

댐붕괴 문제의 해석에 관한 TVD-McCormack 기법의 적용 Application of TVD-McCormack Scheme to Analysis of Dam-Break Problems

이 정 규* / 김 태 관**

Lee, Jong-Kyu / Kim, Tae-Kwan

Abstract

This is a study on application of a TVD-McCormack scheme for the computation of one-dimensional dam-break flows. The TVD scheme not only has the ability to damp out oscillations, but also does not contain terms with adjustable parameters. Moreover, the TVD-McCormack scheme does not cause any additional difficulty when dealing with the source term of the equation and retains second-order accuracy in both space and time. In this study, by appropriately designing the limiter functions, the TVD property can be achieved, and numerical oscillations near a jump discontinuities can be eliminated or reduced. Also, this numerical scheme has less computational errors when the direction of the predictor-corrector step is in the same direction as the shock wave propagation.

Keywords : dam-break flows, TVD-McCormack scheme, limiter function

요 지

본 연구에서는 1차원 댐 붕괴 문제의 계산을 위해 TVD-McCormack 기법을 사용하였다. TVD 기법은 진동을 감쇠 시킬 뿐 아니라 수정인자를 가진 항을 포함하지 않는다. 더구나, TVD-McCormack 기법은 source항의 처리에 있어 어려움을 발생시키지 않으며 시간과 공간에 대해 2차 정확도를 유지한다. 제한자의 적당한 적용에 의해 TVD의 특성을 발전시키고, 불연속구간에서의 수치 진동을 줄일 수 있었다. 또한, 본 수치기법에서 예측자(predictor)-보정자(corrector)단계가 충격파의 전파 방향과 같을 때 더 작은 수치오차를 갖는다는 것을 알 수 있었다.

핵심용어 : 댐붕괴 흐름, TVD-McCormack 기법, 제한자 함수

* 한양대학교 공과대학 도시건설환경공학과군 토목공학과 교수
Professor, Dept. of Civil Engineering, College of Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea
(E-mail : leejk@hanyang.ac.kr)

** 한양대학교 대학원 토목공학과 석사 (현 (주)대영엔지니어링 향만부)
Master, Dept. of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea
(at present ; engineer, division of harbour, Dae-young Engineering Co., Ltd.)
(E-mail : mirage@ihanyang.ac.kr)

1. 서 론

하천에서 발생하는 흐름은 하천에 설치된 각종 구조물의 영향을 받으며, 또한 하폭의 확대, 수축 또는 국부적인 하상경사의 급변 등의 경우에도 흐름 조건이 변하게 된다. 그러나 하천의 흐름특성이 변하는 구간에서의 해석은 각각의 흐름특성을 동시에 적용시켜야 하므로 매우 복잡하게 된다. 극한적인 상황인 댐 붕괴에 따른 홍수파의 해석은 수심과 유속이 급격히 변하는 특성 때문에 많은 어려움을 갖는다. 따라서, 이러한 특성을 갖는 흐름의 충격파의 세기나 접촉경계면의 위치 등을 정확히 계산할 수 있어야 하며, 특히 충격파 주위의 수치 오차에 의한 해의 진동을 방지할 수 있어야 한다.

과거의 많은 연구들이 St. Venant 식의 수치 해를 구하기 위해 노력했었고, 그 연구들은 주로 큰 진동 없이 불연속부분을 정확하게 해석하려는 시도였다. 지배방정식의 비선형성은 해를 구하는데 많은 어려움을 주고, 이에 수치적인 기법은 근사해를 구하는 좋은 방법이 된다. Roe(1981)는 Euler식에 대해 보존성을 만족하고 불연속구간에 대한 해석이 용이한 유한차분기법을 제안하였다. Harten(1983)은 진동을 줄여줄 뿐만 아니라 불연속 구간을 고정확도로 풀 수 있는 TVD 기법을 제안하였다. 또한, Harten과 Hyman(1983)은 entropy의 부적당한 조건에 대한 반복적인 과정을 없애기 위해 entropy 보정 함수를 제안하였다. Fenner와 Chaudhry(1987)는 인공적인 분산항을 도입하여 Beam-Warming 기법과 McCormack 기법으로 1차원과 2차원 댐 파괴 흐름을 해석하였고, Garcia-Navarro 등(1992)은 McCormack 기법을 TVD 기법과 연계하여, 천이류에 대하여 경계 조건에 따라 특성곡선법을 이용하여 선단부의 불연속 구간과 개수로에서의 흐름을 모의하였다. Savic과 Holly(1993), Glaister(1993)은 Gudunov-type 기법을 천이류에 적용하였다. 그러나, 이 기법은 매우 강한 충격파에 적용 가능하지만 실질적으로는 McCormack-type 기법보다 더 복잡하다. Delis와 Skeels(1998)은 1차원 댐 붕괴 흐름을 모의하기 위해 여러 가지 종류의 TVD 기법을 비교, 정리하였다. 한건연 등(1999)은 자유수면을 가진 1차원 흐름해석을 위해 St. Venant 식에 대하여 McCormack 기법을 도입하여 파의 선단부에서 일어나는 수치진동을 막기 위해 인위 감쇠항을 모형에 추가하여 적용성을 평가하였다. 또한, 이종욱 등(2001)은 2차 이상의 정확도를 가지며 불연속면에서 수치진동이

발생하지 않는 수치모형의 개발을 위해 풍상차분기법에 기초한 TVD기법을 소개하였다. 이와 더불어 이종욱과 조용식(2001)은 TVD기법을 이용한 천수방정식의 수치모형을 개발하였다.

