대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 1 호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol 4, No 1, 127-145 March 2002

수학교육학 용어 해설 (10)

김 연 식* 우 정 호** 박 영 배*** 박 교 식***

거짓의 재전달 원리/principle of retransmission of falsity

라카토스(Imre Lakatos)에 의하면 보조정리합체법은 결론에 대한 반례는 적어도 그 한 전제의 반례가 된다는 것에 근거한다. 이것에서 거짓이 결론에서 전제로 재전달되는 것을 거짓의 재전달 원리라 한다. 라카토스에 의하면 전면적 반례이지만 국소적 반례는 아닌 것이 이 원리를 어기면 적당한 보조정리를 증명에 첨가함으로써 그 원리를 어기지 않게 만든다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역) 수학적 발견의 논리. 서울. 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

관계적 수학/relational mathematics

스켐프(Richard R. Skemp)는 수학을 관계적 수학과 도구적 수학으로 구분하고 있다. 학생들이 수학을 관계적으로 이해했을 때의 그 수학이 바로 관계적 수학이다. 스켐프에 의하면 관계적 수학은 적어도 다음의 네 가지 장점이 있다: (1) 새로운 과제에 더 잘 적응된다. (2) 기억하기가 쉽다. (3) 그 자체가 수학교육의 목적이 될 수 있다. (4) 유기적이다.

(참고) Skemp, R. R. (1997). 황우형(역), 수학학습심리학. 서울: 민음사. (영어 원작은 1987년에 출판)

괴물배제법/method of monster barring

라카토스(Imre Lakatos)는 특이하고 극단적인 반례를 괴물이라 하고 있다. 그리고 용어의 재정의를 통해 괴물을 배제하고 추측을 보호하는 방법을 괴물배제법이라 하고 있다. 괴물배제법은 추측을 반박하는 전면적인 반례가 대두되었을 때 그에 대처하는 한 가지 방법으로, 감추어진 가정을 들추어내고 명확한 정의를 창조하여 추측을 명확히 하기 위한 자극이 되므로 유용한 잠재력을 가진다.

(참고) [1] Lakatos, I (1991). 우정호(역) 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

* 전서울대학교
** 서울대학교
*** 인천교육대학교

괴물조정법/method of monster adjustment

라카토스(Imre Lakatos)에 의하면, 괴물조정법은 추측을 반박하는 전면적 반례가 대두되었을 때 그에 대처하는 방법의 한 가지로, 그 전면적 반례를 반례로 보는 관점을 기괴하고 왜곡된 것으로 보고, 그 관점을 시정하여 반례를 예로 전환하는 방법이다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역) 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

귀납적(인) 사고 방법

귀납적인 사고 방법은 귀납(법)을 구사하는 사고 방법으로, 연역적인 해결이 안 되는 상황에서 몇 몇 자료에서 일반적인 규칙, 성질을 발견하여, 이를 근거로 당면 문제를 해결하려 할 때 이용하는 사고 방법이다. 여기서 귀납은 불완전 귀납 즉, 많은 사례에서 볼 수 있는 동일한 주장이 미지이고 종류가 같은 사례에서 성립할 것으로 보고, 그 사례의 집합에 대한 일반적인 주장을 천명하고, 보편적인 법칙을 발견하는 추리이다. 귀납적인 사고 방법에서는 몇 몇의 자료를 모은 다음 그 자료 사이의 공통인 규칙이나 성질을 찾아내어, 그 규칙이나 성질이 그 자료를 포함하는 집합에서 성립할 것이라고 추측하고, 추측한 그 일반성이 참임을 더 확실히 하기 위해 새로운 자료로 확인하는 절차를 거치게 된다. 자료를 모은 다음 그 자료를 두루 살펴보고 규칙을 찾아낼 수도 있지만, 자료를 모아가면서 일반성을 예상하고, 그 예상을 확인하면서 자료를 모아갈 수도 있다. 이런 일은 문제의 난이도와 귀납하는 사람의 역량에 좌우된다. 귀납은 추측이므로 발견한 일반성이 참임을 보이기 위해서는 연역이 이어져야 하지만 학생들의 능력을 고려하여 귀납한 것을 그대로 인정하여 이용하기도 한다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화. 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역). 서울: 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

기호화의 사고 방법

기호화의 사고 방법은 기호화를 구사하는 사고 방법을 의미한다. 본래 기호화는 기호로 나타내려는 것을 의미하지만, 기호화의 생각에서는 기호화된 것을 읽고 해석하려는 생각도 포함된다. 수량(數量)으로 나타내려는 수량화를 구사하는 사고 방법 즉, 수량화의 사고 방법과 도형으로 나타내려는 도형화를 구사하는 사고 방법은 기호화의 사고 방법에 포함시킬 수 있다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역). 서울. 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

나선형 원리/spiral principle

브루너(Jerome S. Bruner)에 의하면, 교육에서 어떤 주제를 취급한다고 할 때, 그 주제의 최종적인 형태의 취급이 가능하다고 여겨질 때까지 교육을 연기해서는 안 되며, 그 이전 단계에서 그 주제가 간단한 형태로 도입되어야 한다. 이때 그 형태는 이후의 단계에서 재구성이 가능해야 한다. 이와 같이 어떤 주제가 더 높은 학년에서 반복적으로 재구성되어 가도록,

낮은 학년에서부터 지적으로 정직하게 그리고 학생들의 사고 방식과 일치하는 방식으로 나선형을 이루어 가능한 한 일찍부터 시작되어야 한다. 이것이 나선형의 원리이다. 나선형 원리에 바탕을 두어 개발한 교육과정이 나선형 교육과정이다. 한편, 우정호에 의하면 디엔에스(Zoltan P. Dienes)의 구성의 원리는 나선형의 원리에 포함된다.

(참고) [1] Bruner, J S. (1990). 이홍우(역). 교육의 과정. 서울: 배영사. (영어 원작은 1960년에 출판). [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부. [3] 김응태 · 박한식 · 우정호(2001). 수학교육학개론 (제 2증보). 서울대학교출판부

논리주의/logicism

논리주의는 수학을 논리의 일부로 보고 모든 수학을 논리로 환원하고자 하는 수리철학이다. 논리주의의 목적은 논리학의 개념과 공리에 바탕을 둔 공리 체계로서의 수학의 개념과 이론을 만들어 냄으로서 수학 지식의 확실성을 논리의 확실성으로 환원하는 것이다. 논리주의에서 증명은 논리학의 공리와 정의로부터 수학적 명제를 이끌어내는 수단으로, 수학 지식을 논리적으로 정당화하기 위한 장치이다. 그러나 논리주의를 실현하기 위한 시도는 패러독스가 발생하게 되면서 결국 실패로 끝나게 되었다.

