대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 1 호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.1, 111-125. March 2002

‘문제해결’ 관점에서의 GSP활용

김 남 희*

Ⅰ. 머리말

오늘날 수학교육의 현장에서는 테크놀러지의 효율적인 활용과 그 효과에 관심이 모아지고 있다. 미수학교사협의회에서는 현대 정보화 사회에서 수학적 소양의 중요성이 더욱 증대되었음을 지적하면서 학생들의 ‘수학적 힘’의 획득을 보장하기 위해서는 문제해결능력을 중시하고 수학적인 문제를 탐구하는 과정에서 계산기와 컴퓨터를 적절히 활용하도록 제안하고 있다(NCTM, 1992). 이러한 제안은 2000년에 발행된 NCTM의 「학교수학의 원리와 규준(Principles and Standards for School Mathematics」에서 ‘테크놀러지의 원리’로 더욱 구체화되어 제시되고 있다(황혜정 외 5인, 2001, p.110).

우리 나라 제 7차 수학과 교육과정에서도 계산기, 컴퓨터 및 구체적 조작물의 활용을 적극 권장하고 있다. 수학교육학회의 연구논문발표대회에서는 독립적인 테크놀러지 관련 분과가 생겨나고 있으며, 수학교사들을 위한 각종 워크샵도 주로 특정 테크놀러지의 연수 활동 내용으로 구성되고 있다. 최근 교육부의 지원으로 힘입어 각 교실에 대형 모니터와 컴퓨터가 보급되어 있는 상황에서 현장의 수학교사들 사이에는 수학관련 프로그램을 배우고, 이를 수업에 활용하려는 움직임도 날로 활발해지고 있다. 이러한 실정에서 수학수업에 컴퓨터를 효과적으로 활용할 수 있는 방안을 수학교육연구에서 제시하는 일이 대단히 시급하고도 중요한 일이 아닐 수 없다.

현재 우리 나라 수학교사들에게는 Maple, Gsp, TI-92 Plus, Logo, Mathematica, Excel, Poly, Wingeom, Grafeq,...등의 여러 테크놀러지가 소개되고 있으며 이 중에는 학교현장에서 수학교사들에 의해 다양하게 활용되고 있는 것도 적지 않다.

본 연구에서는 많은 수학교사들에게 알려져 있고 비교적 학교현장에 많이 보급되어 사용[1] 되고 있는 평면 도형 프로그램인 GSP(Geometer's SketchPad)를 논의의 대상으로 하여 수학교육적 측면에서 그 활용가능성을 보이고자 한다. 최근 2-3년 동안 중등수학교사들의 활발한 연구에 의해 GSP관련 교수-학습자료는 많이 제공되어 왔다. 그러나 그 대부분이 GSP 메뉴 사용법과 간단한 예제 다루기, 중고등학교에서 활용될 수 있는 내용을 구현한 GSP파일 소개 및 그 파일을 만드는 절차에 그치고 있는 경우가 많다.

본 연구에서는 GSP 학습-자료들을 가지고

---

* 전주대학교

1) 최근 현장의 수학교사들은 GSP연수를 받거나 스스로 공부하여 GSP를 간단한 도형그리기에서부터 학습지 만들기, 시험문제에 그림을 그리기 위한 도구로 나아가 수학수업내용을 풍부하게 하기 위한 수업보조자료로 다양하게 활용하고 있다.

학생들의 문제해결능력을 배양하고 그것을 수학적 문제를 탐구하는 과정에 활용하는 관점을 제시하고자 한다. 최근 수학교육에서 강조하고 있는 문제해결력 육성에 GSP가 얼마나 도움을 줄 수 있는가에 초점을 두고, G. polya가 제시하고 있는 문제해결단계에 GSP가 활용되는 구체적인 사례들을 검토하였다. 폴리아가 제시하고 있는 수학적 문제해결 과정의 4단계 중에서 문제의 이해, 해결 계획의 수립, 반성단계에서 GSP가 활용될 수 있음을 보이고 수학교사가 GSP를 수업에 활용하고자 할 때에는 학생의 문제해결에 어느 단계에서 도움을 주고자 하는 것인지에 대한 명확한 이해와 준비가 필요함을 강조하고자 한다. 특별히 '해결 계획의 실행'단계에서의 GSP활용 내용은 다루지 않을 것이다. 그 이유는 GSP가 수학적 개념 이해의 어려움을 완화시켜주고 직관적인 탐구활동을 가능하게 해주며 수학의 역동적이고도 발생적인 측면을 부각시켜 사고력 중심의 수학 학습을 도와줄 수는 있지만 궁극적으로 수학문제해결의 실행부분까지 컴퓨터에 의한 학습으로 구성해 버린다면 수학을 배우는 학생들은 자신의 행동에 대한 반성적 사고를 경험할 기회를 갖지 못하게 되기 때문이다[2].

II. '문제해결'과 GSP

1. G. Polya의 '문제해결'

수학의 문제해결단계에서 GSP의 활용 문제를 논의하기 위해서는 먼저 폴리아의 문제해결 과정에 대한 이해가 필요하다.

폴리아는 수학적 문제해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하였다.

1단계 : 문제의 이해 (Understand the problem)
2단계 : 해결 계획의 수립 (Devise a plan)
3단계 : 해결 계획의 실행 (Carry out the plan)
4단계 : 반성 (Look back at the work)

그리고 문제해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 발문과 권고를 제시하고 있다. <표 1>은 폴리아의 저서 'How to solve it?'에 제시되어 있는 문제해결단계에서의 발문과 권고를 정리해 놓은 것이다.

폴리아가 제시한 발문과 권고는 학생들을 도와 당면한 문제를 풀게 하려는 것으로서 학생의 능력을 개발하여 장래 문제를 스스로 풀게 하려는 데 목적이 있다. 학생들은 기존의 발문과 권고를 통한 문제 해결의 연습을 통해 비슷한 문제 상황에 부딪혔을 때 스스로 그와 같은 발문하게 된다는 것이 폴리아의 주장이다. 그리고 거듭되는 발문으로 얻은 문제 해결의 성공 경험을 통해 학생들은 그 발문을 사용하는 바른 방법을 발견하게 되고 마침내 적절한 순간에 적절한 질문을 자신에게 하게 됨으로써 그에 따른 사고를 자연스럽고 왕성하게 수행할 수 있게 된다.

폴리아의 문제해결이론이 우리에게 주는 시사점은 문제는 단순한 '실행'에 의해 해결되는 것이 아니라는 것이다. 문제해결능력은 문제의 이해 단계와 해결 계획의 수립이 이루어지는 단계, 반성단계에서의 충실한 노력과 다양한 시도의 경험으로부터 얻어지는 것이다.

본 고에서는 문제의 이해 단계와 해결 계획의 수립이 이루어지는 단계, 반성단계에서의

2) 예를 들어, 정교하게 만들어진 GSP파일로부터 삼각형의 내각의 합이 180도 임을 시각적으로 확인한 후에 정작 핵심이 되는 증명을 학습자의 사고에 의해 하지 않는다면 이는 수학의 본질이 왜곡된 채로 학습되는 것이다.

