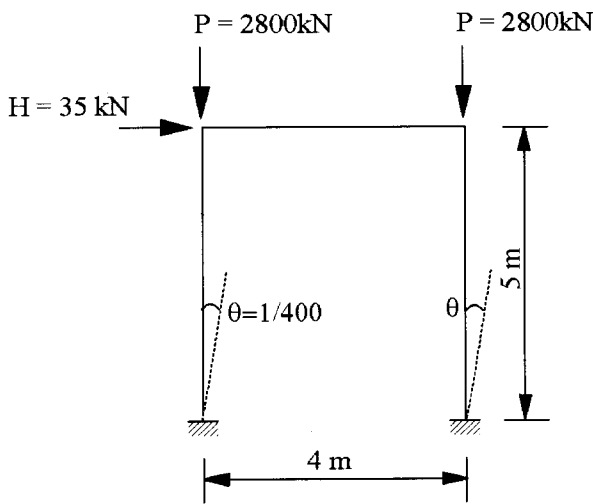
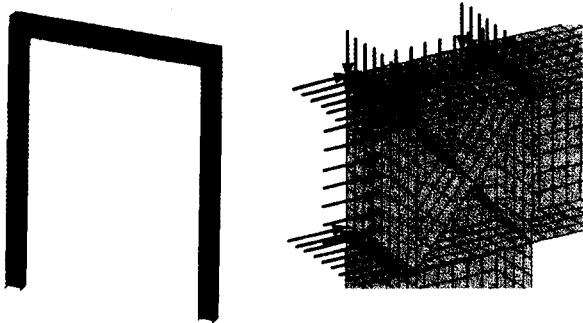


그림 6. Vogel 직각 프레임



(a) Finite Element Mesh

(b) Rigid joint

그림 7. ABAQUS shell model

표 3. Sectional properties of Vogel frame

Member	d (cm)	$b_f$ (cm)	$t_w$ (cm)	$t_f$ (cm)	A ( $\text{cm}^2$ )	I ( $\text{cm}^4$ )	Z ( $\text{cm}^3$ )
Beam	33	30	0.95	1.65	133	27690	1850
Column	30	30	1.1	1.9	149	25170	1869

그림 8, 9, 10은 각각 한계함수로서 식(24)와 같은 Duan의 한계함수를 사용하고, 식(29a-c)와 같이 세가지 형태의 접선탄성계수 감소모델을 적용하여 극한 해석을 수행한 결과를 ABAQUS의 쉘모델에 의한 결과 및 Vogel의 소성영역해석 결과와 비교한 그림이다. 기존의 소성힌지해석(이점쇄선)에 의하면 하중파라미터가 1.15에 도달할 때까지 점진적 소성화에 따른 강도감소 효과를 고려하지 못하고 있으나, 본 연구에서 제시한 해석기법을 사용한 결과는 소성영역의 진전에 의한 강도감소 효과를 보여주고 있다. 그림 8, 9는 강도감소함수로서 식(29a), 식(19b)를 사용하는 경우 감소함수의 차수 ( $n=2,4,6$ )에 따라 극한거동이 크게 차이나지 않음을 보여준다. 하지만 강도감소함수로서 식(29c)를 사용한 그림 10에서 외력의 증가에 따라 구조물의 강도가 점진적으로 저하됨을 확인하였다. 특히 강도감소함수의 차수가  $n=4$ 이고 한계함수면에서 접선탄성계수비가  $\beta = 0.3$ 인 경우 쉘요소를 이용한 정밀해석 및 소성영역해석과 가장 유사한 힘-변위 거동이 계산되었다. 또한, 그림 10(a,b)에서 기존의 소성힌지해석 결과 극한 하중에 대응하는 극한변위는 약 9mm이고 본 논문에서는 변위의 최대값을 20mm로 사용하여 극한 해석을 수행하였기에 load-parameter가 약 1.1에 도달할 때까지 구조물의 강도는 감소하지만 하중 및 변위가 지속적으로 증가하는 것으로 나타났다.

