

# Mindlin판 특성함수를 이용한 직교이방성 후판의 진동해석

이종문\*

\*\*현대중공업(주) 선박해양연구소

## Vibration Analysis of Thick Orthotropic Plates Using Mindlin Plate Characteristic Functions

JONG-MOON LEE\*

\*\*Hyundai Heavy Industries Co. Ltd., Ulsan, Korea

**KEY WORDS:** Mindlin Plate Characteristic Function Mindlin판 특성함수, Iterative Kantorovich Method 반복적 Kantorovich 방법, Vibration Analysis 진동해석, Orthotropic Thick Plate 직교이방성 후판

**ABSTRACT:** An iterative Kantorovich method is presented for the vibration analysis of rectangular orthotropic thick plates. Mindlin plate characteristic functions are derived in general forms using the Kantorovich method. Initially, Timoshenko beam functions consistent with the boundary conditions of the plate were used. Through numerical calculations of natural pairs of appropriate models, it has been confirmed that the method presented is superior to the Rayleigh-Ritz analysis or the finite element analysis in both accuracy and computational efficiency.

### 1. 서 론

해양구조물 및 선체 등 대형구조체를 구성하는 국부구조에는 보강판, corrugate plate 및 복판패널 등과 같은 직교이방성 후판 유추구조가 많이 있다. 이들은 전단변형 및 회전관성의 효과가 매우 크므로 이들 효과가 합당하게 고려될 수 있는 해석방법이 요구된다. 이들 국부구조에 대한 진동해석의 경우 4변 단순지지를 제외하고는 엄밀해(exact solution)를 구하기가 어려우므로 일반적으로 Mindlin 판 이론에 기초한 근사해법이 많이 사용된다.

Srinivas 등은 단순지지된 직교이방성 후판에 대해 3차원 탄성이론에 의거하여 진동해석을 수행했다(Srinivas and Rao, 1970). Chung 등은 Timoshenko 보합수 성질을 갖는 직교다항식을 도출하고, Rayleigh-Ritz 방법에 의해 4변 탄성구속 직교이방성 Mindlin 판의 진동해석을 수행했다(Chung et al., 1993).

Bhat 등은 Kantorovich 방법의 반복적 적용에 의한 직사각형 박판의 고유진동해석을 검토했고, 또 다양한 수치계산예를 통하여 고차로 갈수록 Rayleigh-Ritz 방법의 경우보다 정확도가 높음을 확인했다(Bhat et al., 1993). Lee 등은 Timoshenko 보합수로부터 출발하는 Kantorovich 방법을 원용하여 Mindlin 판 함수를 도출하고, 이에 기초하여 직사각형 등방성 후판에 대한 고유진동해석 및 동적응답 계산방법을 제시하였으며, 이를 통해 종래의 방법들보다 정확도를 향상시킬 뿐만 아니라 계산

효율도 향상됨을 확인했다(Lee and Kim, 1995).

본 연구에서는 직사각형 보강판 및 복판패널과 같은 직교이방성 Mindlin 판유추 구조체의 고유진동해석을 위하여 Kantorovich 방법을 원용한 직교이방성 Mindlin 판 특성함수를 도출하고, 이에 기초한 고유진동해석을 수행하였다. 정식화, 해법의 타당성 및 정확도 관점에서의 유용성 등은 일련의 수치계산예를 통해 검증되었다.

### 2. 직교이방성 Mindlin판 특성함수 도출

Fig.1(a)에 보인 바와 같이 4변이 탄성구속된 직사각형 직교이방성 후판을 Mindlin 판이론에 의거하여 정식화하기 위한 무차원 파라미터를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \\ D_y &= \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)}, \quad D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12} \\ S_{Dx} &= \frac{K_x h G_{xz} a^2}{D_x}, \quad S_{Dy} = \frac{K_y h G_{yz} b^2}{D_y} \\ K_{Rx1} &= \frac{k_{Rx1} a}{D_x}, \quad K_{Rx2} = \frac{k_{Rx2} a}{D_x}, \quad K_{Ry1} = \frac{k_{Ry1} b}{D_y} \\ K_{Ry2} &= \frac{k_{Ry2} b}{D_y}, \quad K_{Lx1} = \frac{k_{Lx1} a^3}{D_x}, \quad K_{Lx2} = \frac{k_{Lx2} a^3}{D_x} \\ K_{Ly1} &= \frac{k_{Ly1} b^3}{D_y}, \quad K_{Ly2} = \frac{k_{Ly2} b^3}{D_y} \end{aligned} \quad (1)$$