본 연구에서는 댐 붕괴시의 급격한 수심변화와 유속변화를 정확하게 모의하기 위해 1차원 St. Venant 식에 대한 수치 모형을 수립하였다. 댐 붕괴시에는 매우 강한 충격파가 발생하기 때문에 홍수파의 선단부에서 수치진동이 발생할 수 있다. 이러한 수치진동의 발생을 줄이기 위해 시간이 지속됨에 따라 분산이 증가하지 않는 TVD-McCormack 기법을 적용하여 댐붕괴 문제를 해석하였다. 기존의 TVD-McCormack 기법에 다양한 제한자 함수(limiter function)를 적용하면서, 각각의 경우를 해석해와 비교, 검토하였다. 더 나아가, 적용방법에 있어서, 하나의 인자를 갖는 제한자 함수와 두 개의 인자를 갖는 제한자 함수를 TVD-McCormack 기법에 각각 적용하여 그 차이점을 나타내었다. 또한 McCormack 기법에 있어 기존의 예측자-보정자의 전방-후방 차분법의 형식에서 여러 형태의 조합에 의한 형식으로 변명한 후 적용하여, 흐름의 진행 방향에 따라 해석해와 오차의 크기를 비교하였다. 모형의 검증을 위해 각 수심비에 따른 결과와 해석해를 비교하였다.

2. 지배방정식

1차원 개수로 흐름은 수심과 유량의 항으로 나타나고 이 값들은 1차원 천수방정식에 의해 지배된다. 1차원 천수방정식은 흐름 방향을 따라 질량과 운동량의 보존을 표현한다.

1차원 천수방정식을 보존형으로 표현하면,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{G} \quad (1)$$

여기서

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} \quad (2b)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gI_2 + gA(S_0 - S_f) \end{pmatrix} \quad (2c)$$

여기서 $A(x, h(x, t))$ 는 유수단면적, h 는 수심, $Q(x, t)$ 는 유량, g 는 중력가속도, S_0 는 하상경사, S_f 는 마찰경사, t 는 시간, x 는 거리이다. 또한, I_1 과 I_2 는 각각 단면 1차 모멘트와 종단방향에 따른 하폭의 변화를 고려해 주는 항이다. 마찰경사 S_f 는 Manning의 조도계수 n 의 항을 사용하면 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_f = \frac{Q^2 n^2}{A^2 R^{4/3}} \quad (3)$$

여기서 $R = A/P$ 이고 P 는 윤변의 길이이다.

경수압을 나타내는 단면 1차 모멘트는 식 (4)와 같이 정의한다.

$$I_1 = \int_0^{h(x,t)} (h-\eta)b(x,\eta)d\eta \quad (4)$$

여기서 h 는 수심, η 는 적분 변수를 나타내는 하상으로 부터의 거리이고, $b(x,\eta)$ 는 하상으로부터 거리 η 에서의 단면폭이다.

$$b(x,\eta) = \frac{\partial A(x,\eta)}{\partial \eta} \quad (5)$$

source 항에 나타나는 I_2 는 식 (6)과 같이 정의한다.

$$I_2 = \int_0^{h(x,t)} (h-\eta) \frac{\partial b(x,\eta)}{\partial \eta} d\eta \quad (6)$$

식 (6)은 연속된 단면의 수축과 확대에 의해 생겨나는 힘이다. 식 (1)을 수치 적분할 때 두 가지의 어려움이 있다. 한 가지는 불연속해를 발생시키는 비선형의 흐름률 벡터와 관련되어 있고, 그 다음은 source항에서 나타난다. 흐름률 벡터 F 의 Jacobian으로 J 를 정의하면 식 (7)과 같다.

$$J = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gA/b - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (7)$$

J 의 고유치와 고유벡터는 식 (8a), 식 (8b)으로 나타낸다.

$$a_{1,2} = u \pm c \quad (8a)$$

$$e_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \pm c \end{pmatrix} \quad (8b)$$

여기서 $u = \frac{Q}{A}$, $c = \sqrt{\frac{gA}{b}}$ 이다.

J 의 고유치는 특성 속도이고 그것들의 부호는 흐름의 방향을 나타낸다. J 를 사용하여 식 (1)을 비보존형의 형태로 나타내면 식 (9)와 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J \frac{\partial U}{\partial x} = G \quad (9)$$

3. TVD-McCormack 기법과 제한자

3.1 TVD-McCormack 기법

TVD의 적용에 있어서 기법의 형태는 Lax-Wendroff 기법의 종류 중, 두 단계의 예측자-보정자 과정을 수행하는, 변형된 형태의 기법에는 모두 적용할 수 있다. TVD-McCormack 기법은 변형된 형태로 중앙 2차 기법과 인위적인 분산항의 합으로 표현될 수 있다(Garcia-Navarro 등, 1992).