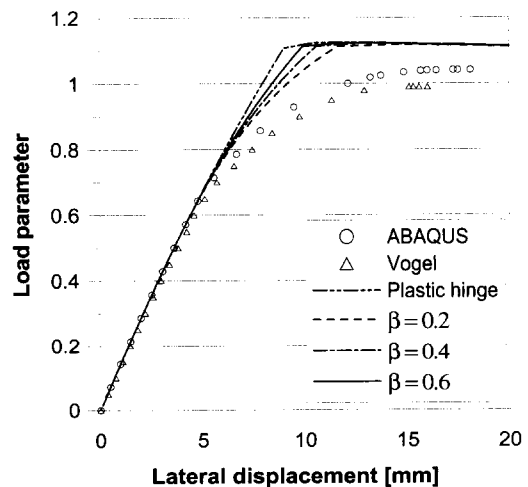
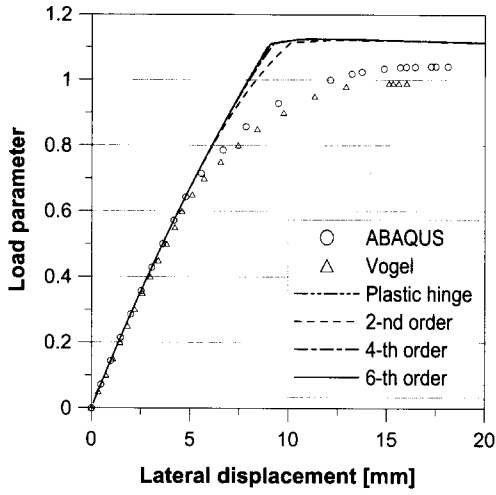
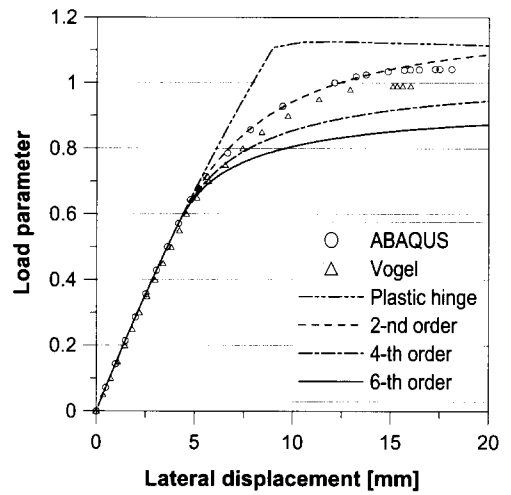


그림 8. Load-deflection curve of Vogel frame (Decrease function 1)

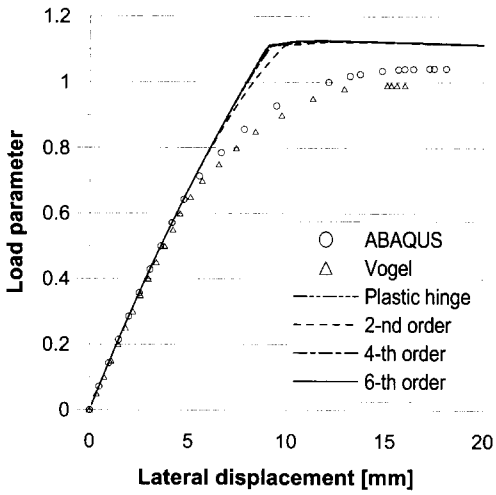




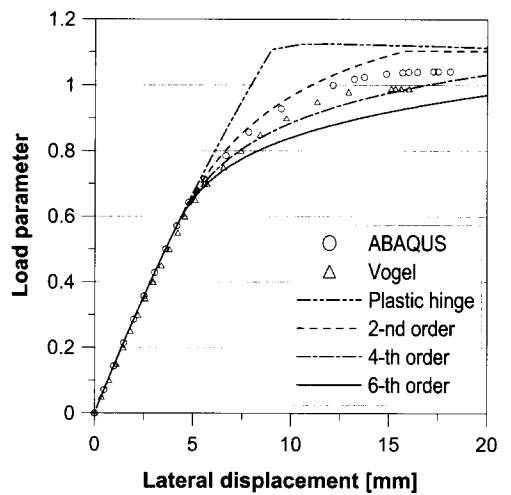
(a) ( $\beta=0.1$ )



