

혼합모드 피로문제에서의 최소 변형에너지 밀도기준의 적용

심규석* · 구재민†

*동서울대학 기계과 · 성균관대학교 기계공학부
(2002. 1. 18. 접수 / 2002. 5. 27. 채택)

An Application of Minimum Strain Energy Density Criterion in Mixed Mode Fatigue Problem

Kyu-Seok Shim* · Jae-Mean Koo

*Department of Mechanical Design, Dong Seoul college · School of Mechanical Engineering, Sungkyunkwan University
(Received January 18, 2002 / Accepted May 27, 2002)

Abstract : In this paper, the maximum minimum strain energy density criterion was applied to the mixed mode fatigue test of A5052 H34 alloy. In this study result, we can have seen that the authors stress intensity factor for the finite width specimen and method of determining testing load, based on the plastic zone size and the limited maximum stress intensity factor by ASTM STANDARD E-647-95, is useful.

Key Words : mixed mode fatigue problem, maximum strain energy density criterion, mean crack propagation angle, mean crack angle, small scale yield

1. 서 론

실구조물이나 부품들에 작용하는 하중은 복합적으로 작용할 뿐만 아니라, 형상의 영향에 의해서도 하중이 혼합모드로 작용하기 때문에 혼합모드 문제는 아주 실질적인 문제이다. 그러나 혼합모드 문제가 실제적이고 범용적이지만, 균열이 진전하는 하중뿐만 아니라 진전방향도 고려하여야 하기 때문에 많은 관심에도 불구하고 연구자들이 접근하기에 어려움을 느끼는 것이 사실이다. 이 분야에 대한 연구는 Erdogan과 Sih¹⁾에 의해 최초로 수행되었으며, 이후 많은 연구자들이 연구하였고, 우리나라에서도 이 분야에 대한 연구가 활발히 되고 있다²⁻⁴⁾.

특히 정하중이 작용하는 경우에는 비교적 많은 연구가 있었으나, 사용 중인 기계나 구조물에 일반적으로 작용하는 피로 하중에 대한 연구는 상대적으로 적었다. 그 이유는 균열성장 시작각과 하중 이외에도 균열성장 경로를 고려해야 하는 어려움이

있을 뿐만 아니라, 모드 I문제에서 사용하는 응력확대계수와 같은 계수들을 그대로 사용할 수 없는 문제점과, 실험방법의 불확실성과 실험결과를 해석하여 피로성장관계를 구하는 문제들이 어려웠기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 이와 같은 혼합모드 피로시험에 대한 문제점을 해결하기 위하여 성장경로 해석, 유한폭 판재에서의 응력확대계수, 실험방법, 실험결과 및 해석방법 등에 대하여 논의코자 한다. 이를 위하여 혼합모드 문제에서 유용한 계수로 알려진 최소 변형에너지 밀도계수를 A5052합금 판재에 대한 혼합모드 피로시험 결과에 적용하였으며, 최소 변형에너지 밀도계수를 선택하는데 문제점이 있기 때문에 이를 수정한 최대 극소 변형에너지 밀도기준⁵⁾을 적용하였다.

2. 최소 변형에너지 밀도기준

2.1. 정 하중하의 최소 변형에너지 밀도기준

Sih^{6,7)}에 의하여 제안된 파괴기준인 최소 변형에너지 밀도기준은, 미소 요소에 축적된 변형에너지로부터 변형에너지 밀도계수 S 를 다음과 같이 정

† To whom correspondence should be addressed.
kim9000@hanmail.net

의한다.

$$S = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2 \quad (1)$$

여기서, 계수 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 는

$$a_{11} = 1/(16\mu)\{(1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta)\} \quad (2)$$

$$a_{12} = 1/(16\mu)\sin\theta\{2\cos\theta - (\kappa - 1)\} \quad (3)$$

$$a_{22} = 1/(16\mu)\{(\kappa + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)\} \quad (4)$$

이다. 여기에서 μ 는 탄성계수고, κ 는 평면응력상태와 평면변형률 상태일 때, 각각 $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ 와 $(3 - 4\nu)$ 이다. 또한, 응력확대계수 k_1, k_2 는 무한판재에서 ρ 의 응력 작용방향에 대하여 균열이 β 만큼 경사진 경우,

$$k_1 = \sigma\sqrt{a} \sin^2 \beta \quad (5)$$

$$k_2 = \sigma\sqrt{a} \sin \beta \cos \beta \quad (6)$$

이다.