(참고) [1] 강문봉(1993) Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [2] 나귀수(1998). 증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색. 대한수학교육학회 논문집 8(1). 351-364.

단순화의 사고 방법

단순화의 사고 방법은 단순화를 구사하는 사고 방법을 의미한다. 몇 개의 조건이 있고 그 조건 모두를 고려하는 문제에서 조건 하나 하나가 무엇인지 알지만, 처음부터 그 조건 모두를 고려한 해결은 할 수 없는 경우가 많다. 이런 경우 그 조건 가운데 몇 개를 일단 무시하고, 간단한 기본적인 경우로 손질하는 것이 단순화이다. 이를테면 조건 A, B, C가 있을 때 이 가운데 한 조건 A만에 관해 생각한 다음에 조건 B, C의 경우를 각각 단독으로 생각하고 나서, 다시 이들을 합하여 조건 A, B, C를 모두 고려하는 경우도 있다. 단순화의 사고 방법에서는 일반성을 잃지 않도록 해야 한다 원래 문제의 본질적인 조건이나 일반성이 손상될 정도로 단순화해서는 안 된다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역) 서울· 경문사 (일본어 원작은 1988년에 출판)

도구적 수학/instrumental mathematics

스켐프(Richard R. Skemp)에 의하면 학생들이 수학을 도구적으로 이해했을 때의 그 수학이 도구적 수학이다. 도구적 수학이 진정한 수학은 아니지만, 다음 세 가지 이유로 그것을 가르친다고 할 수 있다: (1) 문맥 자체로 보면, 도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 어떤 경우는 매우 쉽다. (2) 보상이 즉각적이고 명백하다. (3) 상대적으로 적은 지식이 필요하기 때문에, 어떤 사람은 종종 보다 빨리 올바른 답을 얻을 수 있다.

(참고) Skemp, R. R. (1997). 황우형(역), 수학학습심리학. 서울: 민음사. (영어 원작은 1987년에 출판)

명확화 단계/stage of explicitation

반힐레(Pierre Marie van Hiele)는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 안내 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 세 번째 단계로, 발견된 관계를 표현하는 활동을 통해 그를 명확히 하며 전문적인 용어를 학습하는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 도형의 성질에 관한 아이디어를 표현하는 활동은 이 단계에 해당한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. University of Chicago. Print ERIC Document Reproduction Service No ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986) Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 3 VA, Reston: NCTM. [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문 [5] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

모델링(modelling) [프로이덴탈]

프로이덴탈(Hans Freudenthal)에 의하면 모델링은 수학화의 한 가지로 어떤 복잡한 현실이나 이론을 그 보다 더 형식적인 수학적 처리가 가능하도록 이상화하고 단순화하는 것을 의미한다. 그리고 이를 위한 매개물이 바로 모델이다. 즉, 복잡한 현상이나 이론이 모델을 통해 더 형식적인 처리가 가능하게끔 이상화되거나 단순화되는 것이다.

(참고) Freudenthal, H (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

반례/counterexample [라카토스]

반례란 추측을 반박하는 예이다. 라카토스(Imre Lakatos)는 반례를 '국소적 반례'와 '전면적 반례'로 구분했다. 국소적 반례는 부분 추측을 반박하는 것이고 전면적인 반례는 원래의 추측 그 자체를 반박하는 것이다 라카토스에 의하면 국소적이고 전면적이지 않은 반례, 전면적이고 국소적인 반례, 전면적이고 국소적이지 않은 반례가 있다. 전면적이고 국소적인 반례를 '논리적 반례', 그리고 다른 두 반례를 '발견적 반례'라고 한다. 전면적 반례가 대두되었을 때 이에 대처하는 방법으로 괴물배제법, 예외배제법, 괴물조정법, 보조정리합체법 등이 있다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역). 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사 (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993) Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

반힐레 수준 이론/van Hiele level theory

반힐레 이론은 네덜란드의 반힐레 부부(Dina van Hiele-Geldof, Pierre Marie van Hiele)에 의해 제시된 수학 학습 이론으로, 이 이론에 따르면, 수학 학습의 과정에서 시각적 수준, 기술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역적 체계를 파악하는 수준,

논리적 법칙의 본질을 파악하는 수준의 5개 사고 수준을 구별할 수 있다. 부인은 학위를 받은 직후 사망했기 때문에, 이 이론은 실질적으로는 남편인 반힐레(Pierre Marie van Hiele)가 개발해 온 이론이라 할 수 있다. 반힐레 이론은 수학 학습에서의 사고 수준에 관한 것이기에 흔히 수학 학습 수준 이론이라 하기도 한다. 반힐레 이론은 본래 기하 학습을 염두에 두고 개발되어 온 것이나, 반힐레는 후에 이러한 생각을 일반화하여 자신의 이론이 모든 수학의 학습에 적용될 수 있다고 주장하였다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project University of Chicago. Print. ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education Orlando: Academic Press. [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 3. VA, Reston: NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

발견술/heuristics [쉔펠트]

발견술은 쉔펠트(Alan H. Schoenfeld)가 수학적 문제해결 과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개 범주 중의 하나로서, 익숙하지 않거나 비표준적인 문제의 해결에 도움이 되는 전략 또는 테크닉을 의미한다. 발견술은 문제해결에 유효한 일종의 경험칙이라 할 수 있다. 이를테면 그림 그리기, 적절한 기호 도입하기, 관련된 문제를 이용하기, 문제를 재형식화하기, 거꾸로 풀기, 검증과 입증을 위한 여러 가지 절차 등이 이 범주에 속한다. 쉔펠트는 폴리아(George Polya)가 발견술을 현대적인 형태로 되살린 것으로 보고 있다.

(참고) Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press, Inc.

발견술/heuristics [폴리아]

폴리아(George Polya)에 의하면, 발견술은 흔히 대략적으로 서술되어 있을 뿐 상세하게 제시되어 있지 않은 연구 분야의 명칭으로, 그 목표는 발견과 발명의 방법과 규칙을 연구하는 것이다. 폴리아는 현대적이고 조심성 있는 형식으로 발견술을 체계화하여, 그것을 현대적 발견술이라 하고 있다. 폴리아에 의하면 현대적 발견술에서는 문제해결 과정, 특히 그 과정에서 전형적으로 유용한 정신 조작을 이해하려고 노력한다.