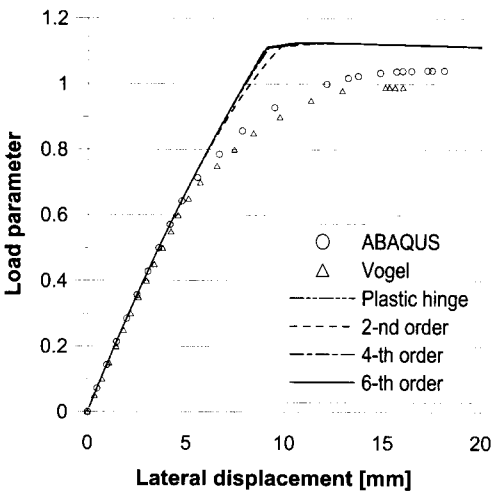
(a) ( $\beta=0.1$ )



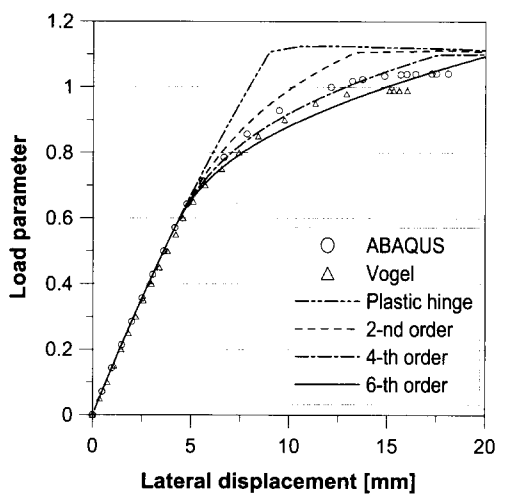
(b) ( $\beta=0.2$ )



(b) ( $\beta=0.2$ )



(c) ( $\beta=0.3$ )



(c) ( $\beta=0.3$ )

그림 9. Load-deflection curve of Vogel frame (Decrease function 2)

그림 10. Load-deflection curve of Vogel frame (Decrease function 3)

### 4.2 공간 뼈대 구조

그림 11에 도시된 축력과 횡하중을 받는 공간 뼈대구조의 극한 거동을 본 연구에서 제시된 해석기법으로 수행하고, 그 결과를 쉘 요소를 이용한 해석 결과 및 실험 결과(Kim 등, 2002)와 비교하였다. 모든 부재는 H150x150x7x10 단면을 사용하였으며 그 재원은 표 4에 나타나 있다. 여기서,  $d$ 는 I-단면의 총 높이,  $b_f$ 는 플랜지의 폭,  $t_w$ 는 복부의 두께,  $t_f$ 는 플랜지의 두께,  $Z$ 는 소성단면계수이다. 부재의 항복응력은 25  $\text{kN/cm}^2$ 이고 탄성계수는 21,200  $\text{kN/cm}^2$ , 포아송비는 0.3이다. 잔류응력의 분포는 그림 2(a)와 같고 최대 잔류응력은 항복응력의 1/2 값을 사용하였다. 기둥 하단부의 유연도는 실험결과치(Kim 등, 2002) 67.322  $\text{kN/cm}$ 의 강성을 갖는 스프링으로 모사하였고 기둥 최상층부의 X축 및 Y축 방향 이동변위는 구속하였다. 또한 표 5와 같이 측정된 초기 처짐 효과는 해석모델의 절점좌표값을 조정하여 고려하였다.