식 (1)을 풀기 위해, 적분 구간은 $x_i = i\Delta x$, $t_n = n\Delta t$ 로 이산화시킨다. 여기서, Δt 와 Δx 는 균일한 격자 간격이다. 식 (1)을 차분화하여 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$U_i^p = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \Delta t G_i^n \quad (10)$$

$$U_i^c = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^p - F_{i-1}^p) + \Delta t G_i^p \quad (11)$$

여기서 위 첨자 p 는 예측자 단계 동안 계산된 변수를 의미하고, 위 첨자 c 는 보정자 단계 동안 계산된 변수를 의미한다. 또한, $F_i = F(U_i)$ 을 의미한다. 식 (10)과 식 (11)에 따라, 다음 시간 단계의 해는 다음과 같이 된다.

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(U_i^p + U_i^c) \quad (12)$$

그 다음 단계는 TVD항을 첨가하는 것이다. TVD 항은 양단 지점을 제외하고 모든 격자점에서 시간과 공간에 대해 2차 정확도를 유지하며, 해의 수치 진동을

제거하는 역할을 한다(Harten, 1983; Yee, 1987). 이러한 작용은 도수현상이나 단파가 생기는 상류나 급변류를 해석하는데 이용된다. McCormack 기법에 TVD 항을 더하여 정리하면 다음과 같다.

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(U_i^p + U_i^c) + \tau(D_{i+1/2}^n - D_{i-1/2}^n) \quad (13)$$

여기서 $\tau = \Delta t / \Delta x$ 이다.

D항은 다음과 같다.

$$D_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \alpha_{i+1/2}^k \Psi(\bar{a}_{i+1/2}^k) (1 - \tau |\bar{a}_{i+1/2}^k|) [1 - \phi(r_{i+1/2}^k)] \bar{e}_{i+1/2}^k \quad (14)$$

여기서, $\bar{a}_{i+1/2}^k$ 는 j와 j+1지점에서의 평균된 특성 속도이고 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{a}_{i+1/2}^{1,2} = u_{i+1/2} \pm c_{i+1/2} \quad (15)$$

또한 $\bar{e}^{1,2}$ 는 근사 Jacobian의 고유벡터로 다음과 같다.

$$\bar{e}_{i+1/2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{a}_{i+1/2}^{1,2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

흐름 속도를 나타내는 $u_{i+1/2}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$u_{i+1/2} = \frac{Q_{i+1}/\sqrt{A_{i+1}} + Q_i/\sqrt{A_i}}{\sqrt{A_{i+1}} + \sqrt{A_i}} \quad (17)$$

또한, $\bar{c}_{i+1/2}$ 는 파속을 나타내며 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{c}_{i+1/2}^{-2} = g \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} \quad \text{if } A_{i+1} - A_i \neq 0 \quad (18a)$$

$$= \left(\frac{c_{i+1} + c_i}{2} \right)^2 \quad \text{if } A_{i+1} - A_i = 0 \quad (18b)$$

$\alpha_{i+1/2}^{1,2}$ 는 i와 i+1 지점 사이에서 U의 값에 존재하

는 수치 진동을 고유벡터 $\bar{e}_{i+1/2}^{1,2}$ 위로 사영함을 의미한다(Roe, 1981; Glaister, 1988).

$$\alpha_{i+1/2}^{1,2} = \frac{[\Delta_{i+1/2} Q + (-\bar{u}_{i+1/2} \pm \bar{c}_{i+1/2}) \Delta_{i+1/2} A]}{\pm 2 c_{i+1/2}} \quad (19)$$

여기서, $\Delta_{i+1/2}(\cdot) = (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i$ 이다.

함수 Ψ 는 $a_{i+1/2}^k$ 에 대한 엔트로피(entropy) 보정을 위한 함수이며, 물리적으로 타당하지 않은 파의 발생을 배제시킨다. 엔트로피 보정 함수는 다음과 같다(Sweby, 1984; Harten과 Hyman, 1983).

$$\Psi(a) = |a| \quad \text{if } |a| \geq \delta \quad (20)$$

$$\Psi(a) = \frac{(a^2 + \delta^2)}{2\delta} \quad \text{if } |a| < \delta \quad (21)$$

여기서 δ 는 작은 값의 양수이고, 보통 $0.1 \leq \delta \leq 0.3$ 의 범위를 갖는다. ϕ 는 제한자 함수(limiter function)로서 급격한 경사나 충격파가 존재함에도 수치진동이 발생하지 않는 해를 구하기 위해 필요한 함수이다.

3.2 예측자-보정자 단계의 조합방법

예측자-보정자 단계는 식 (10)과 식 (11)같이 보통 각각 전방차분, 후방차분을 사용한다. 그러나 예측자-보정자 단계의 차분법을 다르게 하면서 더 나은 결과를 얻을 수 있다.

$$U_i^p = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_i^n - F_{i-1}^n) + \Delta t G_i^n \quad (22)$$

$$U_i^c = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^p - F_i^p) + \Delta t G_i^p \quad (23)$$

즉, 식 (10), (11) 및 (12)를 사용하여, 전방-후방 TVD-McCormack 기법을 적용하고, 식(22), (23), 식 (12)를 사용하여, 후방-전방 TVD-McCormack 기법을 적용할 수 있다.