(참고) [1] Polya, G. (1986). 우정호(역) 어떻게 문제를 풀 것인가. 수학적 사고 방법. 서울 천재교육. (영어 원작은 1957년에 출판) [2] 정은실(1995). Polya의 수학적 발견술 연구 서울대학교 대학원 박사 학위 논문.

발전적(인) 사고 방법

발전적인 사고 방법은 통합한 것을 더 넓은 범위에 적용하려 하거나, 하나의 결과가 얻어졌더라도 다시 더 나은 방법을 알아본다거나, 또는 이를 바탕으로 더 일반적인, 더 새로운 것을 발견하려는 사고 방법이다. 조건의 일부를 다른 것으로 대체하거나, 조건을 완화하는 것, 그리고 문제의 장면을 바꾸어 보는 것은

발전적인 사고 방법의 발로이다. 사고의 관점을 바꾸는 것도 발전적인 사고 방법의 발로이다. 발전적인 사고 방법은 더 나은 것을 알아보려는 데서 우러난다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화. 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역). 서울: 경문사 (일본어 원작은 1988년에 출판)

보조정리합체법/method of lemma incorporation

전면적 반례이지만 국소적 반례가 아닌 경우, 원래의 추측은 반박되지만 증명은 반박되지 않는다. 라카토스(Imre Lakatos)는 이 경우에 증명에 문제가 있다고 보고, 증명 분석을 통해 전면적 반례가 또한 국소적 반례가 됨을 보일 수 있다고 보고 있다. 그리고 이 분석 과정에서 감추어진 조건이나 보조 정리를 들추어내서 추측에 합체시킴으로써 추측을 개선하는 방법을 보조정리합체법이라 하고 있다. 보조정리합체법의 가장 중요한 특성은 발견의 논리와 정당화 논리의 통합이다. 라카토스는 보조정리합체법을 수학 지식 성장을 위한 최선의 방법으로 보고 있다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역). 수학적 발견의 논리 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

브루너의 가설

브루너(Jerome S. Bruner)의 가설은 그가 《교육의 과정》에서 가정한 '어떤 교과든지 지적으로 올바른 형식으로 표현하면 어떤 발달 단계에 있는 어떤 아동에게도 효과적으로 가르칠 수 있다.'를 의미한다. 브루너는 《교육의 과정》이 발간된 10년 후, 이것은 반드시 어떤 교과 내용이든지 그것을 가르치는 궁극적인 형식이 있다는 뜻이 아니라, 학생들이 배워야 할 개념이나 원리를 학생들이 파악할 수 있는 형식으로 친절하게 번역해주는 방법이 있다는 뜻이라고 말하였다.

(참고) [1] Bruner, J. S. (1990). 이홍우(역). 교육의 과정. 서울: 배영사. (영어 원작은 1960년에 출판). [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부 [3] 김응태 · 박한식 · 우정호(2001). 수학교육학개론 (재 2증보) 서울대학교출판부.

비판적 오류주의/critical fallibilism

비판적 오류주의는 포퍼(Karl Popper)가 과학적 발견의 논리를 기술하기 위해 제기한 것으로 과학 지식의 성장을 추측과 반박의 과정으로 규정하며, 모든 지식은 잠정적인 것으로 끊임없는 비판의 대상이 된다고 보는 과학철학이다. 포퍼에게 과학 지식의 성장이란 사실이나 관찰 경험의 단순한 축적이 아니라 시행착오, 곧 추측과 반박의 과정이며 제기된 과학적 이론의 비판과 폐기, 보다 나은, 보다 더 만족스러운 이론으로의 거듭된 대치를 의미한다. 비판적 오류주의에 따르면 과학 지식은 추측과 반박에 의해서 성장하며, 지식은 결코 확실성을 가질 수 없고 단지 잠정적일 뿐이다. 인간은 진리를 알 수 없으며 단지 추측할 수 있고 추측을 개선할 수 있을 뿐이다. 추측을 검사하고 추측에 대한 반박을 고려하여 추측을 강화하거나 이를 제거할 수 있는 새로운 추측을 창안하여 대체함으로써 지식의 성장이 이루어진

다. 포퍼의 비판적 오류주의는 라카토스(Imre Lakatos)의 오류주의 수리철학의 모태이다.

(참고) 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

상징적 표현/symbolic representation

상징적 표현은 브루너(Jerome S. Bruner)가 사용한 용어로 명제를 형성하고 변형하는 규칙과 법칙에 의해서 지배되는 어떤 상징 체계로부터 이끌어 낸 일단의 상징적 혹은 논리적 명제에 의한 표현을 말한다. 이를테면 추상적인 개념, 원리, 법칙을 나타내는 문장이나 수식, 여러 가지 기호 특히 문자 변수로 표현하는 것이 이에 해당한다. 상징적 표현은 가장 추상적이고 가장 효과가 큰 방법으로, 그 힘은 하나하나의 기호에 있지 않고 기호 체계 즉, 언어로서의 기호의 결합에서 생긴다.

(참고) [1] Resnick, L B. & ford, W. W. (1995) 구광조 · 오병승 · 전평국(역), 수학학습심리학. 서울: 교우사 (영어 원작은 1981년에 출판) [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부. [3] 김응태 · 박한식 · 우정호 (2001). 수학교육학개론 (제 2증보). 서울대학교 출판부.

소박하게 추측하기/naive guessing

라카토스(Imre Lakatos)에 의하면 소박하게 추측하기는 문제로부터 출발하여 그에 대한 해답으로 추측이 뒤따르고, 검사 사고실험인 분석을 통과하면 증명 사고실험인 종합이 시도되고, 그리고 반례를 통해 추측을 개선해 가는 패턴을 의미한다. 수학적 발견술은 소박하게 추측하기와 연역적으로 추측하기의 두 패턴을 따른다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역) 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문. [3] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

수직적 수학화/vertical mathematising

수직적 수학화는 트레퍼스(Adrian Treffers)가 사용한 용어로 수학적 대상을 수학적 체계 내에서 가공 처리하는 것 즉, 수학적인 것을 더 높은 수준으로 전환하는 것을 의미한다. 이를테면 덧셈의 성질이 일반화되어 법칙으로 인식되는 것은 수직적 수학화이다. 프로이덴탈(Hans Freudenthal)에 의하면 수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작하지만, 수학적 경험이 축적되면 수학 자체의 수학화인 수직적 수학화가 시작된다. 트레퍼스에 의하면 수평적 수학화와 수직적 수학화가 모두 빈약한 수학교육은 기계론적 수학교육이고 그 반대는 현실주의적 수학교육이다. 수직적 수학화는 충실하지만 수평적 수학화가 빈약한 수학교육은 구조주의적 수학교육이며, 그 반대는 경험주의적 수학교육이다.