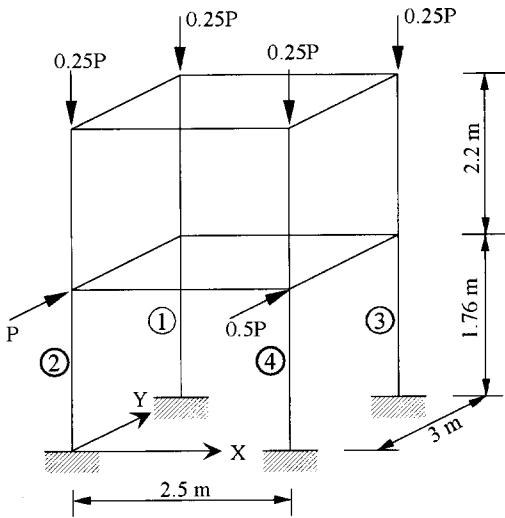


그림 11. Space frame

표 4. Sectional properties of H150x150x7x10

$d$ (cm)	$b_f$ (cm)	$t_w$ (cm)	$t_f$ (cm)	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$I_x$ ( $\text{cm}^4$ )	$I_y$ ( $\text{cm}^4$ )	$Z_x$ ( $\text{cm}^3$ )	$Z_y$ ( $\text{cm}^3$ )
15	15	0.7	1.0	4014	1640	563	240	114

표 5. Measured out-of-plumbness imperfection

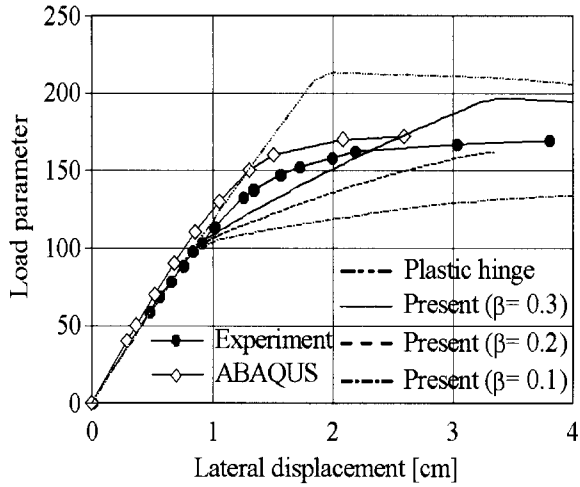
	Column ①		Column ②		Column ③		Column ④	
	X (cm)	Y (cm)	X (cm)	Y (cm)	X (cm)	Y (cm)	X (cm)	Y (cm)
Roof	0.68	-0.51	1.21	-0.25	0.25	-0.15	0.87	0.03
Second floor	0.58	-0.29	0.51	0.02	-0.14	-0.13	0.05	-0.03

그림 12에서 한계함수로서 식(23)과 같은 원형함수를 사용하고, 식(29a-c)와 같이 세가지 형태의 접선탄성계수 감소모델을 적용하여 극한 해석을 수행한 결과를 ABAQUS의 쉘모델에 의한 결과 및 실험결과와(Kim 등, 2002) 비교하였다. 본 예제에서는 한계함수의 종류에 따른 극한거동을 분석하기 위하여 강도함수의 차수는  $n=6$ 을 사용하였다. Vogel의 문형 라멘의 경우와 마찬가지로, 기존의 소성힌지해석(이점쇄선)에 의하면 하중파라미터가 220에 도달할 때까지 힘-변위 관계가 거의 선형에 가깝게 계산되어 점진적 소성화에 따른 강도감소 효과를 고려하지 못하고 있으나, 본 연구에 의한 결과는 하중 파라미터의 증가에 따른 점진적 비선형 거동을 보여주고 있음을 알 수 있다. 하지만, 극한 강도를 실험결과에 비하여 약 15% 정도 과대평가하고 있음을 확인하였다.