<표 1> 폴리아가 제시하는 문제 해결 단계에서의 발문과 권고

단계	주요 발문과 권고	이용되는 사고전략 (우정호, 1998, p.84)
문제의 이해	미지의 것은 무엇인가, 자료는 무엇인가, 조건은 무엇인가 그림을 그려보아라 조건은 미지의 것을 결정하기에 충분한가, 또는 불충분한가, 또는 모순되는가 적절한 기호를 붙여라 조건을 여러 부분으로 분해하여라	목표에 주의를 집중하기 문제의 주요 부분에 주목하기 조건에 주목하여 문제를 조망해보기 그림을 그리고 적절한 기호를 붙이기 조건을 분해하여 써보기
해결 계획의 작성	전에 그 문제를 본 일이 있는가 관련된 문제를 알고 있는가. 유용하게 사용될 어떤 정리를 알고 있는가 미지의 것을 살펴보아라. 친숙한 문제 중 미지의 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. 관련된 문제로 전에 풀어본 문제가 있구나. 그것을 활용할 수 있을까 문제를 달리 진술할 수 있을까. 정의로 되돌아가보자 만일 제기된 문제를 풀수 없다면, 먼저 어느정도 그와 관련된 문제를 풀어보아라. 보다 접근하기 쉬운 관련된 문제를 생각해 낼 수 있는가? 보다 일반적인 문제는? 특수한 문제는? 유사한 문제는? 문제를 부분적으로 풀 수 있는가? 자료로부터 뭔가 유용한 것을 이끌어 낼 수 있을까 자료는 모두 사용했는가. 조건을 모두 사용했는가. 문제에 포함된 핵심개념은 모두 고려했는가	관련된 지식을 동원하기 유용한 패턴 찾아보기 관련된 문제나 정리를 알아보기 미지의 것이나 결론이 같거나 유사한 문제를 생각해보기 문제를 달리 진술해 보기 정의를 되짚어보기 보다 단순한(또는 일반적인, 특수한, 유사한) 문제를 풀어보기 미지의 것과 조건, 자료를 변형하여 보조문제를 작성하여 문제를 부분적으로 해결해 보기 핵심적인 개념의 사용여부 검검하기
계획의 실행	풀이 계획을 실행하고 매 단계를 점검하여라. 각 단계가 올바른지 명확하게 알 수 있는가 그것이 옳다는 것을 증명할 수 있는가	매 단계를 점검하면서 풀어가기
반성	결과를 점검할 수 있는가, 논증 과정을 점검할 수 있는가 결과를 다른 방법으로 이끌어낼 수 있는가 그것을 한 눈에 알 수 있는가 결과나 방법을 어떤 다른 문제에 활용할 수 있는가.	풀이결과와 논증을 점검하기 다른 풀이방법을 알아보기 풀이결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기

'충실한 노력과 다양한 시도의 경험'에 초점을 두고 이러한 시도의 한 예로 GSP를 활용한 방업에 대해 다루어 보고자 한다. 이는 수학교사들에게 문제해결관점에서 GSP를 적절히 다룰 수 있는 안목을 제공하기 위함이다.

2. '문제의 이해' 단계에서 GSP 활용

(1) 수학적 개념에 대한 풍부한 이해

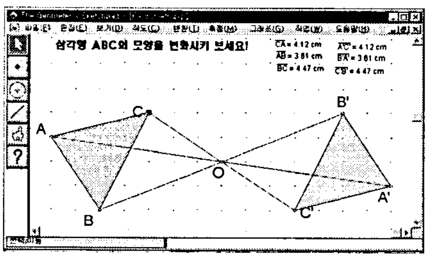
문제에서 다루고 있는 수학적 개념을 명확하고 풍부하게 이해하기 위한 보조도구로 GSP를 활용하면 문제의 이해 단계가 보다 용이하게 진행될 수 있다. 다루어야 할 수학적 개념의 정의를 분명하게 이해하는 것은 수학의 문제를 해결하기 위한 전제조건이다. 특히 문제해결 계획의 수립단계에서 폴리아가 제시하고 있는 다음과 같은 발문 즉,

> 문제를 달리 진술할 수 있을까?
> 정의로 되돌아가보자

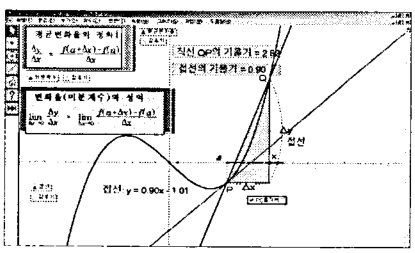
에 대한 적절한 활동은 수학적 개념의 정의에 대한 명확한 이해를 요구한다. '문제의 이해' 단계에서 GSP활용은 문제를 의미있게 다루기 위한 수학적 개념의 풍부한 이해를 도와준다.

수학적 개념의 이해를 돕기 위한 GSP 활용 자료의 예는 많이 찾아 볼 수 있다. 함수의 그래프의 의미, 변환기하(대칭이동, 회전이동, 평행이동, 닮음변환)의 중심아이디어, 함수의 극

한, 정의와 관련지어 이해하는 이차곡선 모양, 삼각함수, 학생들이 이해하기 어려워하는 미분계수 같은 개념[3]이 GSP를 활용하면 <그림 1>, <그림 2>와 같이 시각적으로 분명하게 보여진다. 그리고 다루고자 하는 개념을 역동적인 변화과정 속에서 탐구할 수 있게 해 주므로 지필환경에서보다 훨씬 풍부하게 개념을 이해할 수 있는 경험이 제공된다.

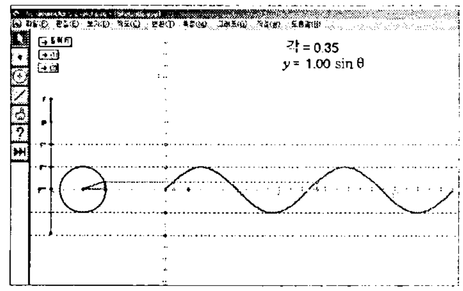


<그림 1> GSP를 이용한 점대칭 도형의 지도(이종영, 2001, p.70)

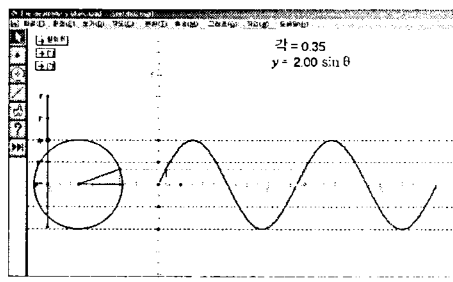


<그림 2> 미분단원에서의 GSP활용 (박상호, 윤삼열, 1999, p.190)

보다 구체적인 예를 들어 보자. GSP를 통한 $\sin x$ 그래프의 탐구는 원 위의 점의 이동에 따른 사인값의 변화를 역동적으로 관찰할 수 있게 한다. <그림 3>~<그림 4>는 시각적인 보조수단을 제공하여 사인그래프의 특징과 변화, 정의역, 치역, 최대값, 최소값, 주기의 개념을 보다 구체적으로 현실감 있게 다룰 수 있게 한다(이창윤, 2000, pp.128-145).