(참고) [1] Treffers, A. (1987) Tree Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company [2] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

수평적 수학화/horizontal mathematising

수평적 수학화는 트레퍼스(Adrian Treffers)가 사용한 용어로 문제 장면을 수학적 문제로 변형하는 것을 의미한다. 이를테면 구체물을 세어 2+7=7+2임을 인식하는 것은 수평적 수학화이다. 프로이덴탈(Hans Freudenthal)에 의하면 수학화는 관찰, 실험, 귀납, 유추 등을 통하여 현실을 수학적 수단으로 조직하는 수평적 수학화로 시작한다.

(참고) [1] Treffers, A. (1987). Tree Dimensions' A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

수학교육학/didactics of mathematics

우정호에 의하면 수학교육학은 모든 형태의 수학교육에 대해서 그 근거와 문제점을 연구의 대상으로 하는 교과교육학으로 순수수학, 수학기초론, 응용수학, 심리학, 수학인식론, 수학사 등을 고려해야 하는 종합과학이다. 특히 수학교육학은 교육학, 심리학, 철학이 딸린 학문으로, 한편으로는 수학의 본성을 교육학, 심리학, 철학 가운데 드러내고, 다른 한편으로는 교육학, 심리학, 철학의 본성을 수학 가운데 드러내야 한다.

(참고) [1] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부. [2] 김응태 · 박한식 · 우정호(2001). 수학교육학개론 (제 2증보). 서울대학교출판부.

신념 체계/belief system

신념 체계는 쉔펠트(Alan H. Schoenfeld)가 수학적 문제해결 과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개 범주 중의 하나로서, 개인의 수학세계관 즉, 개인의 문제해결 행위를 결정짓는, 그러나 반드시 의식적일 필요는 없는 여러 가지 요인들의 집합체를 의미한다. 개인의 수학세계관에는 자기 자신, 문제해결과 관련된 환경, 주제, 그리고 수학 그 자체에 관한 것이 포함될 수 있다. 개인은 그 수학세계관에 바탕을 두어 수학과 수학적 과제에 접근하며, 개인이 선택하는 방법을 결정짓는다. 신념 체계가 문제해결을 위한 맥락을 확립하게 되며, 그 안에서 자원, 발견술, 그리고 통제가 작용하게 된다.

(참고) Schoenfeld, A. H. (1985) Mathematical Problem Solving Orlando' Academic Press, Inc.

심상/mental object

심상(心象)은 프로이덴탈(Hans Freudenthal)이 사용한 용어로 개념 형성의 근원이 되는 자발적 관념 또는 직관 등과 같은 것이다. 프로이덴탈은 이 심상이 피시바인(E. Fischbein)이 직관이라 부르는 것이라 하고 있다. 프로이덴탈에 의하면 수학화의 과정에서는 일반적으로 현상의 조직 수단을 먼저 직관적으로 인식하여 심상을 구성한다. 즉, 심상은 본질의 일차적 형태이다. 개념은 본질의 이차적 형태이다. 이를테면 탁자, 방문, 신문지, 책, 침대 등의 직사각형 모양을 한 현상으로부터 심상으로서의 직사각형을 구성하고, 다시 직사각형의 개념을 형성하는 것이다.

(참고) [1] Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. [2] Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. [3] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [4] 우정호(1994) H Freudenthal의 현상학적 수학교육론 연구. 대한수학교육학회 논문집 4(2). 93-128. [5] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

안내 단계/stage of information

반힐레(Pierre Marie van Hiele)는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 안내 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 첫 번째 단계로, 자료를 제시받고 필요한 논의를 통해 탐구할 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 예와 예가 아닌 것을 조사하는 활동은 이 단계에 해당한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. University of Chicago. Print. ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press. [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3. VA, Reston: NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

연역적(인) 사고 방법

연역적인 사고 방법은 연역을 구사하는 사고 방법이다. 연역은 전제로 주어진 몇 몇의 명제로부터 논리적인 규칙을 사용하여 필연적인 결론을 엄밀하게 도출하는 방법이다 좁은 의미로는 일반적인 주장으로부터 특수한 주장으로 나아가는 추리를 의미한다. 일반적으로 학교수학에서 그 근거가 되는 명제 즉, 공리를 미리 분명히 정해 놓고 출발하는 것은 아니다. 연역적인 사고 방법에는 여러 가지 유형이 있다. 구하려는 것이 얻어졌다고 하면 어떤 사실이 성립하지 않으면 안 되는가 라는 식으로 사고를 전개하는 해석적인 사고 방법과 주어진 조건으로부터 무엇을 말할 수 있는지 또는 어떤 사실이 성립하는지 알아보려는 방향으로 사고를 전개하는 종합적(總合的)인 사고 방법, 집합에 주목하고 그 기본 연산이나 관계를 포착하여 그것이 어떤 조건을 만족하는가를 분명히 하려는 구조적인 사고 방법, 그리고 무정의 용어와 공리를 선정하고 새로운 용어를 도입하면서 정리를 증명하는 공리적인 사고 방법은 모두 연역적 사고 방법에 속한다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역) 서울· 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

연역적으로 추측하기/deductive guessing

라카토스(Imre Lakatos)에 의하면 연역적으로 추측하기는 반례에 의해서 반박된 추측을 검사할 때, 문제와 함께 이미 마음속에 존재하게 되는 아이디어로부터 출발하여 일련의 연역적

과정을 거쳐 새로운 추측에 이르게 되는 패턴을 의미한다. 여기서 추측은 연역적 수단에 의해 제기되므로 동시에 증명되지만, 최종적인 것은 아니다. 연역적으로 추측하기는 연역의 특성상 내용의 증가를 수반한다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역). 수학적 발견의 논리. 서울 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

영상적 표현/iconic representation

영상적 표현은 브루너(Jerome S. Bruner)가 사용한 것으로 어떤 개념을 완전히 정의하지는 않지만 그것을 나타내는 일단의 대략적인 이미지나 그림에 의한 표현을 의미한다. 이를테면 도형을 나타내는 그림, 수도(數圖), 벤다이어그램, 통계적인 그래프, 함수의 그래프, 대응도, 수형도, 플로우차트(flow chart), 여러 가지 도해 등과 같은 그림 표현이 이에 해당한다. 영상적 표현은 일종의 기하학적 언어로 생각할 수 있는 매우 가치 있는 수학적 사고 수단이다.