이 파괴기준은 다음과 같은 두 개의 가정에 기초하고 있다.

(1) 초기균열 진전은 변형에너지 밀도계수 S 가 최소값을 갖는 방향으로 일어난다. 즉,

$$\partial S / \partial \theta = 0, \partial^2 S / \partial \theta^2 > 0, \theta = \theta_0 \quad (7)$$

(2) 초기균열 진전은 변형률 에너지 밀도 계수 S 가 임계치에 도달할 때 발생한다.

$$S_{cr} = a_{11}k_1^2 + 2a_{12}k_1k_2 + a_{22}k_2^2, \theta = \theta_0 \quad (8)$$

여기서 θ_0 는 균열진전각이다.

이 파괴기준에 대한 연구는 활발히 이루어져 왔으며, 적용이 쉬운 장점이 있으나, 최소값 선택에 문제가 있기 때문에, 구재민⁵⁾은 이의 수정방안으로 최대 극소 변형에너지 밀도기준을 다음과 같이 제안하였다.

즉, 수정 변형에너지 밀도계수(Modified Strain Energy Density Factor)를

$$MS = \text{sign}(\rho_\theta) \cdot S \quad (9)$$

와 같이 정의하여,

(1) 초기균열 진전은 수정 변형에너지 밀도 계수 MS 가 최소값 중 최대값을 갖는 방향으로 일어난다.

(2) 초기균열 진전은 수정 변형에너지 밀도 계수 MS 가 양의 임계치에 도달할 때 발생한다.

이 기준을 적용하면 최소값 선택의 모호성은 해결된다고 하였다. 본 연구에서는 최대 극소 변형에너지 밀도기준의 최대 극소 변형에너지 밀도계수를 혼합모드 피로문제에 적용하였다.

2.2. 피로하중하의 최소 변형에너지 밀도기준

모드 I의 경우 일반적으로 잘 알려진 균열 성장 법칙인 Paris의 피로균열 성장식⁸⁾은 다음과 같다. 즉,

$$da/dN = A(\Delta K)^n \quad (10)$$

여기서 A 와 n 은 재료상수이다.

Sih와 Barthelemy⁹⁾는 변형에너지 밀도계수 S 를 식 (10)과 같은 형태로 피로문제에 적용하였는데,

$$da/dN = A(\Delta S_{\min})^n \quad (11)$$

와 같다. 여기에서

$$\begin{aligned} \Delta S_{\min} &= S_{\min}^{\max} - S_{\min}^{\min} \\ &= S(\theta_0, \sigma_{\max}) - S(\theta_0, \sigma_{\min}) \\ &= a_{11}(\theta_0)\{(k_1)_{\max}^2 - (k_1)_{\min}^2\} + 2a_{12}(\theta_0)\{(k_1)_{\max}(k_2)_{\max} \\ &\quad - (k_1)_{\min}(k_2)_{\min}\} + a_{22}(\theta_0)\{(k_2)_{\max}^2 - (k_2)_{\min}^2\} \end{aligned} \quad (12)$$

여기에서 θ_0 는 균열진전각이다.

최대 극소 변형에너지 밀도기준을 적용하는 경우에 식(11)에서 변형에너지 밀도계수 S 대신 수정 변형에너지 밀도계수 MS 를 적용하면 된다.

즉, 수정 변동폭 변형에너지 밀도계수는

$$\Delta MS_{\min} = MS_{\min}^{\max} - MS_{\min}^{\min} \quad (13)$$

이다.

혼합모드 피로 균열성장은 모드 I이나 정하중 하에서의 균열성장과는 달리 균열의 성장경로를 고려하여야 한다.