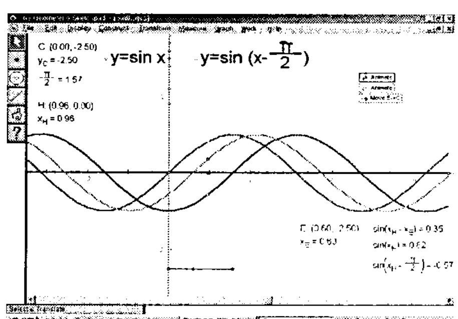


<그림 3> 삼각함수의 정의에 의한 사인 그래프



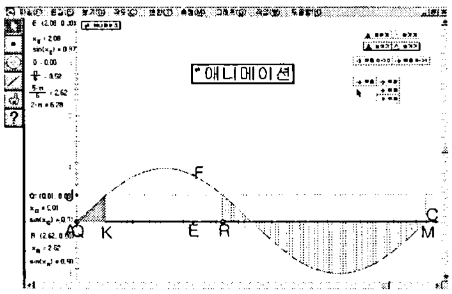
<그림 4> $\sin x$와 $2\sin x$의 비교

또한 $y=\sin x$와 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프를 관찰하는 <그림 5>와 같은 GSP파일은 x축 방향으로의 평행이동의 개념을 관계적으로 이해할 수 있도록 한다.



<그림 5> $y=\sin x$와 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 비교

3) 물론 이에 대한 지도는 GSP가 아닌 다른 수학소프트웨어를 이용해도 가능하다. 예를들어 미분가능, 정적분의 의미등은 graphic calculus라는 프로그램을 이용하여 지도할 수도 있다(박선화, 2002, pp.270-273)



<그림 6> 부등식 $\sin x < \frac{1}{2}$ $(0 < \theta < 2\pi)$해결

위와 같이 삼각함수 개념의 이해를 위해 GSP로 삼각함수 그래프의 구성과정과 모양의 변화를 보면서 삼각함수에 관한 여러 가지 성질을 탐색해 보는 경험은 삼각함수에 관한 많은 문제해결에 도움을 준다. 가령

$\sin x < \frac{1}{2}$ $(0 < \theta < 2\pi)$을 만족하는 x의 값을 구하여라

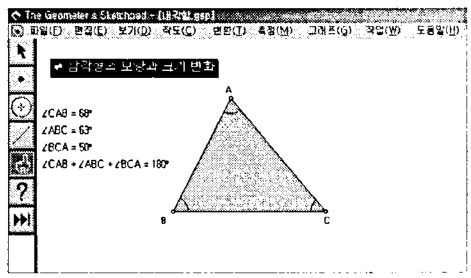
라는 삼각함수 부등식의 문제해결은$\sin x$ 그래프에 관한 풍부한 이해를 바탕으로 <그림 6>과 같은 부등식의 영역을 나타내는 그림을 통하여 해결될 수 있다. 물론 그 해결과정의 실행단계가 꼭 GSP상에서 이루어질 필요는 없다. 실행이전에 GSP를 통한 사인그래프의 탐색을 거치고 해결의 실행 자체는 지필환경에서의 학생 스스로의 사고와 구성활동에 의해서 진행되는 것이 오히려 바람직할 수 있다.

(2) 증명해야 할 사실에 대한 직관적 이해 : 증명하는 문제해결의 경우

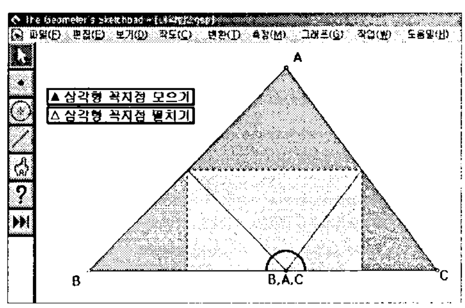
기하의 증명문제의 경우에 증명해야 할 사실에 대한 직관적인 이해는 연역적인 증명과정에 생명력을 불어넣을 수 있다.

삼각형의 내각의 합이 180°임을 증명하여라.

라는 문제에 대한 연역적 증명은 평행선의 성질을 이용하여 적당한 보조선을 긋고 동위각과 엇각이 같음을 이용해 완성된다. 증명해야 할 사실이 참임을 직관적으로 이해하는 것은 마음속에 확신을 가지고 연역적 증명의 결과를 받아들이게 한다. 초등수준의 비형식적인 증명단계에서 몇 개의 삼각형을 가지고 꼭지점을 모아보고, 세 각의 크기를 각도기로 측정해보는 과정이 이에 해당될 수 있다. <그림 7>~<그림 8>과 같이 GSP를 활용한 활동은 단지 몇 개의 삼각형만이 아닌 임의의 삼각형에 대한 작업을 시행하므로 보다 일반적인 결론을 추측하는데 도움을 준다.



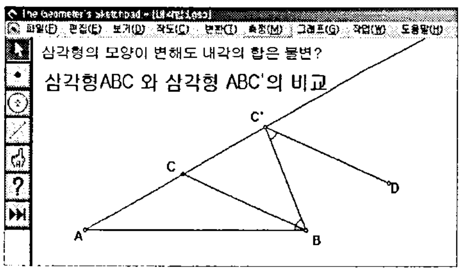
<그림 7> 측정에 의한
삼각형의 내각의 합의 불변관찰



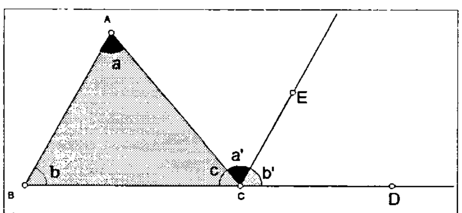
<그림 8> 꼭지점 모으기에 의한
삼각형의 내각의 합 관찰

위와 같은 활동을 경험하는 것은 증명해야 할 사실의 이해 단계에서 매우 효과적이다. 나아가 <그림 9>와 같은 보충활동(이종영, 1999,

pp.114-115)은 삼각형의 모양이 변하면서 같은 크기만큼 각 B가 열리고 각 C가 닫히는 과정을 보게되고 이에 따라 삼각형의 내각의 합이 불변일 것이라는 확신을 느끼게 해준다. 여기서 수학교사들이 명심해야 할 것은, 이러한 과정은 '문제의 이해' 나아가 '해결 계획의 수립' 단계에까지 다루어질 수 있는 내용으로서 그것이 결코 '문제해결의 실행' 단계까지 커버하고 있는 것은 아니라는 것이다.



<그림 9> 두 삼각형에서 줄어든 각과 늘어난 각의 크기 비교



<그림 10> 연역적 증명의 그림

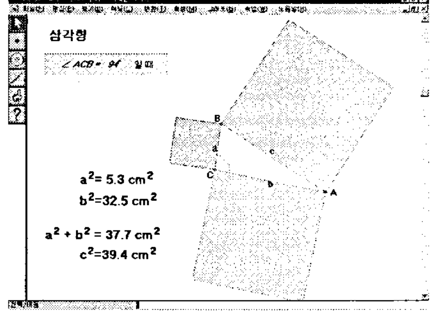
$\angle a = \angle a', \angle b = \angle b', \therefore \angle a + \angle b + \angle c = 180°$

문제해결계획의 실행은 <그림 10>과 같은 그림에 의한 연역적 증명을 통해 완성된다. 교사들이 GSP 활용학습에서 주의해야 할 것은 '동적인 시각 경험' 만을 제공하는데 그치지 않고 '증명의 필요성 인식' 나아가 '증명과정의 완성'으로까지 수업을 끌고 나아가는 것이다. 그렇지 않고 정교하게 만들어진 GSP파일로 증명해야 할 사실만을 보여주는데 그치면 학생들은 컴퓨터 화면에서 시각적으로 확인하였기 때문에 증명이 불필요하다고 생각하게 되기 쉽다.