(참고) [1] Resnick, L B. & ford, W W (1995). 구광조·오병승·전평국(역), 수학학습심리학. 서울. 교우사 (영어 원작은 1981년에 출판) [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부. [3] 김응태·박한식·우정호(2001). 수학교육학개론 (제 2증보). 서울대학교출판부.

예외배제법/exception-barring method

라카토스(Imre Lakatos)에 의하면 예외배제법은 추측을 반박하는 전면적 반례가 대두되었을 때 그에 대처하는 방법의 한 가지로, 괴물배제법을 개념의 제한으로 추측을 보호하는 기술로서 사용하지 않고, 괴물을 배제하여 원래의 추측이 타당한 영역을 구하는데 사용할 때 그것을 예외배제법이라 하고 있다. 즉, 예외배제법은 원래의 추측은 예외를 제외한 전 영역에서는 참이 되므로 예외에 대하여 언급한 조건 절을 첨가하여 원래의 추측을 참인 명제로 바꾼다. 이 방법은 과소 과대 일반화를 초래할 위험성이 있으나 추측을 개선하는데 도움을 줄 수 있다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역) 수학적 발견의 논리. 서울 민음사. (원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

오류주의/fallibilism

오류주의는 수학은 준경험 과학이며 수학 지식은 추측에 불과하다고 보는 라카토스(Imre Lakatos)의 견해에 바탕을 둔 수리철학이다. 라카토스는 포퍼(Karl Popper)의 비판적 오류주의에 입각하여, 수학 지식의 성장을 증명과 반박의 논리로 설명하고 있다. 라카토스에 의하면 수학은 의심의 여지없이 확립된 정리의 수가 단조롭게 증가하면서 성장하는 것이 아니라 추측-증명-반박의 논리에 의한 추측의 끊임없는 개선을 통해 성장한다. 즉, 수학은 추측과 반박에 의해 성장하는 준경험과학이며, 수학 지식은 반박되지 않을 때 잠정적으로 확인될 수 있을 뿐인 추측에 불과하다 오류주의 대신 준경험주의(quasi-empiricism)라고 하기도 한다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역). 수학적 발견의 논리. 서울 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 나귀수(1998). 증명의 수리철학적 분석과 지도방향탐색. 대한수학교육학회논문집 8(1). 351-364 [4] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

유추적(인) 사고 방법

유추적인 사고 방법은 유추를 구사하는 사고 방법으로 어떤 사상(事象) A에 대해 그것의 성질 또는 법칙 P를 알고 싶으나 모른다고 할 때, 이미 알고 있는 사상 중에서 그 사상과 닮은 사상 A′을 생각해 내어, A′에서 성립하는 성질 또는 규칙 P′과 유사한 P가 원래의 사상 A에서 성립하지 않는지 알아보려는 사고 방법이다. 여기서 유추는 유비추리(類比推理)로 어떤 특수한 경우에서 다른 어떤 특수한 경우에 이르는 추리를 의미한다. 그런데 언제나 바른 것만을 유추한다고 볼 수는 없으므로 유추하고 나서 반드시 그것을 확인하지 않으면 안 되지만, 학생들의 능력을 고려하여 유추한 것을 그대로 인정하여 이용하기도 한다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화. 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역). 서울: 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

일반화의 사고 방법

일반화의 사고 방법은 일반화를 구사하는 사고 방법을 의미한다. 일반화는 내포를 고정시키고 이에 해당하는 외연을 명확히 하는 것으로, 문제해결을 위해 그 문제에서 볼 수 있는 일반성을 알아내거나, 또는 해결된 문제를 바탕으로 그 문제를 포함하는 집합 전체에서 성립되는 일반성을 알아내는 것이다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역) 서울 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

자원/resources

자원은 쉔펠트(Alan H. Schoenfeld)가 수학적 문제해결 과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개 범주 중의 하나로서, 각 개인이 가지고 있으면서 특정한 문제의 해결에 동원할 수 있는 수학적 지식의 전체를 의미한다. 이를테면 특정한 영역에 관한 직관과 비형식적 지식, 사실, 알고리즘적 절차, 비알고리즘적이지만 기계적으로 수행할 수 있는 절차, 그리고 특정한 어느 영역에서의 작업에 필요한 규칙에 관한 이해 즉, 명제적 지식 등이 이 범주에 속한다.

(참고) Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving Orlando. Academic Press, Inc

자유로운 탐구 단계/stage of free orientation

반힐레(Pierre Marie van Hiele)는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 안내 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 네 번째 단계로, 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 되는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 한 종류의 도형의 성질을 알고 다른 도형에서 이 성질을 찾아보는 활동은 이 단계에 해당한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. University of Chicago Print. ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education Orlando Academic Press. [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 3 VA, Reston: NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부.

전형적인 예/paradigm

프로이덴탈(Hans Freudenthal)에 의하면 전형적인 예는 곧바로 그 구조에 대한 깊은 통찰을 제공해 주면서 동형인 다른 상황에 신속하고 정확하게 전이 가능한 예를 의미한다. 프로이덴탈은 수학 개념, 원리, 법칙이 여러 가지 예의 관찰로부터 귀납적으로 획득되는 것, 즉 귀납적 이해로 획득되는 것이 아니라, 전형적인 예로부터 곧바로 구조를 파악하는 각지(覺知)를 통해 획득된다고 주장하고 있다.

(참고) [1] Freudenthal, H. (1978). Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematical Education. Dordrecht: D Reidel Publishing Company. [2] 우정호(1994). H. Freudenthal의 현상학적 수학교육론 연구. 대한수학교육학회 논문집 4(2). 93-128. [3] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부

제 1수준/first level

제 1수준은 반힐레(Pierre Marie van Hiele)가 기하 학습 과정에서 설정한 첫 번째의 사고 수준을 의미한다. 반힐레는 1981년 이전에는 제 1수준을 제 0수준이라 하였다. 또한 반힐레는 이 수준을 '시각적 수준'이라 하고 있기도 하다. 이 수준에서는 주변 대상을 도형이라는 정리 수단에 의해 파악하는 단계로, 기본적인 도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 설명 없이 전체로서 시각적으로 판별한다. 이를테면 이 수준에서는 정사각형과 직사각형을 서로 다른 것으로 파악한다. 이와 같이 시각적 판단을 하기에 이 수준의 특징을 인식(recognition)으로 보기도 한다.

(참고) [1] Usiskin, Z (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry CDASSG Project. University of Chicago Print. ERIC Document Reproduction Service No ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education Orlando: Academic Press [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 3. VA, Reston: NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부.