제1저자 이종문 연락처: 울산광역시 동구 전하동 1

052-230-7404 jmllee@hhi.co.kr

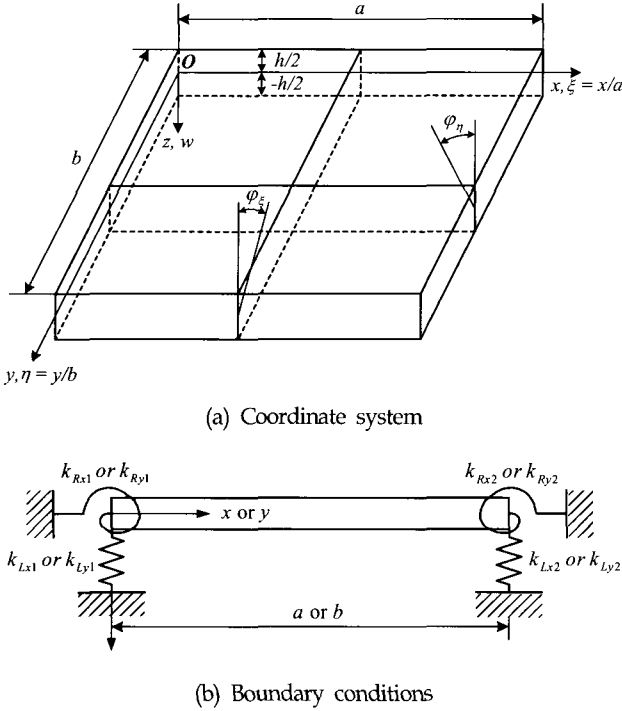


Fig. 1 Coordinate system and boundary conditions of a rectangular Mindlin plate

여기서  $E_x, E_y$  및  $\nu_x, \nu_y$ 는 각각  $x, y$  방향의 인장탄성계수 및 Poisson 비,  $G_{xy}, G_{yz}$  및  $G_{xz}$ 는 차례로  $xy, yz$  및  $xz$  면의 전단탄성계수,  $K_x$  및  $K_y$ 는  $x$  및  $y$  방향의 전단수정계수,  $h$ 는 판두께이다.

$k_{Lx1}, k_{Lx2}$  및  $k_{Rx1}, k_{Rx2}$ 는 각각  $x=0, x=a$ 에서의 병진 및 회전 스프링상수,  $k_{Ly1}, k_{Ly2}$  및  $k_{Ry1}, k_{Ry2}$ 는 각각  $y=0, y=b$ 에서의 병진 및 회전 스프링상수이다.

상기 적교이방성 후판의 변형에너지  $V$ 와 운동에너지  $T$ 의 산식은 다음과 같다(Chung et al., 1993).

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2a} \left[ \int_0^1 \int_0^1 \left\{ D_x \left( \frac{\partial \phi_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + a^2 D_y \left( \frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} \right)^2 \right. \right. \\
 & + a(\nu_y D_x + \nu_x D_y) \frac{\partial \phi_\xi}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_\eta}{\partial \eta} + D_{xy} \left( a \frac{\partial \phi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \phi_\eta}{\partial \xi} \right)^2 \\
 & + \frac{S_{Dx} D_x}{a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} - a \phi_\xi \right)^2 + a^2 \frac{S_{Dy} D_y}{b^2} \\
 & \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} - b \phi_\eta \right)^2 \Big] d\xi d\eta + a^2 D_y \int_0^1 \left( \frac{K_{Ly1}}{b^2} [w|_{\eta=0}]^2 \right. \\
 & + \frac{K_{Ly2}}{b^2} [w|_{\eta=1}]^2 + K_{Ry1} [\phi_\eta|_{\eta=0}]^2 \\
 & + K_{Ry2} [\phi_\eta|_{\eta=1}]^2 \Big] d\xi + D_x \int_0^1 \left( \frac{K_{Lx1}}{a^2} [w|_{\xi=0}]^2 \right. \\
 & + \frac{K_{Lx2}}{a^2} [w|_{\xi=1}]^2 + K_{Rx1} [\phi_\xi|_{\xi=0}]^2 \\
 & \left. + K_{Rx2} [\phi_\xi|_{\xi=1}]^2 \right) d\eta \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{\rho a b}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial \phi_\xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{h^3}{12} \left( \frac{\partial \phi_\eta}{\partial t} \right)^2 \right. \\
 & \left. + h \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} d\xi d\eta \quad (3)
 \end{aligned}$$

여기서  $\phi_\xi(\xi, \eta, t)$ ,  $\phi_\eta(\xi, \eta, t)$  및  $w(\xi, \eta, t)$ 는 차례로 판의  $xz, yz$  면의 굽힘회전각 및 횡방향처짐변위이다.