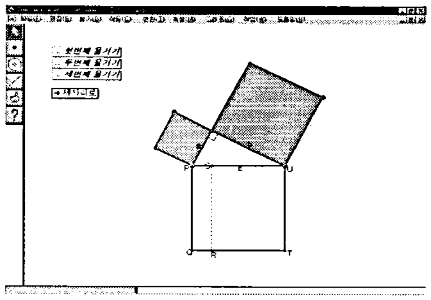
기하의 정리들은 아무리 정교한 자와 각도기가 존재한다 하더라도 그것을 가지고 증명을 할 수는 없다. 기하의 증명은 오직 연역적 사고에 의해서 가능할 뿐이다. 기하 탐구학습 환경에서 시각적으로 보고 직관적으로 이해한 사실은 오로지 학생의 사고에 의한 연역적 증명에 의해 정당화되는 것이다. 따라서 증명해야 할 사실에 대한 직관적 이해를 구하기 위해 문제의 이해, 해결계획의 수립 단계에서 GSP를 활용하고 난 후, 반드시 문제해결의 실행단계에서는 학생의 사고에 의한 증명의 과정이 구체적으로 다루어져야 한다. 연역적 기하에서 필요한 '증명의 필요성'인식의 문제가 교사에 의해 주의깊게 다루어지기만 한다면 위와 같이 GSP를 활용하여 수학적 정리 증명 이전의 직관적 이해를 구하는 것이 학습과정을 보다 풍부하게 해줄 수 있음은 너무나 자명하다. 중학교 3학년 과정에서 다루어지는

피타고라스 정리의 증명

의 지도에서도 <그림 11>~<그림 12> 과 같이 피타고라스 정리를 직관적으로 이해하는 과정을 거친 후에 연역적인 증명을 도입하면 학습효과가 극대화될 수 있다.



<그림 11> 측정에 의한 피타고라스 정리



<그림 12> 등적변형에 의한 피타고라스의 정리

현재, 중학교 현장에서는 피타고라스 정리의 증명지도과정에서 GSP 활용 수업이 활발하게 이루어지고 있다. 그러나 몇 몇 수학교사들은 위와 같은 시각적이고 직관적인 이해 후에 증명의 절차 없이 $a^2+b^2=c^2$ 이라는 식을 받아들이게 하고 곧바로 학생들에게 피타고라스 정리를 이용한 수치계산문제에 부과하는 경우도 있다. 물론 증명의 과정이 학생들에게 어렵다는 이유를 들고 있기는 하지만, 이렇게 시각적인 경험을 통해서만 수학을 이해하는 방식으로 제공하는 학습은 학생들이 보다 형식적인 정당화나 증명의 필요성을 아는 것을 어렵게 만들 수 있다. 수학의 학습은 컴퓨터에 부여된 권위와 신뢰로부터 얻어지는 것이 아니다. 교사는 GSP를 활용하는 수업에서도 항상 학생 자신의 사고와 행동을 반성하는 기회를 제공하는 것을 간과해서는 안된다.

3. '해결계획의 수립' 단계에서 GSP 활용

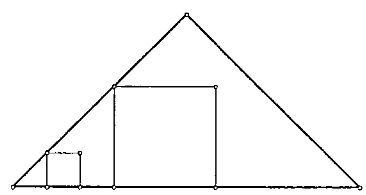
평면기하를 연속적이면서 역동적으로 구현하는 GSP의 특징을 이용하면 문제해결의 계획을 수립하는 단계가 보다 구체화되어 다루어질 수 있다. 폴리아가 그의 저서 '어떻게 문제를 풀 것인가(How to solve it?)'에서 제시하고 있는 작도문제의 한 예를 들어보자(G.Polya, 1986, pp.48-51).

[예제 1]

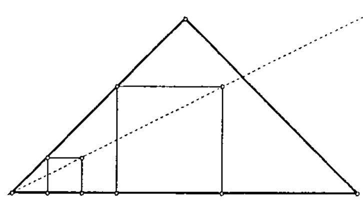
주어진 삼각형 안에 내접하는 정사각형을 작도하고자 한다.
이때 정사각형의 두 꼭지점은 삼각형의 밑변 위에 놓여져야 하며, 다른 두 꼭지점은 삼각형의 나머지 두 변 위에 각각 하나씩 놓여져야 한다.

<그림 13> 삼각형

위의 문제해결을 위해 폴리아가 제시하고 있는 발문과 학생 대답의 예는 <표 2>에 제시된 바와 같다. <표 2>의 내용을 살펴보면, 문제의 이해를 위해 교사와 학생간의 충분한 대화가 오고간 후, 문제해결계획을 수립하기 위한 구체적인 작업이 진행되고 있음을 알 수 있다.



<그림 14> 예제 1 조건의 일부만을 만족하는 정사각형



<그림 15> 네 번째 꼭지점의 자취 그리기(두 점을 이용)

위 문제해결에서 핵심이 되는 부분은 해결계획의 수립단계이다. 폴리아는 학생들로 하여금

<표 2> [예제 1]에 대한 발문과 권고의 예시(G. Polya, 1986, pp.49-51)

	발문 또는 권고	학생 대답의 예
문제의 이해	'미지의 것은 무엇인가?'	정사각형입니다.
	'자료는 무엇인가?'	삼각형 하나만이 주어졌을 뿐입니다.
	'조건은 무엇인가?'	정사각형의 네 꼭지점이 삼각형의 둘레 위에 있어야 하는데, 그 정사각형의 두 꼭지점은 삼각형의 밑변에, 나머지 두 꼭지점은 삼각형의 나머지 두 변 위에 하나씩 있어야 합니다.
	'조건은 만족될 수 있는가?	그렇게 생각되긴 하지만 확신이 들지는 않습니다.
해결계획의 수립	'만일 제시된 문제를 풀 수 없다면, 먼저 어느 정도 그와 관련된 문제를 풀어보아라' '조건의 일부를 만족시킬 수 있는가?'	조건의 일부란 무슨 뜻입니까?
	'정사각형의 4개의 꼭지점에 관한 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것은 버려보아라. 즉 조건가운데 쉽게 만족될 만한 것만 취해 보아라'	삼각형의 둘레에 세 꼭지점이 놓이게 되는 정사각형을 그리는 것은 쉬울 것 같습니다.
	'그림을 그려 보아라'	그림을 그린다.
	'조건의 일부를 버리고 그림을 그려보니 우리가 구하고자 하는 것이 정해졌는가?'	아니오, 세 꼭지점만 삼각형의 둘레 위에 있게 한다면 그러한 정사각형은 여러 개가 그려질 수 있어요. (<그림 14> 참조)
	'조건의 일부만 가지고는 우리가 원하는 정사각형을 결정할 수가 없구나.' '어떻게 그것을 변형할 수 있는가'	....
	'원한다면 실험적으로 시도해 보아라' '이미 그려진 두 정사각형과 마찬가지로 좀 더 많은 수의 정사각형을 그려보아라.'	학생은 교사의 발문과 권고에 따라 풀이의 아이디어에 접근해 간다.
실행	'네번째 꼭지점의 자취는 무엇과 같은가?'	학생이 네 번째 꼭지점의 자취가 직선이 됨을 추측할 수 있다면 학생은 해답을 얻을 것이다.(<그림 15> 참조)
반성	결과를 점검할 수 있는가, 논증 과정을 점검할 수 있는가	풀이결과와 논증을 점검하기