Sih와 Barthelemy⁹⁾는 Fig. 1(a)와 같이 A에서 B로의 작은 균열 증분에 의한 새로운 OAB의 굽은 균열을 OB의 직선 균열로 보고, Fig. 1(b)의 새로운 균열각을 β_1 , 반균열 길이를 a_1 이라 할때,

$$\beta_1 = \beta + \frac{\Delta a_1 \sin \theta_o}{a_o + \Delta a_1 \cos \theta_o} \quad (14)$$

$$a_1 = a_o + \frac{\Delta a_1 + a_o \cos \theta_o}{a_o + \Delta a_1 \cos \theta_o} \Delta a_1 \quad (15)$$

의 관계를 제안하였다. 이 가상적인 균열의 응력 확대계수 K_I , K_{II} 를 다음과 같이 고려하였다.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a_1} \sin^2 \beta_1 \quad (16)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a_1} \sin \beta_1 \cos \beta_1 \quad (17)$$

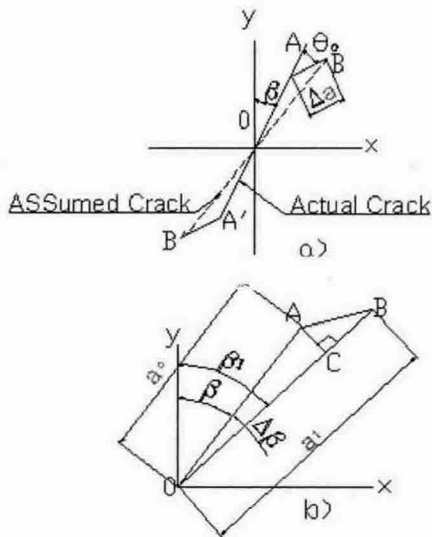


Fig. 1. (a) First increment of crack growth
(b) Straight line approximation

A.T. Yokobori Jr., et al.¹⁰⁾는 5083P-O 알루미늄 합금에 의한 실험 결과, 거시적으로 모드 I과 II의 혼합모드 하에서 최대 주 인장응력 σ_1 에 거의 수직인 방향으로 피로 균열이 성장한다고 하였다. 또한, 최대 주 인장응력에 수직인 방향으로 투영한 균열길이를 b 라고 할 때, 응력확대 계수를 다음과 같이 정의하였다.

$$K_{Ib} = \sigma_1 \sqrt{\pi b} \quad (18)$$

이 응력확대계수를 사용하여, $\Delta K_{Ib} - db/dN$ 관계를 정의하였다.

3. 혼합모드의 유한 폭 판재에서의 응력 확대계수와 혼합모드 피로균열성장

3.1. 유한폭 판재에서의 응력확대계수

무한 경계에 σ 의 응력이 작용하는 판재의 중앙에 길이 $2a$ 의 균열이 응력방향에 대하여 β 만큼 경사진 균열첨단 부근의 미소요소에 대한 Williams¹¹⁾의 응력해에서 비특이항을 무시한 결과는 다음과 같다.

$$\sigma_r = 1/2(2\pi r)^{-1/2} [K_I(3 - \cos \theta) \cos(\theta/2) + K_{II}(3 \cos \theta - 1) \sin(\theta/2)] \quad (19)$$

$$\sigma_\theta = 1/2(2\pi r)^{-1/2} [K_I(1 + \cos \theta) \cos(\theta/2) - K_{II}(3 \sin \theta) \cos(\theta/2)] \quad (20)$$

$$\tau_{r\theta} = 1/2(2\pi r)^{-1/2} [K_I \sin \theta \cos(\theta/2) + K_{II}(3 \cos \theta - 1) \cos(\theta/2)] \quad (21)$$

여기에서

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta \quad (22)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (23)$$

이다.