운동방정식을 얻기 위해 Hamilton 원리

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (4)$$

를 적용한다. 조화운동, 즉

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta, t) &= W(\xi, \eta) e^{i\omega t} \\
 \phi_\xi(\xi, \eta, t) &= \Psi_\xi(\xi, \eta) e^{i\omega t} \\
 \phi_\eta(\xi, \eta, t) &= \Psi_\eta(\xi, \eta) e^{i\omega t} \quad (5)
 \end{aligned}$$

을 가정한다. 진동파형은 Dawe 등이 Mindlin 판에 관한 일련의 연구에서  $\Psi_\xi(\xi, \eta)$ 의  $\eta$ 축방향의 변화는  $W(\xi, \eta)$ 의  $\eta$ 축방향의 변화와 매우 유사하고, 또  $\Psi_\eta(\xi, \eta)$ 의  $\xi$ 축방향의 변화는  $W(\xi, \eta)$ 의  $\xi$ 축방향의 변화와 매우 유사하다고 했다(Dawe and Roufaeil, 1980). 본 연구에서도 이를 수용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned}
 W(\xi, \eta) &= X(\xi) Y(\eta) \\
 \Psi_\xi(\xi, \eta) &= \Phi(\xi) Y(\eta) \\
 \Psi_\eta(\xi, \eta) &= X(\xi) \Theta(\eta) \quad (6)
 \end{aligned}$$

변위장에 대한 변분을 취하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \delta X Y + \delta Y X \\
 \delta \Psi_\xi &= \delta \Phi Y + \delta Y \Phi \\
 \delta \Psi_\eta &= \delta X \Theta + \delta \Theta X \quad (7)
 \end{aligned}$$

먼저 Mindlin 판의 서로 마주보는 두 변과 동일한 경계조건을 갖는 Timoshenko 보합수를 판의  $\eta$ 방향의 진동파형함수  $Y(\eta)$ ,  $\Theta(\eta)$ 라고 가정한다.

$Y(\eta)$ ,  $\Theta(\eta)$ 는 Timoshenko보합수의 일반해와 경계조건으로부터 산정된다. 양단탄성구속된 Timoshenko보에 대한 일반해는 Chung 등의 결과에서 축력과 중간 구속조건을 배제하므로써 얻을 수 있다(Chung et al., 1993).

앞에서 산정한 Timoshenko보합수를 판의  $\eta$ 방향 진동파형함수로 이용하면 그 방향의 변분은  $\delta Y=0 = \delta \Theta$ 이 되고, Hamilton 원리를 적용하면 다음과 같은  $X(\xi)$  및  $\Phi(\xi)$ 에 대한 경계치 문제가 얻어진다.

지배방정식 :

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \Phi}{d\xi^2} + \beta_1 \Phi + \frac{\gamma_1}{a} \frac{dX}{d\xi} &= 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{d^2 X}{d\xi^2} + \frac{\beta_2}{a} X + \gamma_2 \frac{d\Phi}{d\xi} &= 0 \quad (8)
 \end{aligned}$$

경계조건식 :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{d\xi} + a^2 \overline{D_{xy}} \frac{A_2}{a} X - K_{Rx1} \Phi &= 0 \\
 \frac{1}{a} \frac{dX}{d\xi} + \left( B_4 - \frac{S_{Dx}}{a^2} \frac{D_x}{D_{xy}} B_2 \right) \Phi \\
 - \frac{1}{a^2} \frac{D_x}{D_{xy}} K_{Lx1} \frac{B_2}{a} X &= 0 \quad \text{along } \xi=0 \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d\Phi}{d\xi} + \alpha^2 \overline{D_{xy}} \frac{A_2}{a} X + K_{Rk2} \Phi = 0 \\ & \frac{1}{a} \frac{dX}{d\xi} + \left( B_4 - \frac{S_{Dx}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} B_2 \right) \Phi \\ & + \frac{1}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} K_{Lx2} \frac{B_2}{a} X = 0 \end{aligned}$$

along  $\xi = 1$ 

(10)

여기서

$$\beta_1 = \Omega^2 - S_{Dx} + \alpha^2 \frac{D_{xy}}{D_x} (A_1 - G_{11} + G_{10})$$

$$\gamma_1 = \alpha^2 \overline{D_{xy}} A_2 + S_{Dx} + \alpha^2 \frac{D_{xy}}{D_x} (A_2 - G_{21} + G_{20})$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \Omega^2 \frac{D_x}{D_{xy}} \left[ B_1 + 12 \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{\alpha^2} B_2 \right] \\ &+ \alpha^2 \frac{D_x}{D_{xy}} [S_{Dy} (B_4 - B_1 + B_5 - B_6 \\ &- H_{21} + H_{20} + H_{31} - H_{30}) + B_3 - H_{11} + H_{10} \\ &- K_{Ly1} T_0 - K_{Ly2} T_1 - K_{Ry1} S_0 - K_{Ry2} S_1] \end{aligned}$$

$$\gamma_2 = \frac{D_x}{D_{xy}} \frac{D_x}{D_{xy}} (B_4 - H_{31} + H_{30}) + B_4 - \frac{S_{Dx}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} B_2$$

(11)