조건의 일부(즉, 정사각형의 제 4의 꼭지점이 삼각형의 변 위에 있어야 함)를 만족하지 않는 정사각형을 그림으로 그리고 그러한 정사각형이 무수히 많이 그려질 수 있음을 확인한 후 구하고자 하는 정사각형을 찾는 방법을 탐색하도록 유도하고 있다. 그 과정에서

'정사각형의 4개의 꼭지점에 관한 조건 가운데 일부분만 남기고 다른 것은 버려보아라. 즉 조건가운데 쉽게 만족될 만한 것만 취해 보아라'

<그림 14> 가 그려지고

'원한다면 실험적으로 시도해 보아라'

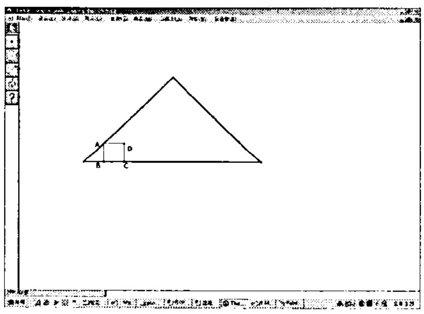
라는 권고를 통해 더 많은 정사각형을 그리게 된다. 이를 GSP로 구성하게 되면

'네번째 꼭지점의 자취는 무엇과 같은가?'

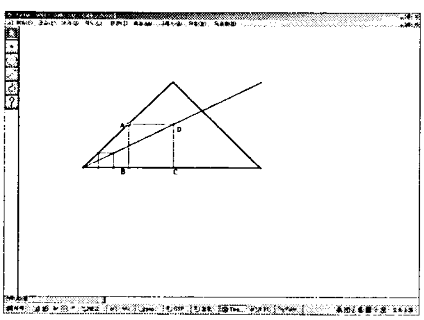
라는 발문에 따라 정확하게 '정사각형의 제 4의 꼭지점의 자취가 직선'임을 답할 수 있게 된다. 그 후, <그림 15>와 같이 직선을 결정할 수 있는 두 점만을 취하여 직선과 삼각형과의 교점을 찾아 정사각형의 제 4의 꼭지점을 얻게 하는 것이다.

실제로 위의 문제를 학생들에게 제시하여 수업을 진행해 본 연구자의 경험에 의하면 GSP의 도움 없이도 학생들로 하여금 위 문제를 해결

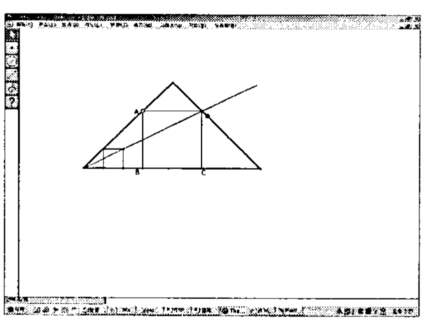
할 수 있도록 지도할 수는 있다. 그러나 교사가 GSP를 사용할 수 있고 또 그것을 활용할 수 있는 교실여건이 주어져 있다면 GSP를 활용하여 위의 문제해결을 지도하는 편이 훨씬 더 풍부한 이해를 가져오면서 보다 효율적인 지도방법이란 것을 분명히 체험하였던 것도 사실이다.



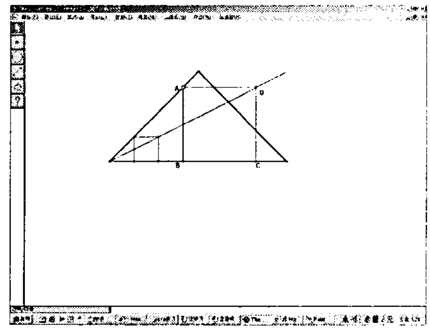
<그림 16> [예제 1] 조건의 일부만을 만족하는 정사각형을 GSP에서 그리기



<그림 17> GSP에서 정삭각형의 꼭지점 D 끌기



<그림 18> 꼭지점 D가 삼각형의 변 위에 위치하는 경우 확인



<그림 19> 꼭지점 D의 자취인 반직선을 그려서 삼각형과의 교점을 찾기

예를 들어, <그림 14>의 두 개의 정사각형을 그리는 정도는 손으로 작업한 후, 더 많은 정사각형을 그려야 할 때 그러한 작업이 지필환경에서는 한계가 있다. 이때 GSP를 활용할 수 있다. 단시간에 여러 개의 정사각형을 구성해 낼 수 있으므로 점의 자취를 판단하기가 훨씬 용이하다. 또한 지필환경에서 손으로 작도하는 과정의 오차로 인해 점의 자취가 직선이 아니라 꺽은선이 나올 가능성을 GSP에서는 우려하지 않아도 된다.

GSP에서 정사각형의 네 번째 꼭지점을 '흔적 남기기'로 설정한 후 마우스로 끌면 <그림 17>과 같이 점의 자취를 생생하게 볼 수 있다. 그리고 정사각형의 네 번째 꼭지점의 자취가 직선이 됨을 시각적으로 확인할 수 있다. 또한 <그림 18>에서와 같이 [예제 1]에서 요구하는 정사각형이 존재함을 즉각적으로 확인할 수도 있다. 위의 문제해결에서 GSP를 이용하면 점의 자취를 찾기 위해 여러 개의 정사각형을 손으로 작도하는 번거로움을 피할 수 있다. 또한 굳이 작도를 하지 않더라도 머리 속으로 '아마 네 번째 꼭지점의 자취는 직선이 될꺼야'라고 추측한 것을 현실감 있고 생생하게 확인해 볼 수 있는 기회를 제공한다. 물론 점의 자취를 바르지 않게 추측하였을 경우에도 추측을 수정해볼 수 있는 기회를 제공한다. 이러한 일련의

과정을 통해 학생들은 풍부한 이해와 마음속의 확신을 가지고 <표 3>에 제시된 바와 같은 문제해결의 계획을 분명하게 세워나갈 수 있게 된다.