3.3 제한자

급격한 경사나 충격파가 존재함에도 수치진동이 발생하지 않는 해를 구하기 위해 제한자 함수(limiter function) ϕ 가 적용된다. 여러 형태의 함수가 있지만,

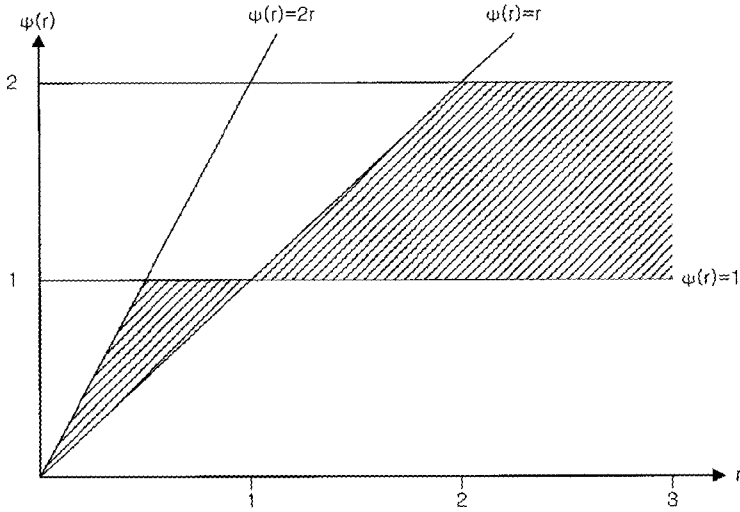


그림 1. 2차 TVD 기법을 만족하는 제한자 지역

그들의 영향은 기본적으로 모두 같다. 제한자 함수 ϕ 는 변화가 적은 지역에서는 거의 분산량이 더해지지 않는 반면, 불연속 지점이나 경사가 급한 지역에서는 기법에 인위적인 분산량을 적용시킨다. 제한자의 종류 및 하류경계는 Harten(1983)에 제시된 TVD 특성을 이용하는 방법이 있으며 자세한 유도과정은 Hirsh(1990)이나 Toro(1999) 등의 문헌을 참고할 수 있다. 1차 정확도를 갖거나 제한된 구간에서만 2차 정확도를 갖는 기법의 제한자 함수는 다음과 같다. 그림 1에서 빗금 쳐진 부분이 2차 정확도를 갖는 TVD 기법의 제한자의 지역이다. 2차 정확도를 갖는 TVD 기법의 제한자는 다음과 같다.

$$\phi(r) = 0 \text{ (upwind scheme, first-order TVD scheme)} \quad (24)$$

$$\phi(r) = \min\text{mod}(1, r) \text{ (min mod limiter of Roe)} \quad (25)$$

$$\phi(r) = \frac{r+|r|}{1+|r|} \text{ (monotonic limiter of van Leer)} \quad (26)$$

$$\phi(r) = \max[0, \min(2, 2r), 0.5(1+r)] \text{ (MUSCL limiter of van Leer)} \quad (27)$$

$$\phi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] \text{ (superbee limiter of Roe)} \quad (28)$$

제한자 $\phi(r)$ 을 $\phi(r^-, r^+)$ 로 바꾸면, 다른 형태의 제한자가 구해진다. 즉, 2개의 인자를 가진 제한자(two parameter limiter; TPL)가 된다. 여기서

$$r^- = \frac{\Delta_{i-1/2}u}{\Delta_{i+1/2}u}; \quad r^+ = \frac{\Delta_{i+3/2}u}{\Delta_{i+1/2}u} \quad (29)$$

$$\phi(r^-, r^+) = \min\text{mod}(1, r^-) + \min\text{mod}(1, r^+) - 1 \text{ (minmod limiter of Roe)} \quad (30)$$

$$\phi(r^-, r^+) = \max[0, \min[2, 2r^-, 2r^+, 0.5(r^-, r^+)]] \text{ (MUSCL limiter of van Leer)} \quad (31)$$

식 (12) 및 (13)의 기법의 안정성은 예측자 단계에서 계산된 값이 보정자 단계에 포함되기 때문에 비선형의 경우를 해석하기는 쉽지 않다. 그러나, 식 (12)와 식 (13)에서 나타날 수 있는 선형적인 식의 경우에는 Lax-Wendroff에 수치 분산을 더한 식과 동일하다. 그리하여, 비록 완벽히 적용되는 것은 아니지만, TVD Lax-Wendroff 기법에서 구해지는 결과에 적용하는 안정성을 적용하는 것이 가능하다. TVD Lax-Wendroff 기법의 안정성은 선형과 비선형 homogeneous 스칼라 방정식에 모두 적용 가능하다. 안정성은 Courant-

Friedrichs-Levy (CFL) 조건에 의해 다음과 같이 나타낸다(Sweby, 1984).

$$CFL_{\max} = \frac{2}{2 + \phi_{\max}} \quad (31)$$

여기서 ϕ_{\max} 는 제한자 함수에 의해 구해진 최대값이다. CFL_{\max} 의 값은 1과 2사이에서 변한다.