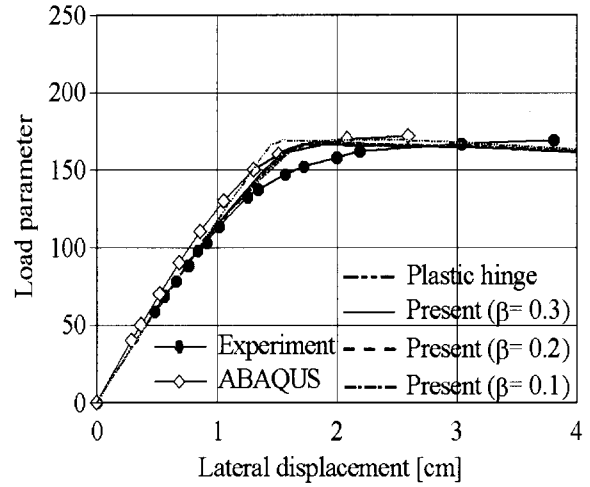
식(24)와 같은 Duan의 한계함수를 사용하고, 식(29a-c)와 같이 세가지 형태의 접선탄성계수 감소모델을 적용하여 극한 해석을 수행한 결과를 그림 13에서 ABAQUS의 쉘모델에 의한 결과 및 실험결과와(Kim 등, 2002) 비교하였다. 기존의 소성힌지해석(이점쇄선)에 의하면 하중파라미터가 170에 도달할 때까지 점진적 소성화에 따른 강도감소 효과를 고려하지 못하고 있으나, 본 연구에 의한 결과는 이와 같은 비선형 효과를 보여주고 있다. 특히, 접선탄성계수의 감소모델로서 식(29b)를 사용한 결과는  $\beta$ 값과는 무관하게 기존의 소성힌지해석과 동일한 힘-변위 관계가 계산되었으며, 강도감소모델로서 식(29c)을 사용하고  $\beta$  값이 0.3인 경우에 극한하중 값이 실험결과와 가장 유사하게 계산되었다.

### 5. 결 론

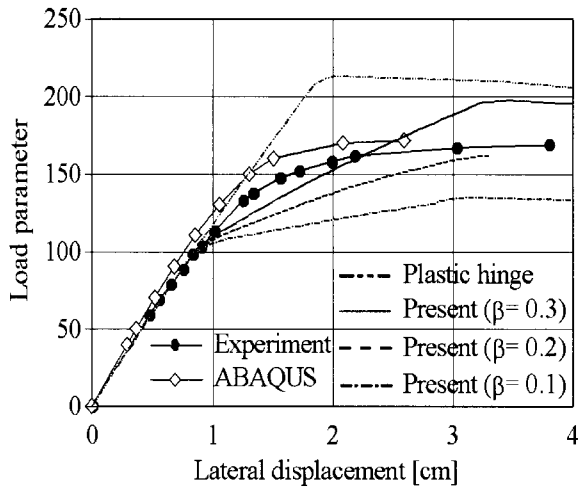
본 논문에서는, 점진적 소성화를 고려한 공간뼈대구조의 소성붕괴 거동을 조사하기 위한 비선형 유한요소 해석법을 제시하였다. 대변형 효과를 고려하기 위하여, 유한한 회전각의 2차 항까지 고려된 개선된 변위장을 도입하여 총포텐셜 에너지식을 유도하였다. 축력뿐만 아니라 휨모멘트 그리고 비틀모멘트에 의한 비선형 성분을 모두 포함하였고 형상함수로서 전단계수가 포함된 3차 Hermitian 다항식을 사용하여 요소강도행렬을 계산하였다. 잔류응력을 가진 부재가 외력의 증가에 따라 점진적으로 항복하는 거동을 효율적으로 나타내기 위한 수치 해석기법을 제시하였다. 뼈대구조물의 극한거동에 대한 예로서 Vogel의 문형 라멘 및 축력과 횡력을 받는 3차원 뼈대구조에 대한 탄-소성 해석을 수행하여 소성영역해석, 쉘요소를 이용한 해석 결과 및 실험 결과와 비교·분석하였다. 해석결과 얻어진 결론은 다음과 같다.