식(22)와 (23)은 무한 판재에 대한 식으로써 유한 폭 문제에 적용하는데 한계가 있다. 본 연구에서는

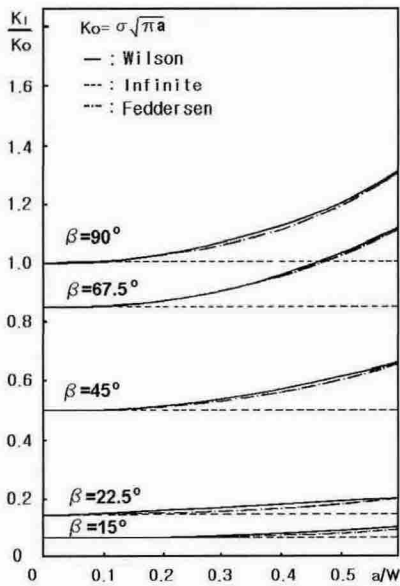


Fig. 2. K_I for a center inclined crack

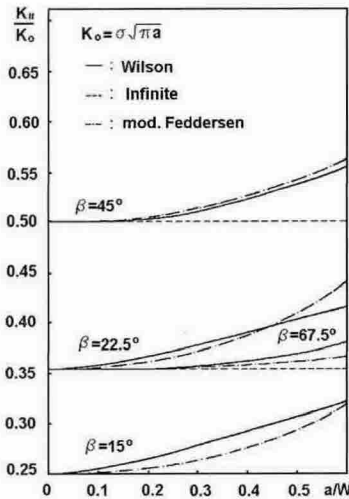


Fig. 3. K_{II} for a Center Inclined Crack

Feddersen¹²⁾의 수정계수를 사용하여 다음과 같이 유한폭 판재에서의 응력 확대계수를 정의한다.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a \sec\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \sin^2 \beta} \quad (24)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a \sec\left(\frac{\pi a}{2W} \cos \beta\right) \sin \beta \cos \beta} \quad (25)$$

이 결과를 Wilson¹³⁾의 boundary collocation method에 의한 결과와 비교한 것은 Fig. 2, 3과 같다. K_I 은 Wilson의 결과와 약 15%이내의 오차가 발생하고, K_{II} 는 약 6% 이내의 오차가 발생하고 있다.

3.2. 혼합모드 피로균열 성장

Fig. 4에서 원점을 (0,0), A점을 (x_0, y_0)라 하고 B점을 (x_1, y_1)라 한다면, 가상 균열길이와 각은 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$a_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad (26)$$

$$\beta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \quad (27)$$

또한, 균열진전각 θ_0 는

$$\theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \quad (28)$$

과 같이 정의되는데, 일축인장의 경우 $\tan^{-1}\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) < 0$ 의 값을 갖는다. 원 경사균열을 a 라고 할 때, 균열성장 증분 Δa 는 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta a = a_1 - a \quad (29)$$

임의의 시점에서의 가상 균열길이를 a_i , 균열경

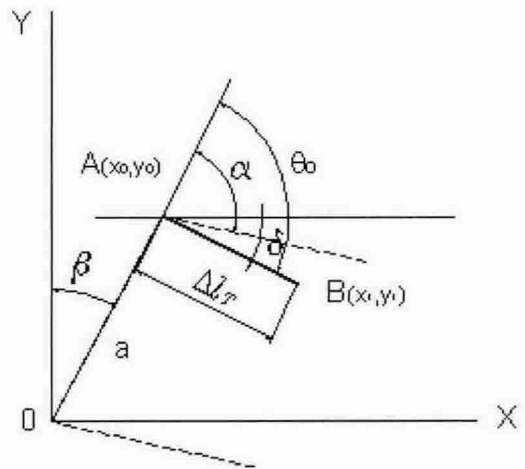


Fig. 4. Mixed mode fatigue crack growth path

사각을 β_i , 균열진전각을 θ_{oi} 라 하고, 가상 균열이 a_i 에서 a_{i+1} 로 진전할 때의 평균 가상 균열길이 (\bar{a}_i)와 평균균열각 ($\bar{\beta}_i$), 평균균열 진전각 ($\bar{\theta}_{oi}$)을 사용하여 식(13)의 수정 변동폭 변형에너지 밀도 계수를 구하였으며, 이때 응력 확대계수는 다음과 같이 정의하였다.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \bar{a}_i \sec\left(\frac{\pi \bar{a}_i}{2W}\right) \sin^2 \bar{\beta}_i} \quad (30)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi \bar{a}_i \sec\left(\frac{\pi \bar{a}_i}{2W} \cos \bar{\beta}_i\right) \sin \bar{\beta}_i \cos \bar{\beta}_i} \quad (31)$$

3.3. 하중 설정법

본 연구에서의 하중설정은 다음과 같은 방법으로 하였다.