제 2수준/second level

제 2수준은 반힐레(Pierre Marie van Hiele)가 기하 학습 과정에서 설정한 두 번째의 사고 수준을 의미한다. 반힐레는 1981년 이전에는 제 2수준을 제 1수준이라 하였다. 또한 반힐레는 이 수준을 '기술적 수준'이라 하고 있기도 하다. 이 수준에서는 주변 대상의 정리 수단이었던 도형이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요

소와 성질에 대한 비형식적인 분석을 통해 도형을 파악한다. 이를테면 직사각형의 대각선의 길이는 같다든가 또는 마름모의 네 변의 길이가 같다는 등의 성질을 말할 수 있지만, 도형이나 그 성질을 명확히 상호 관련지을 수는 없다. 이와 같이 도형에서 외형적으로 찾을 수 있는 요소를 기술하기에 이 수준의 특징을 분석(analysis)으로 보기도 한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. University of Chicago. Print. ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education Orlando: Academic Press. [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3. VA, Reston: NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부.

제 3수준/third level

제 3수준은 반힐레(Pierre Marie van Hiele)가 기하 학습 과정에서 설정한 세 번째의 사고 수준으로, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 수준이다. 반힐레는 1981년 이전에는 제 3수준을 제 2수준이라 하였다. 또한 반힐레는 이 수준을 '이론적 수준'이라 하고 있기도 하다. 이 수준에서는 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리 수단이 된다. 도형의 여러 가지 성질 및 도형 사이의 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 이를테면 모든 정사각형은 직사각형임을 이해한다. 그러나 도형의 성질을 논리적으로 증명하지는 못한다. 즉, 간단한 연역이 있을 수 있지만 증명이 이해되지는 못하며, 단지 도형과 그 관련성을 정렬할 수 있기에 이 수준의 특징을 정렬(order)로 보기도 한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry CDASSG Project University of Chicago. Print ERIC Document Reproduction Service No ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 3. VA, Reston: NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문 [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부.

제 4수준/fourth level

제 4수준은 반힐레(Pierre Marie van Hiele)가 기하 학습 과정에서 설정한 네 번째의 사고 수준으로, 형식적인 연역 체계를 파악하는 수준이다. 반힐레는 1981년 이전에는 제 4수준을 제 3수준이라 하였다. 이 수준에서는 명제가 연구의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 전체 기하의 연역 체계를 파악한다. 이를테면 삼각형의 내각의 합은 180도라는 명제를 증명할 수 있다 그래서 이 수준의 특징을 연역(deduction)으로 보기도 한다. 그러나 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하며, 다른 공리 체계의 가능성을 이해하지는 못한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project University of Chicago. Print. ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight A Theory of Mathematics Education Orlando: Academic Press. [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3. VA, Reston NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

제 5수준/fifth level

제 5수준은 반힐레(Pierre Marie van Hiele)가 기하 학습 과정에서 설정한 다섯 번째의 사고 수준으로, 논리적 법칙의 본질을 통찰하는 수준이다. 반힐레는 1981년 이전에는 제 5수준을 제 4수준이라 하였다. 이 수준에서는 기하학 체계 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있고, 힐버트(David Hilbert)류의 기하의 형식적 엄밀성을 파악한다. 공리의 무모순성, 독립성, 완전성과 같은 공리 체계의 성질을 이해한다. 그래서 이 수준의 특징을 엄밀(rigor)로 보기도 한다. 반힐레에 의하면 제 5수준 이상은 학교수학과 무관하며, 그 자신도 제 5수준에 대해서는 상세하게 설명하고 있지 않다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982). van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. University of Chicago. Print ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education Orlando: Academic Press. [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 3 VA, Reston NCTM [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문 [5] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부.

제한된 탐구 단계/stage of guided(or bound) orientation or exploration

반힐레(Pierre Marie van Hiele)는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다. 안내 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 두 번째 단계로, 제시된 자료를 통해 탐구 분야를 연구하면서 그 진행 방향을 감지하고 탐구 분야의 구조가 점진적으로 파악되는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우 접거나, 측정하기, 대칭 찾기 등은 이 단계에 해당한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982) van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry CDASSG Project University of Chicago Print ERIC Document Reproduction Service No ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education Orlando: Academic Press. [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988) The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph 3. VA, Reston: NCTM. [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문 [5] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부.

중간 언어/middle language

중간 언어는 브루너(Jerome S. Bruner)가 《교육의 과정》에서 소개한 용어로, 본래는 우즈 호울(Woods Hole) 회의에서 사용한 용어이다. 이 회의에서는, 이를테면 물리학자들의 발견을 학생들에게 전달해주는 언어라는 뜻으로 '중간 언어'라는 용어를 사용하였다. 브루너는 물리학을 배우는 학생들은 물리학자들이 하듯이 물리 현상을 탐구해야 하는데, 그렇게 하기보다는 물리학의 탐구 결과로 얻은 여러 가지 결론에 관하여 논의하거나 교과서를 읽는 것이 중간 언어를 전달하는 것으로 보고 있다. 브루너에 의하면, 중간 언어는 교과를 이야기하는 언어가 아니라 교과에 관하여 이야기하는 언어이다.

(참고) [1] Bruner, J S. (1990). 이홍우(역) 교육의 과정. 서울: 배영사. (영어 원작은 1960년에 출판). [2] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

증명/proof [라카토스]

라카토스(Imre Lakatos)에 의하면 수학은 추측과 증명과 반박에 의해 성장하는 준경험 과학이며 수학 지식은 반박되지 않을 때 잠정적으로 확인될 수 있을 뿐인 추측에 불과하다. 라카토스는 증명을 본래의 추측을 부분 추측 즉 보조정리로 분해하여 비판과 반박의 시야를 넓히는 사고 과정이다. 라카토스에게 증명은 확실성을 갖는 정리를 증명하는 것이 아니라 추측을 개선하는 것이다.