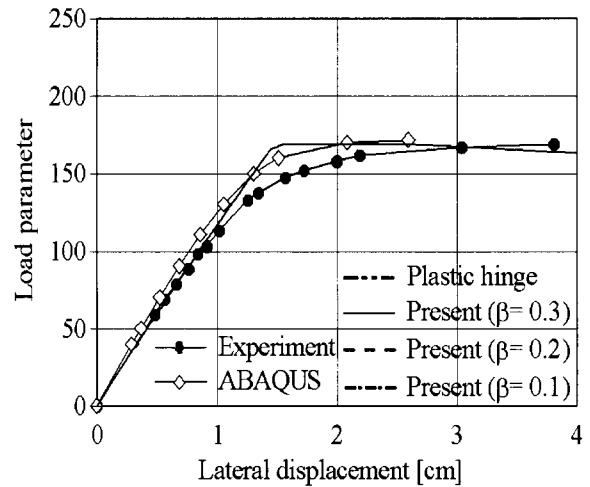
(a) Decrease function 1



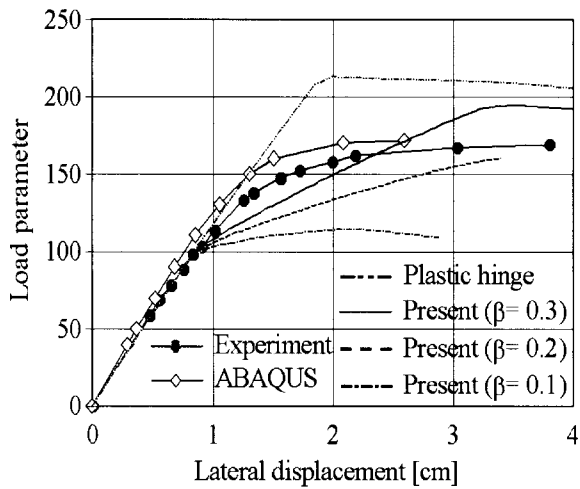
(a) Decrease function 1



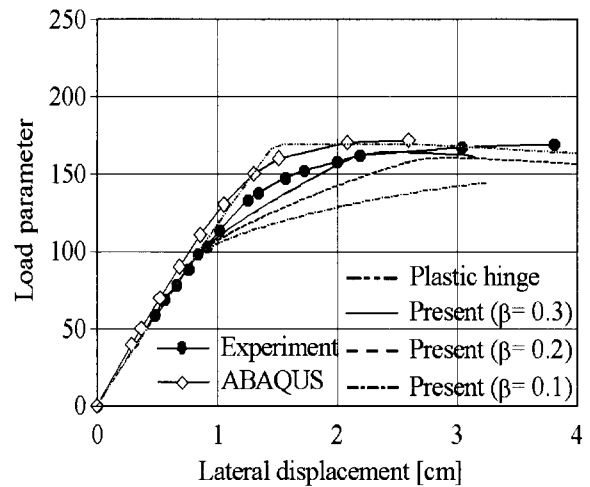
(b) Decrease function 2



(b) Decrease function 2



(c) Decrease function 3



(c) Decrease function 3

그림 12. Load-displacement relation of space frame (circular limit function)

그림 13. Load-displacement relation of space frame (Duan's limit function)

- (1) Vogel의 문형라멘 및 공간 뼈대구조에 대한 기존의 소성힌지해석에 의하면 극한하중에 도달할 때까지 힘-변위 곡선이 거의 선형적으로 얻어져 점진적 소성화에 따른 강도감소 효과를 고려하지 못하고 있으나, 본 연구에서 제시한 해석기법을 사용하면 소성영역의 진전에 의한 강도감소 효과가 표현됨을 확인하였다.
- (2) 강도감소함수로서 식(29a, b)의 함수를 사용한 결과, 본 논문에서 제시한 해석기법을 사용한 힘-변위 관계는 그림 4의 강도감소모델의 차수( $n$ ) 및 완전항복면에서의 접선계수값( $\beta$ )에 크게 영향을 받지 않고 기존의 소성힌지해석과 유사하게 얻어졌다. 또한 식(29c)와 같은 감소모델을 사용한 결과, 감소모델의 차수가 4이고  $\beta = 0.3$  인 경우에 쉘요소를 이용한 해석 결과 및 소성영역해석 결과와 근접한 -외력의 증가에 따라 구조물의 강도가 점진적으로 감소하는 극한 거동이 나타났다.
- (3) 공간 뼈대구조에 대한 극한해석 결과, 한계함수면을 식(23)과 같은 구형의 합계함수를 사용한 해석결과는 실험결과 및 식(24)의 Duan의 한계함수를 사용한 결과보다 극한 하중을 15%정도 과대평가하는 것으로 계산되었다.