모드 I인 $\beta=90^\circ$, $\theta=0$, 소성영역의 크기 r_p 는 식(20)에서 ρ_θ 가 ρ_{YS} (항복강도)일 때, 결정할 수 있는데, 그 결과식의 양변을 시험편의 반폭 W 로 나누면,

$$\frac{r_p}{W} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{YS} \sqrt{2W}} \right)^2 \quad (32)$$

이 된다. 이 식에서 소규모 항복 조건에 의한 피로 시험이 가능한 한계치를 각각, r_{maxL} , K_{maxL} 이라 하면, 식(32)을 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\frac{r_{maxL}}{W} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{maxL}}{\sigma_{YS} \sqrt{2W}} \right)^2 \quad (33)$$

ASTM STANDARD E647-95의 Fig. 6의 M(T) 시험편인 경우를 식(33)에 의하여 수정한 결과는 Fig. 5와 같다. $\frac{r}{W}$ (r : arbitrary distance from crack tip)이 $\frac{r_{maxL}}{W}$ 보다 작은 값을 갖도록 하중설정을 한다면, 소규모 항복조건을 만족시킬 수 있다.

식(33)에서

$$K_{maxL} = \sigma_{YS} \sqrt{2\pi r_{maxL}} \quad (34)$$

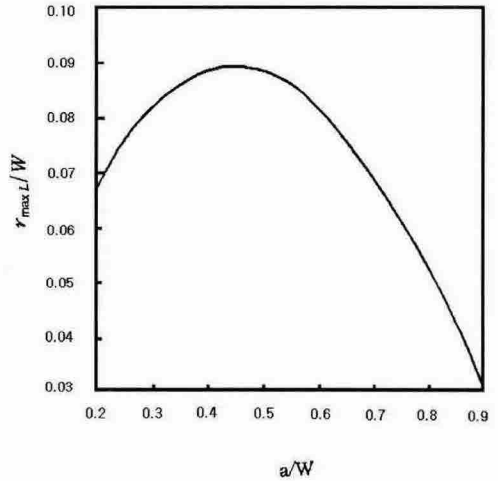


Fig. 5. r_{maxL}/W for M(T) specimens

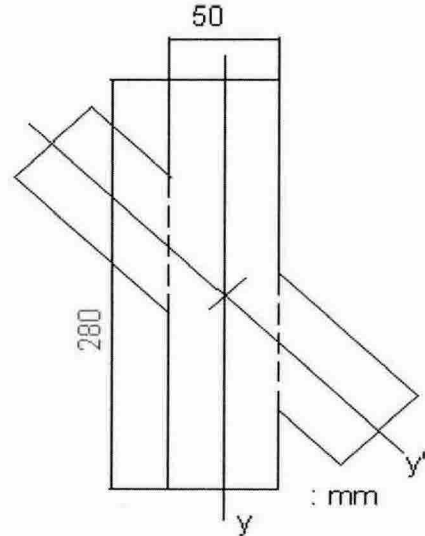


Fig. 6. Geometry of specimen

와 같이 나타낼 수 있다. 또한 식(20)은

$$\sigma_\theta \sqrt{2\pi r} = \frac{1}{2} \left(K_I (1 + \cos\theta) \cos \frac{\theta}{2} - K_{II} (3 \sin\theta) \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (35)$$

와 같이 표현할 수 있는데, $\sigma_\theta = \sigma_{YS}$ 이고, $r = r_{maxL}$ 인 경우에는 K_{maxL} 이 됨을 알 수 있다. 식(35)에서 균열 각이 β 이고, 균열 진전각이 θ_0 일 때, $\theta = \theta_0$ 를 대입하여 $K_{maxL} > \sigma_\theta \sqrt{2\pi r}$ 이 되는 작용응력 σ 를 구하면

소규모 항복조건을 만족시켜 안정 균열성장이 될 수 있다.

4. 실험 및 고찰

4.1. 시편 및 하중설정

시편에 사용된 재료는 A5052 H34 알루미늄합금이며, 시편의 형상은 Fig. 6과 같이 두께가 3mm이고, 폭이 50mm인 중앙 경사 균열 피로시편이다. y' 방향으로 하중을 작용시켜 전 균열(pre-cracking)을 넣은 후, 점선으로 표시된 절취선을 따라 시편을 절취하여, y 방향으로 하중 제어 시험을 하였다.