식 (11)에서  $\Omega^2$ 은 무차원 진동수파라미터로서

$$\Omega^2 = \frac{\rho a^2 h^3 \omega^2}{12 D_x} \quad (12)$$

이고, 기타 상수들의 정의는 다음과 같다.

$$A = \frac{1}{b^2} \int_0^1 Y^2 d\eta, \quad B = \int_0^1 \Theta^2 d\eta + \frac{S_{Dx}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} A$$

$$A_1 = \frac{1}{A} \frac{1}{b^2} \int_0^1 Y \frac{d^2 Y}{d\eta^2} d\eta, \quad A_2 = \frac{1}{A} \frac{1}{b} \int_0^1 Y \frac{d\Theta}{d\eta} d\eta$$

$$B_1 = \frac{1}{B} \int_0^1 \Theta^2 d\eta, \quad B_2 = \frac{A}{B}$$

$$B_3 = \frac{1}{B} \int_0^1 \Theta \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} d\eta, \quad B_4 = \frac{1}{B} \frac{1}{b} \int_0^1 \frac{dY}{d\eta} \Theta d\eta$$

$$B_5 = \frac{A}{B} A_1, \quad B_6 = \frac{A}{B} A_2$$

$$G_{10}, G_{11} = \frac{1}{A} \frac{1}{b^2} [Y \frac{dY}{d\eta}]_{\eta=0,1}$$

$$G_{20}, G_{21} = \frac{1}{A} \frac{1}{b} [Y \Theta]_{\eta=0,1}$$

$$H_{10}, H_{11} = \frac{1}{B} [\Theta \frac{d\Theta}{d\eta}]_{\eta=0,1}, \quad H_{20}, H_{21} = \frac{A}{B} G_{10,11}$$

$$H_{30}, H_{31} = \frac{A}{B} G_{20,21}, \quad S_0, S_1 = \frac{1}{B} [\Theta]_{\eta=0,1}^2$$

$$T_0, T_1 = \frac{1}{B} \frac{1}{b^2} [Y]_{\eta=0,1}^2$$

$$\overline{D_{xy}} = \frac{1}{2} \frac{\nu_x D_y + \nu_y D_x}{D_x} \quad (13)$$

Laplace 변환방법을 원용하면 경계치 문제의 일반해는 다음과 같이 귀착된다.

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{p_1^2 + p_2^2} \{ [(p_2^2 \cosh p_2 \xi + p_1^2 \cos p_1 \xi)$$

$$\begin{aligned} & + (p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) K_{Rk1} \\ & + (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) \left( \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \left( B_4 - \frac{S_{Dx}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} B_2 \right) \right) \\ & + \left( \frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} - \frac{\sin p_1 \xi}{p_1} \right) \beta_2 K_{Rk1} \} \Phi(0) \\ & + [(p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) (-\alpha^2 \overline{D_{xy}} A_2) \\ & + (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) (-\gamma_1 \frac{1}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} K_{Lx1} B_2) \\ & + \left( \frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} - \frac{\sin p_1 \xi}{p_1} \right) (\beta_2 \gamma_1 - \beta_2 \alpha^2 \overline{D_{xy}} A_2)] \frac{1}{a} X(0) \} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} X(\xi) &= \frac{a}{p_1^2 + p_2^2} \{ [(p_2^2 \cosh p_2 \xi + p_1^2 \cos p_1 \xi) \\ & + (p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) \frac{1}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} K_{Lx1} B_2 \\ & + (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) [\beta_1 + \gamma_2 \alpha^2 \overline{D_{xy}} A_2 - \gamma_1 \gamma_2] \\ & + \left( \frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} - \frac{\sin p_1 \xi}{p_1} \right) \beta_1 \frac{1}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} K_{Lx1} B_2] \frac{1}{a} X(0) \\ & + \left[ (p_2 \sinh p_2 \xi + p_1 \sin p_1 \xi) \left( \frac{S_{Dx}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} B_2 - B_4 \right) \right. \\ & + (\cosh p_2 \xi - \cos p_1 \xi) (-\gamma_2 K_{Rk1}) \\ & \left. + \left( \frac{\sinh p_2 \xi}{p_2} - \frac{\sin p_1 \xi}{p_1} \right) \right. \\ & \left. \cdot \left( \beta_1 \gamma_2 - \beta_1 \left( B_4 - \frac{S_{Dx}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} B_2 \right) \right) \right] \Phi(0) \} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} p_1 \\ p_2 \end{aligned} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \pm (\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2) \\ + ((\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2)^2 - 4\beta_1 \beta_2)^{1/2} \}^{1/2} \quad (16)$$

단,

$$[(\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2)^2 - 4\beta_1 \beta_2]^{1/2} > (\beta_1 + \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2)$$

일반해 식 (14), (15) 및 경계조건식 (9), (10)으로부터 고유치 문제가 형성되고, 이로부터 무차원 진동수 파라미터  $\Omega_{ij}$  및 해당 고유함수  $X(\xi)$  및  $\Phi(\xi)$ 가 구해진다.