4. 수치해석의 적용 및 고찰

4.1 초기조건 및 경계조건

시간 $t = 0$ 에서, 초기 조건은 다음과 같이 주어진다.

$$h(x)|_{t=0} = h^0(x) \quad (33a)$$

$$q(x)|_{t=0} = q^0(x) \quad (33b)$$

일반적인 1차원 St. Venant식의 문제에서는 해석 범위의 경계는 닫힌 형태의 경계와 열린 형태의 경계로 나뉜다. 본 연구에서는 막힌 형태의 경계 조건을 사용하였으며, 따라서 유입량과 유출량은 영(0)이다. 또한 댐붕괴 이전의 상류부분의 저류 수심과 하류부분의 수심을 초기 조건으로 설정한다.

4.2 1차원 댐붕괴 문제

본 연구에서는 댐붕괴파를 바닥이 수평인 길이 2000m의 수로를 가정하여 해석하였다. 댐은 1000m 지점에 위치하였다. 초기 상류지점의 수심은 10m으로 고정되었고, 하류지점의 수심은 5m, 1m, 0.5m, 0.1m, 0.05m, 0.01m으로 변화를 주었다. 또한, 시간 $t=0$ 에서 댐은 붕괴된다고 가정하였다. 시간 간격은 0.1초로 하였고, 공간 간격은 10m으로 하였다. 댐이 붕괴된 이후에 60초의 시간이 경과한 시점에서의 댐붕괴파 흐름의 수면을 해석하였다. 수치해는 해석해와의 비교를 통해 검증하였다. 해석해는 특성곡선 이론에 따라 구하였다. 그림 2는 TVD 항이 없이 McCormack 기법만을 적용하여 해석한 결과이다. 해석해와 비교해 볼 때, 선단부에서 많은 수치진동이 일어남을 알 수 있다. 또한, 그림 2에서 보여지듯이 TVD-McCormack 기법과 비교해 볼 때, 큰 차이가 난다. 이로부터 TVD항이 수치진동의 제어에 큰 영향을 끼침을 알 수 있다. 그림 3의 (a)-(d)는 수심비에 따라 해석해와 비교한 결과이다. 수심비는 상류부의 수심과 하류부의 수심의 비로 각각 0.5, 0.05, 0.005, 0.001이다.

또한 제한자 함수는 Roe의 minmod 제한자로 고정하였다. 대체적으로 해석해와 거의 일치한다. 또한 해석해보다 수치감쇠가 심하게 발생한다. 그러나, 수심비가 작아질수록, 즉 상류수심과 하류수심의 차가 클수록 선단부에서 해석해와 차이가 점점 많이 난다. 이는 수심의 변화와 유속의 변화가 점점 급격하게 변함에 따라 충격파의 크기가 커지고 이에 따른 파의 선단부에서의 수치 감쇠가 더 심하게 발생하기 때문이다.

TVD-McCormack 기법은 source항을 처리함에 있어 큰 어려움을 가지지 않는다. 그리하여 충격파가 진행될 때, 조도계수(Manning 계수 n)의 영향을 해석함에 있어 다른 기법에 비해 쉽게 적용할 수 있다. 조도계수가 증가함에 따라 댐붕괴파의 전파 속도가 감소됨은 그림 4에 잘 나타나 있다.

4.3 다양한 제한자의 적용 및 비교

그림 5 및 6는 제한자 함수의 종류에 따른 댐붕괴파 모의의 결과이다. 대부분의 제한자 함수가 TVD-McCormack 기법에서 해석해와 유사한 결과를 낸다. 또한 하나의 인자를 갖는 제한자 함수를 적용한 수치해보다는 두 개의 인자를 갖는 제한자 함수를 적용한 수치해가 해석해에 더 근사한 값을 나타낸다.

표 1의 $(h_{-1} - h_{+1})/h_0$ 는 댐이 위치한 지점 근처에서 수심의 차이값에 관련하여 정의한 인자이다. h_{-1} 은 댐의 위치를 중심으로 왼쪽 첫 번째 지점에서의 수치해석 값이고, h_{+1} 은 댐의 위치를 중심으로 오른쪽 첫 번째 지점에서의 수치해석 값이다. 또한, h_0 는 댐의 위치에서의 이론적인 값이다. h_{-1} 과 h_{+1} 의 차는 불연속면에서, 실제 흐름에서 일어날 수 없는 수직적인 해의 감소의 정도를 나타내는 인자이다. 즉, 불연속면이 발생하는 부분에서의 수치해의 비물리적인 왜곡 발생을 알 수 있는 인자이다. 표 1에서 볼 수 있듯이 수심비가 작을수록 $(h_{-1} - h_{+1})/h_0$ 의 값이 커짐을 알 수 있다. 수심비가 작아짐에 따라 경사가 급해지므로 불연속면의 차이 또한 커짐은 당연한 결과이다. 또한, 표 1에서 Minmod 제한자를 비교해보면 하나의 인자를 갖는 제한자(one parameter limiter; OPL)의 경우보다는 두 개의 인자를 갖는 제한자(two parameter limiter; TPL)의 경우에서 $(h_{-1} - h_{+1})/h_0$ 의 값이 작게 나타난다. 이는 OPL의 경우보다 TPL의 경우에 불연속면에서 근사해에 더 근접한 값을 나타낸다는 것을 나타낸다.