피로균열 진전은 1/100mm의 정밀도를 갖는 이동식 현미경으로 측정하였다.

25톤 용량의 Dynamic Universal Testing Machine (Instron Model 1332)를 사용하여 하중 제어방식으로 30Hz의 주파수에, sine파형으로 인장-인장시험을 하였다.

Fig. 5에서 $\frac{a}{W} = 0.9$ 일 때, $\frac{r_{max}L}{W} = 0.03$ 이므로, 이 보다 작은 값을 사용하면 소규모 항복조건을 만족할 수 있다. 본 연구에서는 $r=0.2mm$, 즉 $\frac{r}{w} = 0.008$ 이 되도록 하중설계를 하였다. 본 연구에서 사용된 재료의 항복강도와 시편폭을 식(33)에 대입하여 $K_{maxL} = 7.58MN/m^{3/2}$ 를 구하였다.

일축 인장하중하의 $\beta=30^\circ$ 인 경우 최대 점선 응력기준에 의하면, $\theta_0 = -59.92^\circ$ 가 되는데, 이 결과를 식(35)에 대입하여 구한 결과는 $P_{maxL} = 13.69kN$ 이며, $\beta=45^\circ$ 인 경우 $\theta_0 = -52.97^\circ$, $P_{maxL} = 9.96kN$ 이며, $\beta=60^\circ$ 인 경우 $\theta_0 = -42.66^\circ$, $P_{maxL} = 7.94kN$ 을 구할 수 있었다. 이 값들 보다 작게 하기 위하여, $\beta=30^\circ$ 일 때는 $P_{max} = 10.79kN$, $P_{min} = 1.079kN$, $\beta=45^\circ$ 일 때는 $P_{max} = 9.81kN$, $P_{min} = 0.981kN$, $\beta=60^\circ$ 일 때는 $P_{max} = 7.85kN$, $P_{min} = 0.785kN$ 으로 하였으며, 응력비 $R=0.1$ 로 하였다.

4.2. 피로균열 성장

Figs. 7-9은 최대 극소 변형에너지 밀도기준에 의한 해석 결과와 실험경로를 비교한 것으로, 예측된 피로균열 성장 경로는 식(24)와 (25)의 유한폭 판재의 응력확대계수와, 식(26)-(28)에 따르는 가상균열을 적용하여, $r=0.2mm$ 일 때의 식(13)으로 해석한 결과로써 실험결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

Fig. 10은 식(13)과 (29)에 의하여 정리한 결과로

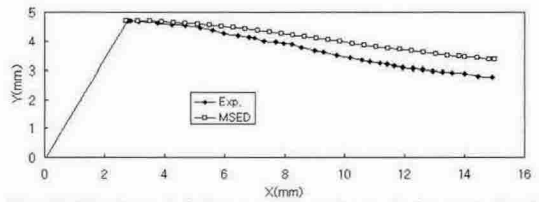


Fig. 7. Mixed mode fatigue crack growing path for an inclined crack with $\beta=30^\circ$

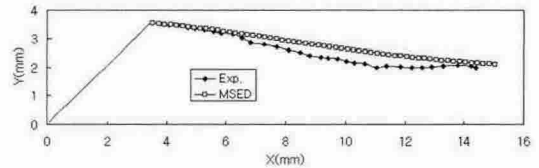


Fig. 8. Mixed mode fatigue crack growing path for an inclined crack with $\beta=45^\circ$

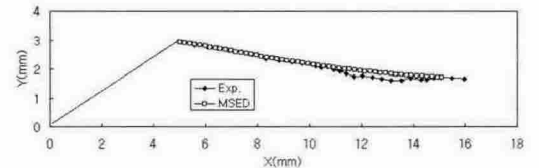


Fig. 9. Mixed mode fatigue crack growing path for an inclined crack with $\beta=60^\circ$