앞에서 구한  $X(\xi)$  및  $\Phi(\xi)$ 를  $\xi$  방향의 진동파형함수로 이용하고 유사한 과정을 거치면 다음과 같이  $Y(\eta)$  및  $\Theta(\eta)$ 에 대한 경계치 문제가 얻어진다.

지배방정식 :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \beta_1^* \Theta + \frac{\gamma_1^*}{b} \frac{dY}{d\eta} = 0 \\ & \frac{1}{b} \frac{d^2 Y}{d\eta^2} + \frac{\beta_2^*}{b} Y + \gamma_2^* \frac{d\Theta}{d\eta} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

경계조건식 :

$$\frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{\overline{D_{xy}}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_y} \frac{A_2^*}{b} Y - K_{Ry1} \Theta = 0$$

$$\frac{1}{b} \frac{dY}{d\eta} + \left( B_4^* - \alpha^2 S_{Dy} \frac{D_y}{D_{xy}} B_2^* \right) \Theta - \alpha^2 \frac{D_y}{D_{xy}} K_{Ly1} \frac{B_2^*}{b} Y = 0$$

along  $\eta = 0$

$$\frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{\overline{D_{xy}}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_y} \frac{A_2^*}{b} Y + K_{Ry2} \Theta = 0$$

$$\frac{1}{b} \frac{dY}{d\eta} + \left( B_4^* - \alpha^2 S_{Dy} \frac{D_y}{D_{xy}} B_2^* \right) \Theta + \alpha^2 \frac{D_y}{D_{xy}} K_{Ly2} \frac{B_2^*}{b} Y = 0$$

along  $\eta = 1$

여기서

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{\Omega^{*2}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_y} - S_{Dy} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{D_{xy}}{D_y} (A_1^* - G_{11}^* + G_{10}^*) \\ \gamma_1^* &= \frac{\overline{D_{xy}}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_y} A_2^* + S_{Dy} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{D_{xy}}{D_y} (A_2^* - G_{21}^* + G_{20}^*) \\ \beta_2^* &= \frac{\Omega^{*2}}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} \left[ B_1^* + 12 \left( \frac{a}{h} \right)^2 B_2^* \right] + \frac{1}{\alpha^2} \frac{D_x}{D_{xy}} \left[ S_{Dx} (B_4^* - B_1^* + B_5^* - B_6^* - H_{21}^* + H_{20}^* + H_{31}^* - H_{30}^*) + B_3^* - H_{11}^* + H_{10}^* - K_{Lx1} T_0^* - K_{Lx2} T_1^* - K_{Rx1} S_0^* - K_{Rx2} S_1^* \right] \\ \gamma_2^* &= \frac{\overline{D_{xy}}}{D_{xy}} \frac{D_x}{D_{xy}} (B_4^* - H_{31}^* + H_{30}^*) + B_4^* - \alpha^2 S_{Dy} \frac{D_y}{D_{xy}} B_2^* \end{aligned}$$

식 (20)에서  $\Omega^{*2}$ 은 무차원 진동수파라미터로서

$$\Omega^{*2} = \frac{\rho a^2 h^3 \omega^2}{12 D_x} \quad (21)$$

이고

$$B^* = \int_0^1 \Phi^2 d\xi + \alpha^2 S_{Dy} \frac{D_y}{D_{xy}} \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 X^2 d\xi \quad (22)$$

이며, 상첨자 \*를 가진 상수들은 식 (13)에서  $Y(\eta)$  및  $\Theta(\eta)$  대신  $X(\xi)$  및  $\Phi(\xi)$ ,  $\eta$  대신  $\xi$ ,  $b$  대신  $a$ 를 대치한 결과이다.

식 (17)의 일반해와 경계조건식 (18), (19)로부터 무차원 진동수 파라미터  $\Omega_{ij}^*$  및 해당 고유함수  $Y(\eta)$  및  $\Theta(\eta)$ 가 구해진다.

결과적으로 상기에서 구한  $\xi$ 방향과  $\eta$ 방향에서 구해진 고유함수로 구성되는 Mindlin 판 특성함수가 식 (6)에 의해 구해진다.

### 3. 고유진동해석

4 변이 병진 및 회전에 대해 탄성구속된 직교이방성 후판에 대하여 반복적 Kantorovich 방법에 의거한 고유진동해석 과정은 다음과 같다.

