대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 1 호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.1, 49-62. March 2002

역사발생적 관점에서 본 미적분 지도

박 문 환* 민 세 영**

I. 서 론

Bachelard(1993)는 과학의 모든 지식은 질문에 대한 대답이며, 질문이 없었다면 과학적인 지식은 아마도 없었을 것이라고 말한다. 수학의 역사에서도 아무런 도전과 자극이 없었다면 지금과 같은 수학의 발달이 가능했을지 의문스러우며, 수학은 실제적인 문제를 해결하고자 하는 필요성에서 비롯되었음을 알 수 있다. 그러나 학교에서 수학을 배운 대부분의 사람들은 수학을 과정으로서보다는 이미 만들어진 지식으로서 받아들이고 있으며, 시험을 보기 위해 배우고, 단순히 공식에 대입해서 답을 구하는 것 자체를 중요하게 생각한다. 이러한 경향은 특히 미적분 분야에서 전형적으로 나타나는데, 이는 제7차 교육과정에서 제시하고 있는 미적분 지도의 목적과도 무관하지는 않다.

> 여러 가지 함수의 극한의 개념을 이해하고 미분법과 적분법의 개념을 이해하여 실생활에 관한 여러 가지 문제를 수학적으로 해결하는 능력과 태도를 기른다.
> 가. 여러 가지 함수의 극한에 관한 성질을 이해한다.
> 나. 여러 가지 함수의 도함수를 구할 수 있고, 이를 활용할 수 있다.
> 다. 여러 가지 함수의 적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.
> 라. 미분과 적분을 활용하여 실생활에 관련된 여러 가지 문제를 해결할 수 있다(교육부, 1998).

이러한 목적에서는 미적분을 기계적인 절차를 가르치는 영역으로 받아들이도록 하는 경향이 있으며, 정적분과 부정적분과의 관계, 즉 적분법의 기본정리를 알게 하고, 정적분의 계산에 부정적분을 이용할 수 있게 하며, 정적분에 필요한 적분 공식을 미분과의 역연산 관계를 써서 유도할 수 있게 하는 등의 미적분 지도의 본래의 목적과는 동떨어져 있다고 할 수 있다. 이렇게 된 한 가지 이유로 미적분의 지도에 대한 접근 방법과 관련하여 생각해 볼 수 있다. 즉 미적분은 여러 사람에 의해 오랜 기간에 걸쳐 발달해 왔으며, 미적분의 여러 가지 기본적인 성질들이 점차로 형식화되었고, 지난 3세기 동안 과학의 중요한 언어로 사용되었다. 이러한 형식화된 언어만을 학생들에게 부과함으로써, 학생들의 자발적인 활동에 의한 구성을 가로막는다는 점에서 교육적으로 많은 문제점을 내포하고 있다.

그러므로 본 논문에서는 현재의 미적분 지도 방법에 대해 살펴보고, 미적분의 역사에 대한 고찰과 함께 역사발생적 관점에서의 미적분 지도 방향에 관하여 논하고자 한다.

* 상명대 강사
** 서울대 대학원

II. 현행 미적분 지도의 접근 방법

학생들은 미적분을 학습하면서 수학의 다른 분야와 마찬가지로 교과서에 나온 접근 방법만이 유일한 것이라고 생각한다. 그러나 Tall(1981)에 의하면, 미적분은 다음과 같은 여러 방법으로 지도될 수 있다.

첫 번째 방법은 Leibniz식의 전통적인 무한소 방법이다. $y=f(x)$에서 변수 x를 무한소량 dx만큼 증가시키면, 종속변수 y는 $y+dy=f(x+dx)$만큼 증가한다. 도함수 $f'(x)$는 미분상 dy/dx이고 이를 계산할 때 모든 고계 무한소량은 무시된다. 예를 들면, $f(x)=x^3$이면,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=\frac{(x+dx)^3-x^3}{dx}$$

$$=3x^2+3xdx+dx^2$$

여기에서, $3xdx+dx^2$은 무한소이며 계산에서 무시되고, 도함수 dy/dx는 $3x^2$이 된다.

두 번째 방법은 극한 방법이다. h를 실수 변수라고 하고 비 $(f(x+h)-f(x))/h$를 계산한 다음 h를 0으로 접근시킨다. 이 때 이 비가 어떤 극한값에 수렴하면 이 극한값을 미분계수 $f'(x)$로 택한다.