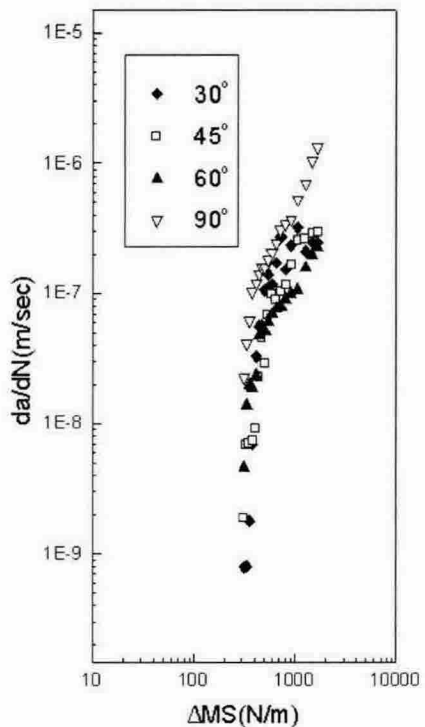


Fig. 10. da/dN-DMS plot under mixed mode loading

서 평균 균열 길이와 평균 균열 각 및 평균 진전 각을 사용하였으며, 응력확대계수는 식(30)과 (31)을 사용하여 ΔMS 를 구한 것으로, 모드 I($\beta=90^\circ$)의 경우와 비교할 때, 균열각의 변화와 관계없이 비교적 좋은 경향을 보이고 있음을 알 수 있다.

결론

이상의 연구에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 최대 극소 변형에너지 밀도기준을 피로균열성장문제에 적용방법은 모드 I결과와 비교할 때, 만족할 만한 결과를 얻었다.

2) 최대 극소 변형에너지 밀도기준에 적용한 결과 본 논문의 유한폭 판재 응력확대계수와 하중설정법은 피로시험 결과 및 해석결과와 비교할 때, 잘 일치하였다.

감사의 글 : 본 연구는 동서울대학 교내연구비 지원에 의한 결과입니다.

참고문헌

- 1) F. Erdogan and G. C. Sih, "On the Crack Extension in Plates under Plane Loading and Transverse Shear," J. Basic Engng., Trans. ASME Vol. 85, pp. 519-527, 1963.
- 2) 조명래, 최용식, 양원호, 균열의 두께가 변화하는 부재내의 혼합모드(모드 I/II) 응력확대계수, 대한기계학회논문집, Vol. 17, No. 8, pp. 1875~1882, 1993.
- 3) 정남용, 장진모, Al/Steel 이종재료의 접착이음에 대한 혼합모드의 파괴기준, 대한기계학회 논문집 A, Vol. 21, No. 8, pp. 1322-1331, 1997.
- 4) 이역섭, 류황희, 김동준, 혼합모드하중에서의 피로균열진전과 방향과 피로수명 예측, 대한기계학회논문집 A, Vol. 23, No. 9, pp. 1550-1558, 1999.
- 5) 구재민, 최소 변형에너지 밀도 기준의 모호성과 최대 극소 변형에너지 밀도 기준, 대한기계학회 논문집 A, Vol. 25, No. 7, pp. 1155-1162, 2001.
- 6) G. C. Sih, "The Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems," Int. J. of Fracture, Vol. 10, No. 3, pp. 305-321, 1974.
- 7) G. C. Sih, "Introductory Chapter : A Special Theory of Crack Propagation," Mech. of Fracture I(ed. G. C. Sih), Noordhoof Int. Publishing, Leyden, pp. XXI-XLV, 1973.
- 8) P. C. Paris and F. Erdogan, A Critical Analysis of Crack Propagation Laws, Trans. ASME, J. of Basic Engng., Vol. 88, pp. 528-535, 1963.
- 9) G.C. Sih and B.M. Barthelemy, Mixed Mode Fatigue Crack Growth Prediction, Engng. Fracture Mech., Vol. 13, pp. 439-451, 1980.
- 10) A.T. Yokobori Jr, T. Yokobori, K. Sato and K. Syoji, Fatigue Crack Growth under Mixed Modes I and II, Fatigue Fract. Engng Mater. Struct., Vol. 8, No. 4, pp. 315-325, 1985.
- 11) M. L. Williams, "On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack," J. Appl. Mech., Vol. 24, No. 1, pp. 109-114, 1957.
- 12) C. E., Feddersen, Discussion, ASTM STP 410, pp. 77-79, 1967.
- 13) W.K. Wilson, J. bas. Engng., Vol. 93, p. 685, 1971.