( $m, n$ ) 진동형에 대한 고유진동수와 진동파형을 얻기 위해서는 우선  $\eta$  방향의 진동파형가정함수로서 Timoshenko 보합수의  $n$  차 진동형  $Y_n^{(0)}(\eta)$  및  $\Theta_n^{(0)}(\eta)$ 를 가정한다. 이로부터 얻어지는  $\xi$  방향의 연립상미분방정식과 경계조건식을 만족하는 근  $\Omega_{mn}^{(1)}$ 를 식 (8), (9), (10)으로부터 얻을 수 있다. 이렇게 구한  $\xi$  방향의 진동파형  $X_m^{(1)}(\xi)$ ,  $\Phi_m^{(1)}(\xi)$ 을 그 방향의 진동파형함수

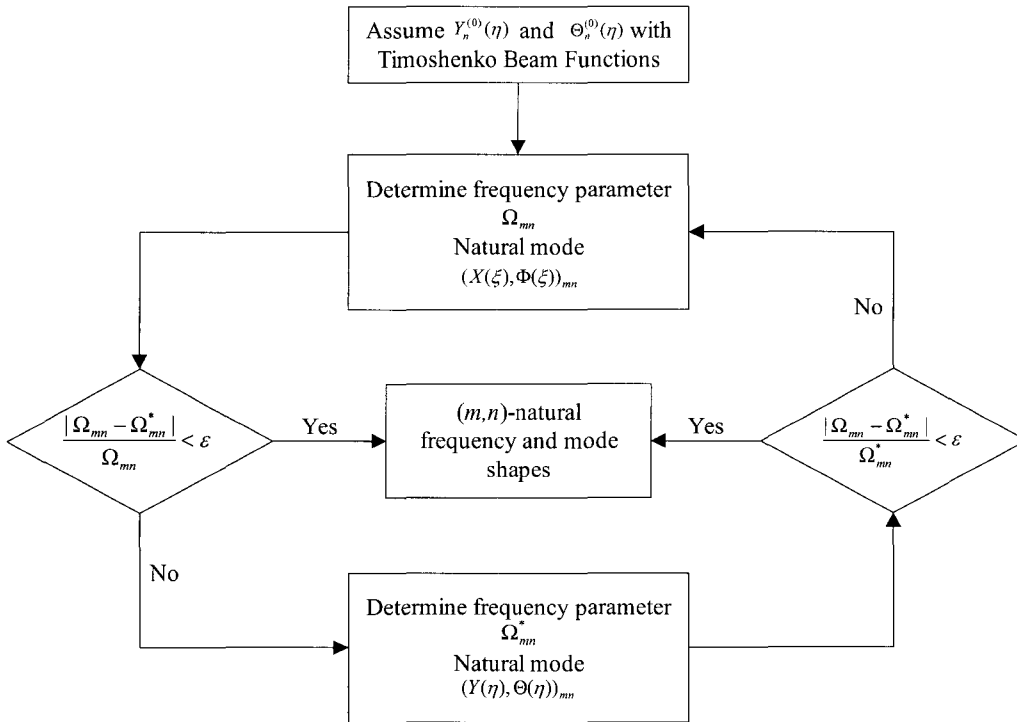


Fig. 2 Iteration procedure for the ( $m, n$ )-mode

로 사용하고 유사한 과정을 거치면  $\eta$  방향에서의 근  $\Omega_{mn}^{*(1)}$  및 이에 해당하는 진동파형  $Y_n^{(1)}(\eta)$ ,  $\Theta_n^{(1)}(\eta)$ 를 얻을 수 있다. 이 근과 첫 번째 과정에서 구한 근의 차를 비교한다. 즉

$$|\Omega_{mn}^{(1)} - \Omega_{mn}^{*(1)}| < \epsilon \quad (23)$$

여기서  $\epsilon$ 은 상대적 차의 수렴기준이다. 식 (23)이 만족되면  $\Omega_{mn}^{(1)}$  또는  $\Omega_{mn}^{*(1)}$ 가  $(m, n)$  진동형의 고유진동수파라미터이고, 이에 해당하는 진동파형은  $X_m^{(1)}(\xi)$ ,  $\Phi_m^{(1)}(\xi)$ ,  $Y_n^{(1)}(\eta)$ ,  $\Theta_n^{(1)}(\eta)$ 를 사용하여 식 (6)에 의해 얻을 수 있다. 만약 식 (23)이 만족되지 않으면  $Y_n^{(1)}(\eta)$ ,  $\Theta_n^{(1)}(\eta)$ 로 시작되는 두 번째 반복과정을 실행한다. 이런 과정은 식 (23)이 만족될 때 까지 반복된다 (Fig. 2 참조).