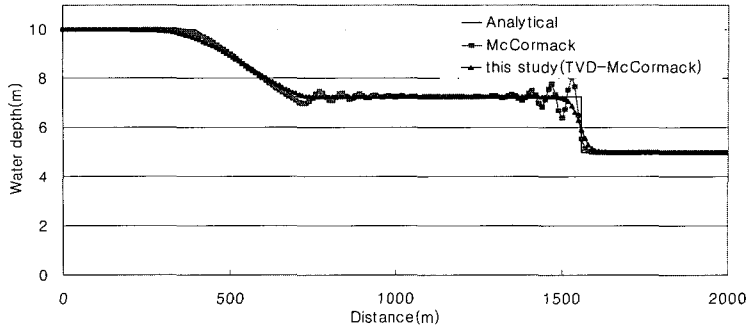
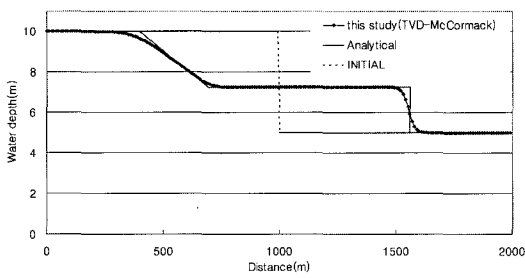
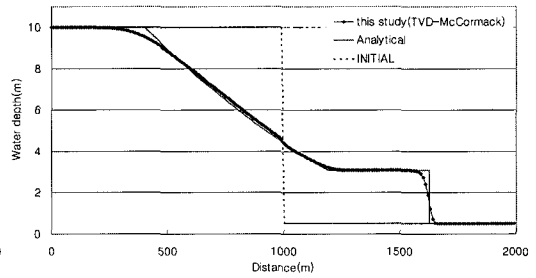


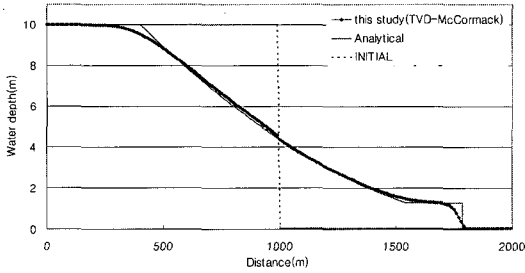
그림 2. McCormack 기법과 본 연구(TVD-McCormack) 기법의 비교



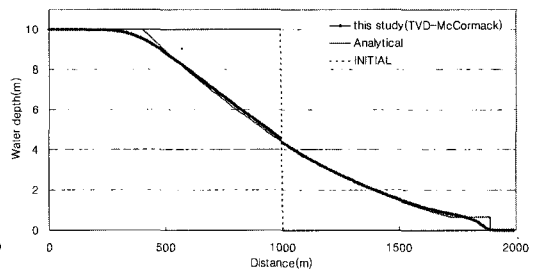
(a) Depth ratio = 0.5



(b) Depth ratio = 0.05



(c) Depth ratio = 0.005



(d) Depth ratio = 0.001

그림 3. 수심비에 따른 결과분석

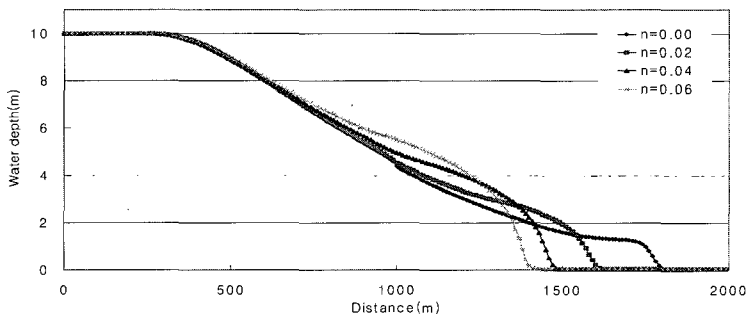


그림 4. 댐붕괴파에서의 조도계수의 영향

표 1. 제한자에 따른 $(h-1 - h+1)/h_0$ 값

수심비	OPL				TPL
	Upwind	Monotonic	Minmod	Superbee	Minmod
0.1	0.0430	0.0430	0.0430	0.0430	0.0373
0.005	0.05	0.05	0.05	0.05	0.0395