### 감사의 글

이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원(KRF-2001-002-E00252)에 의하여 연구되었습니다. 연구비 지원에 깊이 감사드립니다.

### 참고 문헌

김문영, 장승필(1990) 보존력 및 비보존력을 받는 구조물의 기하적 비선형 유한요소해석을 위한 하중 및 변위증분 알고리즘의 개발. 대한토목학회 논문집, 제10권 제2호, pp. 11-22.

김성보, 김문영, 장승필(2002) 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 위한 개선이론. 대한토목학회 논문집, 제 22권 제 2-A호, pp. 189-200.

ABAQUS(1994). User's Manual Vol. I and Vol. II, Ver. 5.4. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.

Attalla, M.R.(1995) *Inelastic Torsional-flexural Behavior and the Three-dimensional Analysis of Steel Frames*. Ph. D. Thesis, Cornell University.

Attalla, M.R., Deierlein, G.G. and McGuire,

W.(1995) Spread of plasticity: Quasi-plastic-hinge approach. *J. Struct. Eng. ASCE*, 120(8), pp. 2451-2473.

Argyris, J.H., Boni, B., Hincleniang, W. and Kleiber, M.(1982) Finite Element Analysis of Two-and Three-Dimensional Elasto-Plastic Frames-The Natural Approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 35, pp. 221-248.

Argyris, J.H., Dunne, P.C. and Scharpf, D.W.(1979) On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 14, pp. 99-135.

Batoz, J.L. and Dhatt, G.(1979) Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *Int. J. Numer. Methods Engineering*, 14, pp. 1262-1267.

Chang, S.P., Kim, S.B., and Kim, M.Y.(1996) Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches. *Journal of Eng. Mechanics*, ASCE, 122, pp. 844-854.

Chen, H. and Blandford, G.E.(1991) Thin-walled space frames. I: large-deformation analysis theory. *J. Struct. Eng. ASCE*, 117(8), pp. 2499-2520.

Chen, W.F. and Atuta, T.(1977) *Theory of beam-columns*, Vol.2, McGraw-Hill, New York.

Duan, L. and Chen, W. F.(1990) A yield surface equation for doubly symmetrical sections. *Engineering and structures*, 12, pp. 114-119.

Izzuddin, B.A. and Elnashai, A.S.(1993) Adaptive Space Frame Analysis Part I: a Plastic Hinge Approach. *Proceedings of the Institution of civil engineers: Structures and Buildings*, pp. 303-316.

Kassimali, A.(1983) Large Deformation Analysis of Elastic-Plastic Frames. *J. Struct. Engrg.* ASCE, 109(8), pp. 1869-1886.

Kim, S.B. and Kim, M.Y.(2000) Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. *Engineering Structures*, 22, pp. 446-458.

Kim, S.E., Lee, D.H.(2002) Second-order Distributed Plasticity Analysis of Space Steel Frames. *Engineering Structures*, 24, pp. 735-744.

- Nukala, P.K.(1997) Three-dimensional Second-order Inelatsic Analysis of Steel Frames. Ph. D. Thesis, Purdue University.
- Oran, C.(1973) Tangent stiffness in space frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 99, pp. 987-1001.
- Orbison, J.G., McGuire, W. and Abel, J.F.(1982) Yield surface applications in nonlinear steel frame analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 33, pp. 557-573.
- Shi, G and Atluri, S. N.(1988) Elasto-plastic large deformation analysis of space-frames: a plastic-hinge and stress-based explicit derivation of tangent stiffness. *Int. J. Numer. Methods Engineering*, 26, pp. 589-615.
- Vogel, U.(1985) Calibrating frames, *Stahlbau*, 54(10), pp. 295-301.
- White, D. and Chen, W.(1993) Plastic hinge based methods for advanced analysis and design of steel frames, Technical report, SSRC.
- Yang, Y.B. and McGuire, W.(1986) Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis. *J. Struct. Engrg.* ASCE, 112(4), pp. 853-877.
- (접수일자 : 2003. 1. 22 / 심사일 2003. 2. 17 / 심사완료일 2003. 6. 7)