### 4. 수치계산에 및 고찰

Kantorovich 방법을 원용한 직교이방성 Mindlin 판 특성함수를 이용한 진동해석의 정확도 및 유용성을 검증하기 위하여 먼저 한변의 길이가  $a$ 이고, 두께/길이 비  $h/a=0.1$ 인 정사각형 등방성 후판에 대한 수치계산을 수행하였다. 경계조건으로는 4변 단순지지 (SSSS), 4변 고정 (CCCC) 및 회전탄성지지 ( $K_L's = \infty, K_R's = 10$ )에 대해 저차 6개의 모드에 대하여 고유진동수 파라미터  $\omega\sqrt{(2(1+\nu)\rho a^2)/E}$  및 절선 양태 (nodal pattern)을 Table 1에 나타내었다. 동 표에는 비교 목적으로 SSSS인 경우에는 엄밀해, 그 밖의 경계조건에 대해서는 Rayleigh-Ritz 방법 및 유한요소해석의 결과도 함께 수록하였다. 수치계산에 있어서 상대적 차의 수렴기준  $\epsilon$ 은  $1 \times 10^{-5}$ 로 택하였고, 전단수정계수  $K_x = K_y = K$ 에 대해서는 Dawe 등 및 Chung 등이 채택한 것과 같이 SSSS 때  $\pi^2/12$ , CCCC 때 0.8061 및  $K_L's = \infty, K_R's = 10$  때 5/6을 취했고, 포와송비는 0.3으로 취하였다 (Dawe and Roufaeil, 1980; Chung et al., 1993).

**Table 1** Frequency parameters,  $\omega\sqrt{(2(1+\nu)\rho a^2)/E}$  of isotropic thick square plate :  $h/a=0.1$

(a) SSSS

Method		Mode					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Present work	No. of iteration 1	0.9335	2.2245	2.2349	3.4403	4.1539	4.1793
	2	0.9300	2.2176	2.2176	3.4018	4.1440	4.1440
Mindlin solution <sup>1)</sup>		0.9300	2.2176	2.2176	3.4018	4.1440	4.1440
Mindlin solution & Present work							

- 1) Exact solution
- 2) Mode  $(m, n)$  indicates half wave numbers in x- and y-directions, respectively.

(b) CCCC

Method		Mode					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Present work	No. of iteration 1	1.6057	3.0592	3.0782	4.3301	5.0570	5.1099
	2	1.5987	3.0491	3.0491	4.2838	5.0580	5.0580
Rayleigh-Ritz <sup>3)</sup>		1.5931	3.0409	3.0464	4.2851	5.0258	5.0771
FEM <sup>4)</sup>		1.5977	3.0661	3.0661	4.3113	5.0916	5.1354
Present work							
Rayleigh-Ritz & FEM							

3) Using Timoshenko beam function up to the 5th order in each direction.

4) MSC/NASTRAN

(c)  $K_L's = \infty, K_R's = 10$

Method		Mode					
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Present work	No. of iteration 1	1.3126	2.6277	2.6427	3.8054	4.5520	4.5691
	2	1.3046	2.6194	2.6194	3.7920	4.5272	4.5272
Rayleigh-Ritz		1.3029	2.6164	2.6186	3.7920	4.5171	4.5325
FEM		1.3067	2.6487	2.6487	3.8536	4.6121	4.6234
Present work							
Rayleigh-Ritz							
FEM							

Table 1에서 보듯이 Kantorovich 방법의 결과는 대체로 2회 반복되었을 때 수렴기준을 만족한다. SSSS인 경우는 Mindlin의 엄밀해와 정확히 일치하고, 그 밖의 경계조건에 대해서는 Rayleigh-Ritz 방법 및 유한요소해석 결과 기준 최대 1.5% 이내의 차이를 나타냄을 확인할 수 있다.

또 고유치로서 중근이 존재하는  $(m, n)=(1,2)$ 와  $(2,1)$  진동형 및  $(m, n)=(1,3)$ 과  $(3,1)$ 진동형의 경우에 반복적 Kantorovich 방법은 고유진동수 파라미터가 정확히 일치하는데 Rayleigh-Ritz 방법 및 유한요소해석의 경우는 일치하지 않는다. 진동파형에 있어서도 중근이 존재하는 경우에 반복적 Kantorovich 방법은 x- 또는 y- 축에 평행한 절선형태를 보이지만 다른 방법은 이들의 합성

진동파형을 보인다. 따라서 본 연구에서 제시한 반복적 Kantorovich 방법은 Rayleigh-Ritz 방법과 유한요소법을 포함한 다른 근사적 방법과 비교하여 직교이방성 후판에 대해 보다 정밀한 고유진동해석이 가능하다고 사료한다.

본 연구에서 제시한 반복적 Kantorovich 방법을 원용한 진동 해석방법의 직교이방성 후판에 대한 유용성 검증을 위하여 Srinivas등이 3차원 탄성론으로 해석한 바 있는 4변 단순지지 정사각형 직교이방성 후판을 수치계산으로 택했다(Srinivas and Rao, 1970). 동 모델은 변의 길이  $a$ , 판두께/길이 비  $h/a=0.1$  이고, 재료물성치는  $E_x=1.46 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $E_y=7.69 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $G_{xy}=4.29 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $G_{xz}=2.61 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $G_{yz}=4.35 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $\nu_x=0.44$ ,  $\nu_y=0.23$ ,  $K_x=K_y=5/6$  이다.