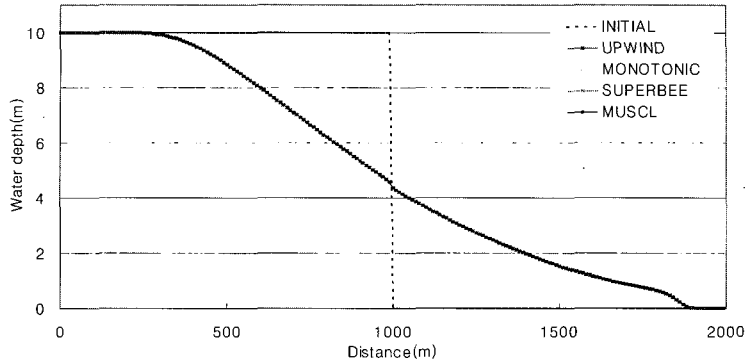
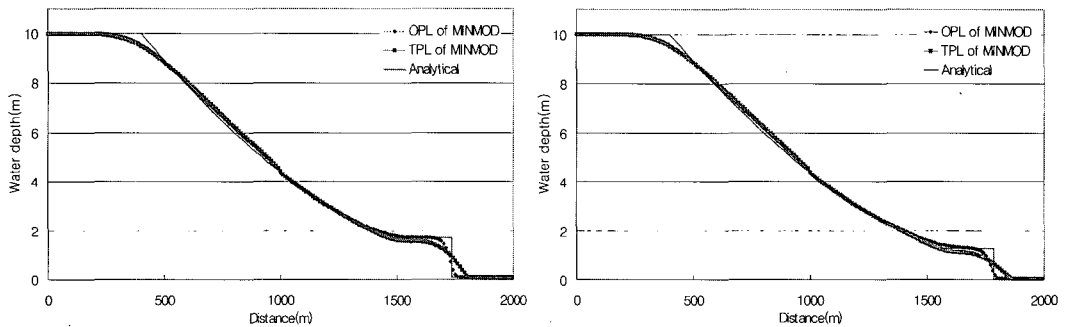


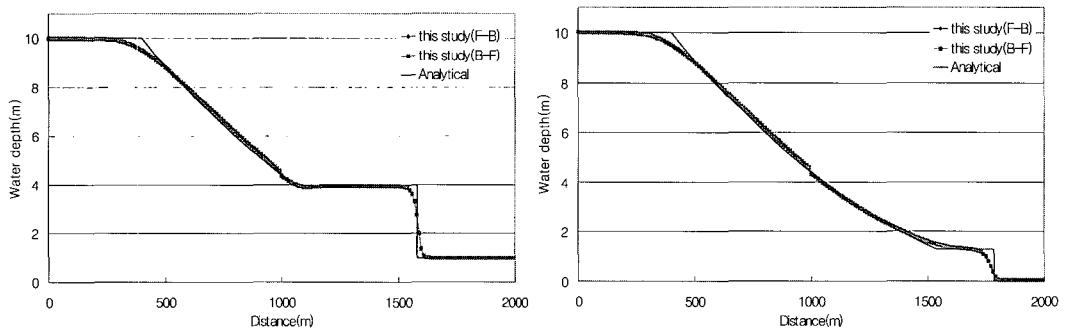
그림 5. 각종 제한자에 따른 댐붕괴과 흐름



(a) 수심비가 0.01 일 때

(b) 수심비가 0.005 일 때

그림 6. Minmod 제한자의 OPL과 TPL 사이의 비교



(a) 수심비가 0.1 일 때

(b) 수심비가 0.005 일 때

그림 7. 수심비가 1보다 작을 때, 예측자-보정자의 차분기법의 변화에 따른 흐름 비교

4.4 파의 진행방향에 따른 예측자-보정자의 적용 및 비교

McCormack 기법을 적용함에 있어서는 파의 진행 방향에 따른 차분법의 적용이 더 효과적임을 그림 7, 그림 8에서 알 수 있다. 그림 7은 수심비가 1보다 작은 경우이다. 상류부에서의 수심이 하류부에서의 수심보다 크기 때문에 파는 상류에서 하류로 전파된다. 따라서 McCormack 기법을 적용함에 있어 전방(Forward)-후방(Backward)의 단계를 사용하는 것이 후방(Backward)-전방(Forward)의 단계를 사용하는 것보다 좋은 결과를 갖는다.

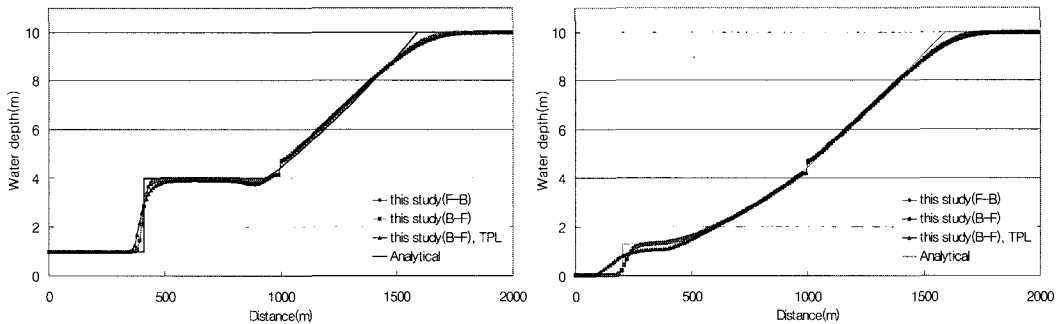
또한, 그림 8은 수심비가 1보다 큰 경우이다. 따라서 파의 진행방향이 하류에서 상류로 향할 때의 경우이다. McCormack 기법에 전방-후방의 단계를 적용했을 때, 해석해와 좀 더 일치함을 알 수 있다. 또한 표 2과 표 3은 McCormack 기법을 적용함에 있어 차분법을 달리하여 적용한 결과를 $(h_{-1} - h_{+1})/h_0$ 를 사용하여 나

타낸 것이다. 표 2과 표 3에서 보듯이 파의 진행방향에 따라 적당한 차분법을 적용했을 때, 좀 더 나은 결과가 나온다는 것을 알 수 있다. 또한 같은 차분법을 사용함에 있어서 OPL을 사용했을 때보다는 TPL을 사용했을 때, 비물리적인 왜곡이 감소한다.