<표 3> [예제 1]에 대한 해결 계획의 수립

단계 1	<그림 14>와 같이 조건의 일부를 만족하는 두 개의 정사각형을 작도
단계2	각 정사각형에서 삼각형의 변 위에 있지 않는 두 꼭지점을 연결하는 직선 작도
단계3	작도된 직선과 삼각형의 변과의 교점 찾기
단계4	위에서 찾은 교점을 지나고 주어진 삼각형에 내접하는 정사각형을 작도

4. '반성' 단계에서 GSP 활용

완성된 풀이를 검토하고, 결과와 그 결과에 이르게 된 과정을 재검사하는 활동은 획득한 지식을 견고하게 하고 나아가 문제를 해결하는 능력을 발달시키는데 도움을 준다. 어떤 문제라도 풀이가 된 후에 반드시 다루어야 할 무엇이 남아있기 마련이다. 즉, 충분한 연구와 통찰을 통해 어떤 풀이도 개선될 수 있으며, 어떤 경우든 우리는 그 풀이에 대한 이해도를 보다 개선할 수 있는 것이다. 문제해결의 결과나 논증을 검사할 어떤 신속하고 직관적인 절차가 있는 경우라면, 검증단계는 간과되어서는 안된다. 따라서 폴리아는 문제해결의 반성단계에서 다음과 같은 발문을 자주 사용하길 권유하고 있다.

결과를 점검할 수 있는가,
논증 과정을 점검할 수 있는가,
결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가

우리가 보통 두 가지 다른 감각을 통해 지각하기를 좋아하듯이, 우리는 두 가지 다른 증명법을 통해 문제해결의 결과에 대한 확신을 얻기를 바란다. 따라서 다음과 같은 발문도 유용하다.

그것을 한 눈에 알 수 있는가

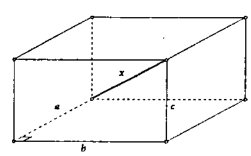
위와 같은 발문이 주어졌을 때 특히, 기하문제해결의 경우 검증단계에서 GSP를 활용하는 것은 상당한 도움을 준다. 예를 들어 [예제 2]를 보자.

[예제 2] 가로, 세로, 높이의 길이가 주어진 직육면체의 대각선의 길이를 구하여라.

위의 문제 해결을 위해서는 문제의 이해단계, 해결계획의 수립단계, 계획의 실행단계에서 학생이 해야할 적절한 활동들(G.Polya, 1986, pp.40-43)이 있지만 그에 대한 장황한 설명은 생략하고 본 절에서는 반성단계에서의 활동만을 주로 다루어보고자 한다.

[예제 2]를 <그림 21>에서 사용된 문자를 이용하여 해결하면 그 풀이결과는

$x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 이다.



<그림 20> [예제 2]에 대한 그림

이 결과를 얻은 후에 우리는 풀이 결과를 어떻게 점검할 수 있는가?

사실 반성단계에서 교사가 학생들에게 이러한 질문을 던져 훌륭한 답이 나오기를 기대하

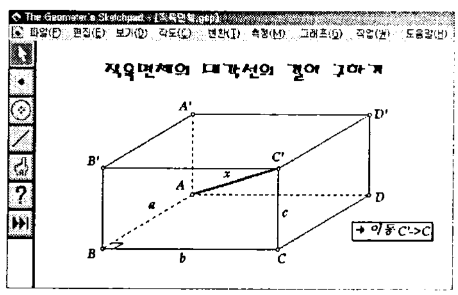
는 것은 어려운 일이다. 그러나 교사의 적절한 발문을 통해 학생들로 하여금 위 공식을 점검하는 활동을 경험하게 할 수는 있다. 그래야만 학생들은 공식이란 많은 검증을 통한 경험적 확신에 의해 받아들여지는 것임을 인식할 수 있게 된다.

그렇다면 검증단계에서 교사가 던질 수 있는 발문들에는 무엇이 있는가? 위의 [예제 2]에 대하여는 다음과 같은 발문의 예를 들 수 있다.

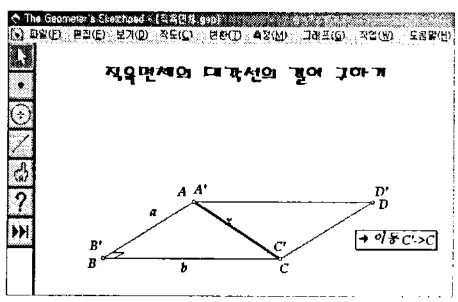
① 주어진 자료는 모두 활용되었는가? (적절한 자료의 사용)
② 높이 c 가 늘어나면 대각선도 늘어난다. 우리의 결과는 이러한 사실을 함의하고 있는가? (자료의 변경)
③ 이 문제는 입체기하에 대한 문제이다. 이 문제는 직사각형의 대각선을 구하는 평면기하의 문제와 유사한가? (유추)
④ 만약 높이 c 가 줄어들어 마지막에 0이 되면 직육면체는 직사각형이 된다. 대각선의 공식에서 $c=0$ 로 놓으면 직사각형의 대각선을 구하는 올바른 공식이 얻어지는가? (자료의 변경)
⑤ 직육면체의 세 모서리가 같은 비율로 늘어나면 대각선도 또한 같은 비율로 늘어난다. 방금 구한 공식에서 a,b,c를 각각 $12a$, $12b$, $12c$로 대치하면 대각선의 식도 12배가 되어야 한다. 실제로 그러한가? (자료의 변경)
⑥ a,b,c 는 위 문제에서 같은 역할을 한다. 즉, 이 문제는 a,b,c에 대하여 대칭이다. 여러분이 구한 공식도 a,b,c에 대하여 대칭인가? 그 공식은 a,b,c의 순서를 바꾸어도 변하지 않는가? (대칭성)

위와 같은 질문들은 여러 가지 좋은 효과를 갖게 된다. 먼저 학생들은 공식이란 많은 검증에 의해 통과된다는 사실에 깊은 감명을 받게 될 것이다. 위와 같은 질문에 답해 나가는 사이에 학생들은 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이라는 공식이 이미 주의깊게 이끌어졌기 때문에 틀림없을 것이라고 확신을 하고 있었지만 이제는 경험적인 증거들에 의해 더더욱 확신을 갖게 된다. 또한 공식의 세부적인 것이 새로운 의미를 가지게 되며 여러 가지 사실과 연결된다. 따라서 공식은 보다 기억되기 쉬워지며 학생이 얻은 지식은 견고하게 된다(G. Polya, 1986, p.42).

위와 같은 발문에 대한 검증활동에서 GSP를 활용하면 그 과정이 보다 효과적으로 진행될 수 있다. 물론 GSP는 평면기하의 성질을 탐색할 수 있는 소프트웨어이고 [예제 2]는 직육면체라는 입체기하를 다루고 있지만 GSP에서도 직육면체의 겨냥도를 그리고 그것을 탐색하는 작업이 가능할 수 있다. 예를 들면 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 공식의 검증을 위한 발문④에서 '높이 c 가 줄어들어 마지막에 0이 되면' 이라는 표현을 구체적인 도형의 움직임으로 보여줄 수 있다. 물론 발문 ③과의 연결도 가능하다.