Table 2에서 보는 바와 같이 계산결과는 2회 반복 계산했을 때  $\epsilon=1 \times 10^{-5}$ 이 만족되었고, Srinivas등의 계산결과와의 부합성이 매우 양호하다.

**Table 2** Comparison of natural frequencies,  $\omega h \sqrt{\rho/c_{11}}$ , of simply supported orthotropic plate :  $h/a=0.1$ ,  $c_{11}=1.63 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

Method Mode	Present work		Based on 3-D elasticity theory
	No. of iteration		
	1	2	
(1, 1)*	0.0476	0.0474	0.0474
(1, 2)	0.1040	0.1032	0.1033
(2, 1)	0.1187	0.1187	0.1188
(2, 2)	0.1704	0.1692	0.1694
(1, 3)	0.1909	0.1884	0.1888
(3, 1)	0.2177	0.2117	0.2180
(2, 3)	0.2521	0.2469	0.2475
(3, 2)	0.2630	0.2619	0.2624
(1, 4)	0.3002	0.2959	0.2969
(4, 1)	0.3311	0.3311	0.3319
(3, 3)	0.3364	0.3310	0.3320
(2, 4)	0.3566	0.3463	0.3476
(4, 2)	0.3703	0.3695	0.3701

\* Mode ( $m, n$ ) indicates half wave numbers in x- and y-directions, respectively.

### 5. 결 론

본 논문에서는 Mindlin판 특성함수에 기초하여 반복적 Kantorovich 방법에 의해 직교이방성 후판의 고유해를 구하는 방법을 제시하였다. 제시한 방법의 정확도 및 유용성을 확인하기 위하여 정사각형 등방성 후판 및 직교이방성 후판에 대한 수치계산을 수행하였다. 반복적 Kantorovich 방법의 결과는 대체로 2회 반복 계산했을 때 상대적 차의 수렴기준을 만족하였으며, 등방성 후판의 경우 경계조건이 단순지지인 경우는 Mindlin의 엄밀해(exact solution)과 정확히 일치하고 그 밖의 경계조건

에 대해서도 다른 근사방법과 거의 일치함을 알 수 있다. 진동파형에 있어서도 반복적 Kantorovich 방법은 x- 또는 y- 축에 평행한 절선형태를 보이지만 다른 방법은 이들의 합성 진동파형을 보인다. 직교이방성 후판에 대해서도 2회 반복 계산했을 때  $\epsilon=1 \times 10^{-5}$ 이 만족되었고 계산결과도 3차원 탄성론에 입각한 결과와 부합성이 매우 양호하다.

결과적으로 Mindlin판 특성함수에 기초하여 반복적 Kantorovich 방법에 의해 직교이방성 후판의 고유해를 구하는 방법은 정확도 측면에서 다른 근사해법과 거의 대등하거나 우월하며, 특히 중복고유치를 갖는 경우 명확한 고유치 및 고유모드를 얻을 수 있는 장점이 있다.

### 참 고 문 헌

김극천, 한성용, 정정훈 (1987). "유공 직사각형 보강판의 진동해석", 대한조선학회지 논문집, 제24권, 제3호, pp 35-42.

이종문 (1995). Mindlin판 특성함수를 이용한 직사각형 후판 및 복합재료층측판의 진동해석, 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Bhat, R.B., Singh, J. and Mundkur, G. (1993), "Plate Characteristic Functions and Natural Frequencies of Vibration of Plates by Iterative Reduction of Partial Differential Equation", Journal of Vibration and Acoustics, ASME, Vol 115, pp 177-181.

Chung, J.H., Chung, T.Y. and Kim, K.C. (1993). "Vibration Analysis of Orthotropic Mindlin Plates with Elastically Restrained against Rotation", Journal of Sound and Vibration, Vol 163, No 1, pp 151-163.

Chung, J.H., Joo, W.H. and Kim, K.C. (1993). "Vibration and Dynamic Sensitivity Analysis of a Timoshenko Beam-Column with Elastically Restrained Ends and Intermediate Constraints", Journal of Sound and Vibration, Vol 167, No 2, pp 209-221.

Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L. (1980). "Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol 69, No 3, pp 345-359.

Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. (1964). Approximate Methods of Higher Analysis, P. Noordhoff Ltd., Groningen, The Netherlands.

Lee, J.M. and Kim, K.C. (1995). "Vibration Analysis of Rectangular Isotropic Thick Plates using Mindlin Plate Characteristic Functions", Journal of Sound and Vibration, Vol 187, No 5, pp 865-877.

Srinivas, S. and Rao, A.K. (1970). "Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates", International Journal of Solids and Structures, Vol 6, pp 1463-1481.

2003년 5월 14일 원고 접수

2003년 6월 10일 최종 수정본 채택