이와 같이 본 연구에서는 적합한 제한자 함수의 적용과 McCormack 기법에서의 효과적인 차분법의 적용으로 인해 댐 붕괴파를 더 정확하게 해석할 수 있음을 알 수 있었다.

5. 결론

극한적인 상황인 댐붕괴에 따른 흐름을 예측하는 것은 수리학적으로 매우 흥미롭다. 급격한 수심 변화와 유속 변화에 따른 홍수파의 해석은 급격히 변하는 물리적 특성 때문에 많은 어려움을 갖는다. 기존 기법들의 대부분은 파의 선단부에서 수치진동이 발생한다. 따라서 충격파의 크기나 접촉경계면의 위치 등을 정확히 계



(a) 수심비가 10 일 때

(b) 수심비가 200 일 때

그림 8. 수심비가 1보다 클 때, 예측자-보정자의 차분기법의 변화에 따른 흐름 비교

표 2. 수심비가 작을 때, 차분법에 따른 $(h_{-1} - h_{+1})/h_0$ 값

수심비	전방 - 후방	후방 - 전방
0.1	0.0430	0.0550
0.005	0.05	0.0631

표 3. 수심비가 클 때, 차분법에 따른 $(h_{-1} - h_{+1})/h_0$ 값

수심비	전방 - 후방, OPL	후방 - 전방, OPL	후방 - 전방, TPL
10	-0.1325	-0.1321	-0.1170
200	-0.1185	-0.1098	-0.0987

산할 수 있어야 하며, 특히 충격과 주위의 수치 오차에 의한 해의 진동을 방지할 수 있어야 한다. 본 연구에서 모의된 TVD-McCormack 기법은 수치진동의 발생 없이 선단부의 불연속지점을 해석할 수 있다. 다양한 제한자 함수의 적용에 있어 일반적인 TVD 기법에 적용한 것에 비해 대부분의 제한자 함수에서 해석해와 큰 오차가 발생하지 않았다. 그와 더불어 OPL의 적용보다는 TPL의 적용이 오차를 더 줄일 수 있었다. 본 연구에서는 적절한 제한자 함수의 적용이 댐붕괴파의 해석에 있어 수치 오차를 줄이는데 많은 영향을 끼침을 알 수 있었다. 한편 TVD-McCormack 기법을 적용함에 있어서 McCormack 기법에서 차분법의 적절한 적용에 따라 해석해와의 오차의 크기를 줄일 수 있음을 확인하였다. 이는 적절한 제한자 함수의 선택과 파의 방향에 따른 차분법의 적절한 선택이 댐붕괴파를 다 정확하게 해석함을 알 수 있게 한다.

감사의 글

본 논문은 2002년도 한양대학교 건설연구소의 지원에 의하여 연구되었기에 이에 감사드립니다.

참 고 문 헌

한건연, 김동구, 이홍래 (1999). "McCormack 기법을 이용한 하천흐름의 동수역학 해석." **한국수자원학회 학술발표회 논문집**, 한국수자원학회, pp. 590-595.

이종욱, 조용식, 윤광석, 윤태훈 (2001). "TVD 수치모형의 개발: I. 선형 이송방정식." **한국수자원학회 논문집**, 제34권, pp.177-186.

이종욱, 조용식 (2001). "TVD 수치모형의 개발: II. 천수 방정식." **한국수자원학회 논문집**, 제34권, pp.187-195.

Delis, A. I. and Skeels, C. P. (1998). "TVD schemes for open channel flow." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 26, pp.791-809.

Fennema, R. J. and Chaudhry, M. H. (1987). "Simulation of one-dimensional dam-break flows." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 25, No. 1, pp.25-51.

Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F. and Saviron, J. M. (1992). "1-D open-channel flow simulation using

TVD-McCormack scheme." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vol. 118, No. 10, pp.1359-1372.

Glaister, P. (1988). "Approximate Riemann solution of shallow water equations." *Journal of Hydraulic Research*, Delft, The Netherlands, Vol. 26, No. 3, pp.293-306.

Glaister, P. (1993). "Flux difference splitting for open channel flows." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 16, pp.629-654.

Harten, A. (1983). "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp.357-393.

Harten, A. and Hyman, P. (1983). "Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws." *Journal of Computational Physics*, Vol. 50, pp.235-269.

Hirsch, C. (1990). *Numerical computation of internal and external flow-Volume 2: computation methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley & Sons Ltd.

Roe, P. L. (1981). "Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes." *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372.

Savic, L. J. and Holly, F. M. Jr. (1993). "Dam-break flood waves computed by modified Godunov method." *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 31, No. 1, pp.19-34.

Sweby, P. K. (1984). "High resolution schemes using flux limiter for hyperbolic conservation laws." *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 21, No. 5, pp.995-1011.

Toro, E. F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer.

Yee, H. C. (1987). "Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications." *Journal of Computational Physics*, Vol. 68, pp.151-179.

(논문번호:02-78/접수:2002.09.16/심사완료:2003.04.04)