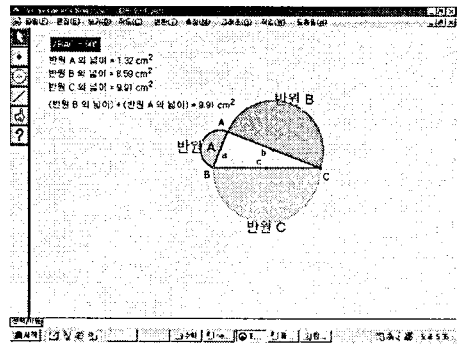
<그림 21> GSP로 그린 직육면체의 겨냥도



<그림 22> (높이)=0일때, 직육면체의 변화와 대각선

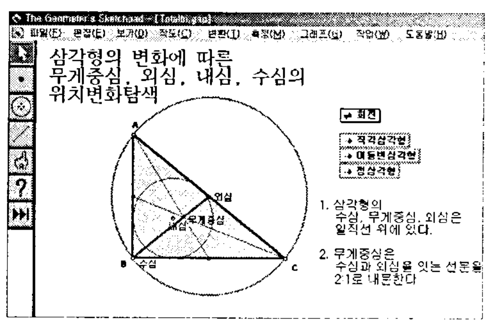
<그림 21>에서 점 C'를 밀면 위의 점 C로 끌어내리면서 이동시키면 직육면체가 직사각형이 됨이 시각적으로 생생하게 확인할 수 있다. 또한 직사각형의 대각선의 길이 공식 $\sqrt{a^2+b^2}$ 이 직육면체의 대각선의 길이 공식 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$의 특수한 경우가 됨을 인식시킬 수 있다. 입체기하를 다루고 있는 위 문제의 특수성으로 인해 검증단계의 모든 발문에 대한 활동을 GSP로 구현할 수는 없지만[4] 가능한 몇 가지를 기하학적으로 시연해 보임으로써 문제해결능력을 함양시키면서 동시에 학생들의 기하학적 상상력을 충분히 활성화시킬 수 있다.

그 동안 여러 논문을 통해 소개된 GSP활용의 예제들은 실제로 문제해결의 검증단계에서 활용될 수 있는 예가 많은 것이 사실이다. 그것은 동적인 평면기하의 성질을 연속적이면서 역동적으로 관찰할 수 있게 하는 GSP의 특성에 의한 것이다. 앞에서 다룬 피타고라스 정리의 경우에도 증명에 앞서 <그림 11>~<그림 12>와 같은 직관적인 이해와 추측을 유발하고 연역적인 증명과정을 실행한 후에 반성단계에서 <그림 23>을 제시할 수 있다. 이는 피타고라스의 정리가 직각삼각형의 세 변을 이용하여 정사각형의 넓이 관계 뿐 아니라 나아가 세 변을 지름으로 하는 반원, 정다각형의 넓이 관계로도 표현될 수 있음을 이해시킬 수 있는 장을 제공한다. 또한 직각 삼각형이 아닌 경우에는 세 정사각형의 넓이 사이의 관계가 어떻게 되는지를 GSP를 이용하여 탐색해보도록 하여 예각, 직각, 둔각인 경우에 각각 피타고라스의 정리가 어떻게 변형되는지를 추측해 볼 수 있게 한다.



<그림 23> 피타고라스 정리의 탐색

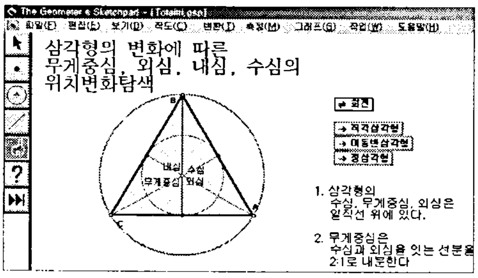
<그림 24>~<그림 27>은 삼각형의 무게중심, 외심, 내심, 수심의 정의와 작도방법을 배우고 삼각형의 모양이 변함에 따라 각각의 위치가 어떻게 변하는지 그리고 그들 사이의 위치관계가 어떠한 지를 탐색할 수 있게 해주는 것으로서 삼각형의 오심[5]을 지도한 후에 반성단계에서 다룰 수 있는 훌륭한 소재이다. <그림 28>는 a,b,c의 변화에 따른 이차함수의 모양을 관찰하게 해주어 이차항의 계수 즉, $a=0$인 경우에 <그림 29>와 같이 직선이 됨을 보여서 이차함수와 일차함수와의 관계를 보다 풍부하게 다룰 수 있게 한다.



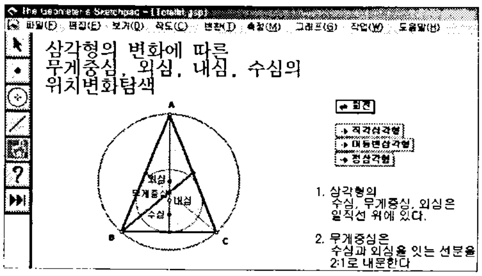
<그림 24> 직각삼각형인 경우

4) 특히, 이 경우 직육면체의 겨냥도를 그린 것이기 때문에 GSP의 측정기능을 사용해서 대각선의 길이를 구해서는 안된다.

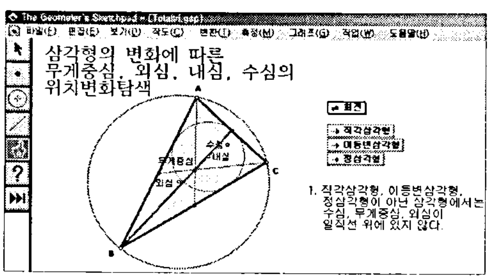
5) 여기서 방심의 작도는 제외되었다.



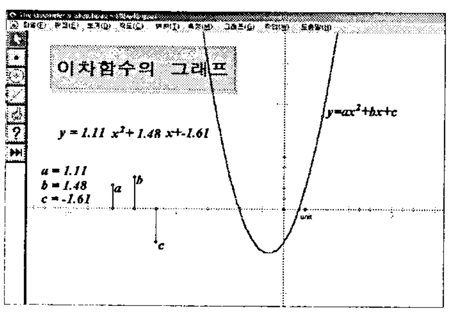
<그림 25> 정삼각형인 경우



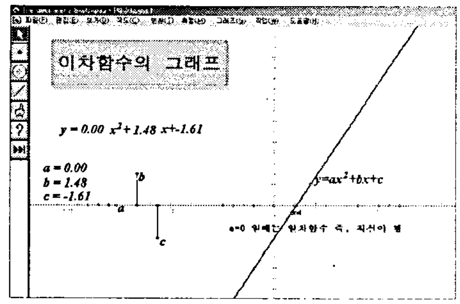
<그림 26> 이등변삼각형인 경우



<그림 27> 임의의 삼각형인 경우



<그림 28> a,b,c의 변화에 따른
이차함수의 모양 탐색



<그림 29> 이차항의 계수 즉, $a=0$ 인 경우: 직선

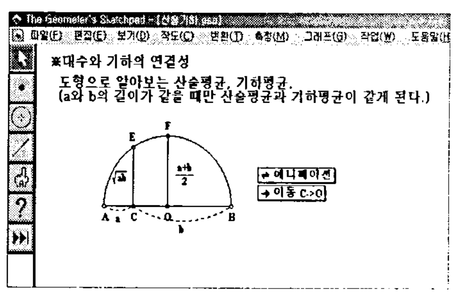
또한, 반성단계에서 자주 사용되는

결과를 다른 방법으로 이끌어낼 수 있는가

라는 발문에 대한 활동을 할 때에서 GSP가 유용하게 활용될 수 있다. 대표적인 예로 산술평균과 기하평균의 대소관계 즉, $\sqrt{ab} \le \frac{(a+b)}{2}$ 를 대수적으로 증명한 후,

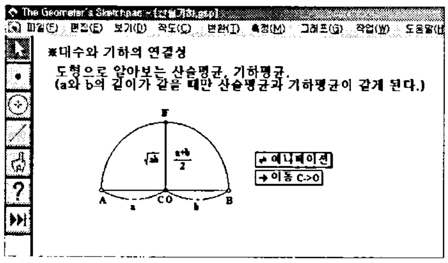
결과를 다른 방법으로 이끌어낼 수 있는가
결과를 한 눈에 알 수 있는가

라는 발문을 던지고 <그림 30>~<그림 31>과 같은 GSP파일을 이용해 산술평균과 기하평균의 대소관계를 기하적으로 해석하는 기회를 제공할 수 있다[6].