(참고) [1] Lakatos, I. (1991). 우정호(역). 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

증명과 반박의 방법/method of proofs and refutations

라카토스(Imre Lakatos)는 보조정리합체법을 중심으로 한 수학의 발견술을 증명과 반박의 방법이라 부르고, 다음과 같이 요약하고 있다. <규칙 1> 추측을 하면 그 증명이나 반박에 착수하여라. 증명을 주의 깊게 조사하여 자명하지 않은 보조정리의 목록을 마련하여라(증명분석). 추측에 대한 반례(전면적인 반례)와 의심스러운 보조정리에 대한 반례(국소적인 반례)를 양쪽 다 찾아보아라. <규칙 2> 전면적인 반례가 있으면 반례에 의해 반박될 적절한 보조정리를 증명 분석에 추가하고 그 보조정리를 조건으로 합체시킨 개선된 추측으로 추측을 대체시켜라. 반례를 괴물이라고 보고 버려지도록 허용하지 말아라 모든 감추어진 보조정리를 명백하게 하려고 시도하여라. <규칙 3> 국소적인 반례가 있으면 그것이 또한 전면적인 반례인지 아닌지 검사해 보아라. 만약 그러하면 규칙 2를 쉽게 적용할 수 있다. <규칙 4> 만일 국소적인 반례이지만 전면적인 반례가 아닌 반례가 있으면 반증되지 않는 보조정리로 반박된 보조정리를 대체시켜 증명을 개선하도록 시도하여라. <규칙 5> 만일 어떤 유형이든 반례를 얻었다면 연역적으로 추측하기에 의하여 그것들이 더 이상 반례가 되지 않는 보다 깊은 정리를 발견하도록 시도하라

(참고) [1] Lakatos, I (1991) 우정호(역). 수학적

발견의 논리. 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부

지식의 구조/structure of knowledge

브루너(Jerome S. Bruner)는 학문은 독특한 기본적인 구조를 가지고 있다는 것을 전제로 하여, 교육과정은 그 구조를 중심으로 조직되어야 한다고 보고 있다. 브루너가 구조를 어떤 의미로 사용하고 있는지 명확한 것은 아니다. 이홍우 그리고 우정호는 브루너가 말하는 구조의 의미는 일반적 원리, 기본 개념, 일반적 아이디어의 의미로 대치될 수 있는 것으로 보고 있다. 브루너에 의하면, 학생들이 배워야 할 개념이나 원리 즉, 구조를 학생들이 파악할 수 있는 형식으로 친절하게 번역해 주는 방법이 있다. 여기서 교과의 구조를 파악한다는 것은 한 가지 현상을 여러 가지 현상과의 관련에서 이해할 수 있게 된다는 것을 말한다. 즉, 구조를 학습한다는 것은 사물이나 현상이 어떻게 관련되어 있는가를 학습하는 것이다.

(참고) [1] Bruner, J S. (1990). 이홍우(역). 교육의 과정. 서울. 배영사. (영어 원작은 1960년에 출판) [2] 홍진곤(1998) Bruner의 EIS 이론에 대한 비판적 고찰. 대한수학교육학회 논문집 8(2). 553-563. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부.

직관주의/intuitionism

직관주의는 수학의 대상이 직관에 의해 구성된다고 보는 수리철학이다. 직관은 다른 어떤 논리보다도 선행하는 것으로 수학의 기본 개념과 기본 명제를 자명한 것으로 인식하게 하는 것이다. 직관주의에서 수학 지식은 제한된 구성적 논리에 기초한 구성적 증명에 의해 확립되며, 수학적 대상의 의미는 그것이 구성되는 과정에 의존하게 된다. 즉, 직관주의자들은 직관적으로 안전한 구성적 방식을 이용하여 수학적 지식을 이끌어 냄으로써 그 확실한 기초를 제공할 수 있다고 생각하였다 직관주의자들은 논리주의에서 직면하게 되었던 패러독스를 피할 수는 있었지만, 수학의 내용을 지나치게 제한하는 오류를 범함으로써 고전수학의 많은 부분을 포기하는 결과를 가져 왔다.

(참고) [1] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [2] 나귀수(1998). 증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색. 대한수학교육학회 논문집 8(1). 351-364.

초등화/elementarisation

프로이덴탈(Hans Freudenthal)은 고등수학의 일부를 학교에서 교과로 반영하기 위해 낮은 수준으로 각색하는 것을 나타내기 위해 초등화(初等化)라는 표현을 사용하였다. 프로이덴탈은 각색하는 과정에서 단순화하는 것은 좋은 일이지만 수학적 이론의 위대한 아이디어를 파괴하는 그리고 단지 피상적인 특징만을 모방하는 것은 잘못된 초등화라고 지적하고 있다. 즉, 프로이덴탈은 비수학적인 것으로의 초등화가 아닌 전수학적(premathematical)인 것으로의 초등화이어야 함을 주장하고 있다.

(참고) [1] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 박사학위논문. [2] Freudenthal, H. (1973) 'What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education' A. G. Howson (ed) Developments in Mathematical Education (Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education). Cambridge: Cambridge University Press pp 101-114.

추상화의 사고 방법

추상화의 사고 방법은 추상화를 구사하는 사고 방법을 의미한다. 추상화는 하나 또는 몇 개의 성질을 끄집어내는 추상과 비본질적, 특수적, 그리고 개별적인 구체성을 버리는 사상(捨象)을 의미한다. 추상화된 성질을 사용하여, 이 성질이 있는 것과 없는 것을 판별하거나 추상화된 성질을 사용하려는 구체화를 구사하는 사고 방법 즉, 구체화의 사고 방법과 몇 개의 사상 사이의 관계를 알아볼 때 이들 사상에 부수된 여러 조건을 이상적인 상태로 간주하려는 이상화를 구사하는 사고 방법 즉, 이상화의 사고 방법은 추상화의 사고 방법에 속한다. 이상화의 사고 방법에서는 일반성을 잃지 않도록 해야 한다. 한편, 많은 조건 가운데서 몇 개의 조건을 추출하여 그 조건을 규정짓거나 애매한 조건을 명확히 하려는 사고 방법 즉, 조건을 명확히 하려는 사고 방법도 추상화의 사고 방법에 속한다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역). 서울 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

추측/conjecture

라카토스(Imre Lakatos)에 의하면 추측은 문제에 대해 제안된 해답으로, 확인과 증명에 앞서며 문제로부터 생긴다. 즉, 문제를 풀기 위한 시도를 하는 가운데 추측을 하게 된다. 이 추측은 어떤 심리적인 기대에 의해 인도된 것으로 검사가 뒤따른다. 오류주의에서는 귀납에 의한 일반화로서의 추측을 거부한다

(참고) [1] Lakatos, I (1991). 우정호(역). 수학적 발견의 논리. 서울: 민음사. (영어 원작은 1976년에 출판). [2] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [3] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

통제/control

통제는 쉔펠트(Alan H. Schoenfeld)가 수학적 문제해결 과정의 분석을 위해 도입한 틀을 구성하는 네 개 범주 중의 하나로서, 자원과 전략의 선정과 이행에 관한 전체적인 결정 행위를 의미한다. 이를테면 계획, 모니터와 평가, 의사결정, 그리고 의식적인 메타인지적 행동 등이 이 범주에 속한다.

(참고) Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando: Academic Press, Inc

통합 단계/stage of integration

반힐레(Pierre Marie van Hiele)는 사고 수준의 비약을 위해서는 다섯 단계로 이루어진 교수 프로그램이 필요하다고 보았다 안내 단계는 이 교수 프로그램을 구성하는 다섯 번째 단계로, 탐구 활동을 개관하여 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약 일보 전에 이르게 되는 단계이다. 이를테면 제 1수준에서 제 2수준으로 가는 경우, 도형의 성질을 요약하는 활동은 이 단계에 해당한다.

(참고) [1] Usiskin, Z. (1982) van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project University of Chicago. Print ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288. [2] van Hiele, P. M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education Orlando: Academic Press [3] National Council of Teachers of Mathematics(1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents Journal for Research in Mathematics Education Monograph 3. VA, Reston: NCTM. [4] 박교식(1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사 학위 논문. [5] 우정호(2000) 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

통합적(인) 사고 방법

통합적인 사고 방법은 많은 사상을 더 넓은 관점에서 그들의 본질적인 공통성을 추상하여, 그들을 모두 같은 것으로 볼 수 있게 통합해 나가려는 사고 방법이다. 이를테면 사상 A, B, C가 있을 때 그것을 더 넓고 높은 관점에서 보아, 공통적인 성질을 찾아내어 D로 통합하려는 사고 방법이다. 그렇게 하는 대신 A, B를 C의 특수한 경우로 포괄하려는 것도 통합적인 생각이다. 또, B를 A에 포함시키고, 다시 C를 A에 차례 차례로 포함시켜 종합해 나가는 확장적인 사고 방법도 통합적인 사고 방법에 해당한다. 확장적인 사고 방법은 주로 어떤 사상이 어떤 범위에서는 성립하지만, 성립하지 않는 예외가 있을 때 그 예외를 없애기 위해 그 사상의 해석을 확장해 나가기 위해 구사된다.

(참고) 片桐重男(1992). 수학적인 생각의 구체화. 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역) 서울: 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

특수화의 사고 방법

특수화의 사고 방법은 특수화를 구사하는 사고 방법을 의미한다. 특수화는 어떤 사상의 집합에 관한 고찰에서 그 집합에 포함되는 더 작은 집합이나 한 사상에 관해 생각하는 것이다. 특수화는 문제를 명확히 파악할 필요에서, 또는 자신의 능력에 맞는 그리고 스스로 관련이 있는 문제로 손질하려 할 때 행해진다.

(참고) 片桐重男(1992) 수학적인 생각의 구체화. 이용률 · 성현경 · 정동권 · 박영배(역). 서울: 경문사. (일본어 원작은 1988년에 출판)

플라톤주의/platonism

플라톤주의는 플라톤의 이데아론에 바탕을 둔 것으로 수학의 대상을 인간의 활동과는 전혀 무관하게 존재하는 영구 불멸의 완전한 실재 즉, 이데아로 보는 수리철학이다. 플라톤주의에 따르면 수학을 한다는 것은 이미 존재하는 수학적 대상의 성질과 관계를 발견하는 과정이다. 플라톤주의에서 증명은 수학 지식의 절대적 진리성을 정당화하기 위한 유일한 방법으로서, 수학 명제가 참임을 보증하는 이성에 근거한 핵심적인 방법으로 기능하였다. 그러나 플라톤주의는 비유클리드 기하학의 출현으로 그 빛을 잃었다.

(참고) [1] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [2] 나귀수(1998). 증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색. 대한수학교육학회 논문집 8(1) 351-364.

현실/reality

프로이덴탈(Hans Freudenthal)의 안내된 재발명 방법은 학습자의 현실로부터 수학화 경험을 시킴으로써 현상을 수학적 수단으로 조직하는 지혜를 얻게 하려는 것이다. 여기서 학습자의 현상이라는 것은 생활 사태뿐만 아니라 학습자의 물리적, 사회적, 정신적인 세계를 총칭하며 수학화의 진전과 함께 점차 확대되는 것으로, 한 개인이 어떤 단계에서 상식에 입각하여 현실적인 것으로 받아들이는 것이다. 상식이 다른 사람들에게는 현실도 서로 다를 수밖에 없고, 같은 사람인 경우에도 상식의 수준이 높아지면 현실 역시 달라지게 된다. 현실이 변하는 한 수학화 역시 계속된다. 프로이덴탈에 따르면 수학을 구체적인 문맥을 통해 수학화로 지도함으로써 현실과의 관련성이 적재된 풍부한 의미를 갖는 수학이 되어 적용 가능성이 보장된다.

(참고) [1] Freudenthal, H. (1991) Revisiting Mathematics Education Dordrecht: Kluwer Academic Publishers [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.

형식주의/formalism

형식주의는 수학을 아무런 의미도 부여되지 않는 기호의 나열에 불과한 형식적 체계로 규정하는 수리철학이다. 형식주의자들은 수학을 의미가 배제된 기호의 형식적 계산으로 대치함으로써 의미를 포기하는 대가로 무모순성을 얻고자, 엄밀한 연역적 증명을 강조하였다. 그러나 형식주의자들의 노력은 임의의 수학 체계의 무모순성은 입증될 수 없으며, 어떠한 무모순인 공리 체계도 필연적으로 불완전하다는 괴델(Kurt Godel)의 불완전성 정리에 의해 좌절되었다.

(참고) [1] 강문봉(1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구. 서울대학교 대학원 박사학위 논문. [2] 나귀수(1998). 증명의 수리철학적 분석과 지도 방향 탐색. 대한수학교육학회 논문집 8(1) 351-364.

활동적 표현/enactive representation

활동적 표현은 브루너(Jerome S. Bruner)가 사용한 용어로서 어떤 대상을 적절한 일련의 행동을 통하여 표현하는 것을 의미한다. 이를테면 어린 아동은 저울대의 원리에 근거하여 명백하게 행동할 수 있으며 시소를 조종할 수 있다. 아동은 자기 쪽을 더 내려가게 하려면 받침대로부터 더 멀리 물러나야 한다는 것을 안다. 즉, 아동은 저울대의 원리를 행동적으로 표현하고 있는 것이다.

(참고) [1] Resnick, L. B. & Ford, W. W. (1995) 구광조・오병승・전평국(역), 수학학습심리학. 서울: 교우사 (영어 원작은 1981년에 출판) [2] 우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법 서울대학교출판부. [3] 김응태・박한식・우정호 (2001) 수학교육학개론 (제 2증보). 서울대학교 출판부.