<그림 30> 산술평균, 기하평균의 대소관계

6) 산술평균과 기하평균의 대소관계를 반원 위의 선분의 길이로 비교하는 위와 같은 시각화를 'Gallant의 방법'이라고 소개되고 있다(문광호, 1999, p.139).



<그림 31> $a=b$ 인 경우

위와 같이 학교수학에서 다루는 대수적 증명을 GSP를 이용하여 시각화하는 것은 문제해결의 반성단계에서의 행할 수 있는 적절한 시도이며 동시에 NCTM과 우리나 제 7 차 수학과 교육과정에서 강조하는 '수학적 연결성'을 구현할 수 있는 훌륭한 지도사례이기도 한 것이다.

III. 맺음말

본 연구에서는 최근 학교현장의 수학수업에서 많이 사용되고 있는 탐구형 소프트웨어인 GSP의 활용문제를 폴리아의 문제해결관점에서 재조명해 보았다. 폴리아가 제시하고 있는 수학적 문제해결 과정의 4단계 중에서 GSP가 문제의 이해, 해결 계획의 수립, 반성단계에서 활용되는 구체적인 사례를 몇 가지 살펴보았다.

본 고는 GSP를 수학적 문제해결력의 신장을 위한 적극적인 보조도구로 사용해야 함을 주장하고 있다. GSP를 활용하고자하는 교사의 관심의 초점이 학생의 문제해결과정에 도움을 주기 위한 세심한 배려와 계획된 준비에 있다면 GSP 활용수업은 직관적인 탐구활동을 통한 사고력 중심의 문제해결교육을 가능하게 할 수 있다.

물론 GSP로 인한 교수학습상의 문제도 간과해서는 안된다. GSP를 이용한 기하 학습-지도에 대한 교수학적 분석에서 밝히고 있듯이 연역적 기하와 귀납적 기하의 혼용가능성, 중등기하의 초등화 가능성, 강한 명제적 지식의 교화(敎化) 가능성, 증명의 필요성 인식의 방해 문제 등이 그것이다(이종영, 1999, pp.104-112). 이러한 분석 결과는 수학교사들이 탐구형 소프트웨어를 활용하고자 할 때 이에 대한 충분한 사전 지식과 세심한 주의를 기울여야 함을 함의하고 있다.

어떤 수학적인 사실을 발견하고 창조하는 능력은 주어진 명제를 증명하는 능력과 함께 중요한 수학적 능력이라고 할 수 있다. 컴퓨터는 어떤 사실을 발견하거나 검토하는 도구로 적절히 이용될 수 있지만 그러한 사실을 정당화시키는 도구로 사용되서는 안된다. 가령 GSP의 측정 기능을 통해 수학적 사실을 보이고 있는 <그림 1>, <그림 7>, <그림 11> 등이 수학수업에 활용된다면 새로운 수학적 사실을 발견하고 이미 알고 있는 수학의 내용을 확실히 이해하고 발전시키는데 도움을 줄 수 있다. 그러나 이 단계에서 머물고 학습자의 사고와 반성에 의한 문제해결의 실행으로 연결시키지 못하면 오히려 학생들의 수학학습을 방해할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 강조하는 것은 다음의 두 가지 이다. 하나는, GSP가 수학적 개념 이해의 어려움을 완화시켜주고 직관적인 탐구활동을 가능하게 해주며 수학의 역동적이고도 발생적인 측면을 부각시켜 사고력 중심의 수학학습을 도와줄 수 있기 때문에 이 점을 수학의 문제해결수업에 적극 활용하자는 것이고 다른 하나는, 그와 동시에 우리 수학교사들이 GSP 탐구수업을 '해결 계획의 실행'단계와 잘 연결지어서 학생들이 자신의 행동에 대한 반성적 사고를 경험할 기회를 갖고 스스로의 사고에 의해 수학의 학습을 해 나갈 수 있도록 지도해 나가자는 것이다. GSP를 활용한 수학수업을 성공적으로 이끌기 위한 수학교사들은 필요한 내용을 구현할 수 있는 GSP파일을 잘 구성하고

그것을 문제해결의 적절한 단계에 효과적으로 활용하여야 한다. 또한 컴퓨터를 활용한 수학 교육에서 우려되는 극단적인 교수학적 변환이 일어나지 않도록 기존의 지필위주의 강의식 수업보다 더 세심한 주의를 해야 한다.

참고문헌

NCTM (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 구광조, 오병승, 류희찬 역, 경문사

Polya, G. (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가?, 우정호 역, 천재교육

문광호 (1999). 중·고등학교 수학의 시각화, 대한수학교육학회지 <학교수학> 1(1), pp.135-156

박상호, 윤삼열 (1999). 고등학교 수학에서의 GSP활용, 수학사랑

박선화 (2002). 미적분의 기본 개념의 이해와 지도방법의 탐색, 제 4회 Math Festival 프로시딩, 제 4 집 제 1권, pp.264-270

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부

이종영 (1999). 컴퓨터 환경에서의 수학-학습-지도에 관한 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 교육학 박사학위논문

이종영 (2001). 컴퓨터와 수학교육, 2001년도 하계 수학과 직무연수교재, 전주교육대학교 부설초등교육연수원, pp.65-93

이창윤 (2000). GSP를 이용한 함수의 그래프, 제 2회 Math Festival 프로시딩, pp.128-145

황혜정 외 5인 (2001). 수학교육학신론, 문음사

A Study on the GSP in the Viewpoint of Problem Solving

Namhee Kim (Jeonju University)

In this study, we studied some examples using GSP(Geometer's SketchPad) in the process of problem solving that is explained by G. polya. After reconsidering examples, we tried to show that using GSP can help student's intuitive thinking, investigative activities, reflective thinking. Especially, in the three phase of problem solving(understanding the problem, devising a plan, looking back), mathematics teachers may using GSP in order to helping student's understanding. Besides, we tried to suggest the direction to use GSP more adequately in the teaching and learning mathematics. First of all, Mathematics teachers using GSP in their class must have ideas how to use it. And they have to be careful on the didactical transposition of mathematical knowledge in the computer-based learning. They also have to lead students move from activities with GSP materials to carrying out the problem solving plan and reflection activities.