세 번째 방법은 컴퓨터를 이용한 수치적 방법이다. x의 특정값에 대하여 h가 0에 수렴할 때 $(f(x+h)-f(x))/h$의 값의 변화에 따른 표를 만들어 $f'(x)$를 계산할 수 있다.

네 번째 방법은 컴퓨터의 그래프를 이용하는 방법이다. x의 어떤 특정값에 대한 미분계수 $f'(x)$를 구하기 위하여 작은 구간 $[x-a, x+a]$에서 f의 그래프를 그리도록 하고 그래프가 직선이 되도록 훨씬 작은 구간에서 그래프를 확대시킨다. 예를 들어, $f(x)=x^2$의 구간 [0.999,1.001]에서의 그래프는 기울기가 2인 직선으로 나타난다. 미분계수 $f'(x)$는 이 직선의 기울기이므로 2가 된다. 이 방법은 dy/dx가 비 $\Delta x/\Delta y$의 극한으로서 해석될 수 있음을 분명히 보여줄 수 있다.

다섯 번째 방법은 ε-δ 방법이다. h가 0으로 수렴할 때, 몫 $(f(x+h)-f(x))/h$가 실수 $f'(x)$로 수렴한다는 것을 보이기 위하여, 임의의 양의 실수 ε에 대하여 $|(f(x+h)-f(x))/h-f'(x)|<\varepsilon$이 되도록 하는 $|h|<\delta$인 양의 실수 δ를 결정해야 한다.

여섯 번째 방법은 Robinson의 비표준 해석학에 연유하는 현대적인 무한소 방법으로, Leibniz의 무한소 방법과 같이 초실수에서 미분상을 계산한 다음 표준 부분 곧, 그에 무한히 가까운 실수를 택하여 미분계수를 구한다.

이상과 같이 다양한 지도 방법이 있지만 현재 교과서에서 미적분은 극한 개념의 응용으로 도입된다. 즉, 수열, 무한수열의 극한, 무한등비급수의 합을 먼저 지도한 후에 함수의 극한과 연속성을 다루고 미분계수를 비롯한 미적분의 기본개념을 지도하게 된다. 아래와 같이 변수의 증분과 그에 대응하는 함수의 증분과의 몫, 즉, 평균변화율이 극한을 가질 때의 극한값으로 미분계수를 정의한다.

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이 때 미분계수 $f'(a)$는 기하학적으로 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 된다는 것을 다루고(김연식, 김흥기, 2001, p.141), 바로 도함수를 도입한다. 적분은 미분의 역으로서 도입되며, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 구간 $[a,b]$를 n등분한 각 분점(양 끝점 포함)을 차례로, $a=x_0, x_1, x_2, \cdots x_n=b$, 또 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$라고 할

때 하면, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x$로 정의하고(김연식, 김흥기, 2001, p.185), 미적분의 기본정리를 다룬다.

학교수학에서 극한 개념을 지도하게 된 것은 20세기초에 Perry와 Klein 등의 수학교육 개혁 운동의 영향으로 미적분을 학교에서 지도하면서부터이다. 그러나 미적분의 기본적 개념으로 학교수학에 도입된 극한 개념은 그 자체가 학습하기 쉽지 않다.

III. 미적분의 역사

학생들은 Newton과 Leibniz에 의해 미적분이 만들어졌다는 사실에 대해서 듣기는 하지만 자신들이 배운 것과 동일하게 처음부터 이루어졌으리라 생각하며, Newton과 Leibniz 이전에도 미적분의 중요한 여러 문제들이 연구되었다는 사실은 알지 못한다. 실제로 미적분을 탄생시킨 계기가 되었던 문제들은 단지 미적분 단원의 응용문제로서 다루어지며 앞에서 배운 계산을 연습하는 과정으로 여겨진다. 따라서 미적분이 가진 중요성과 의미는 상실된 채 계산법의 숙달에만 초점이 놓여진다. 이러한 미적분 교육의 문제점이 교과서의 형식적인 정의와 전개에 의한 것임을 지적하고 의미를 주기 위하여 여러 대안이 제시되고 있다(Gravemeijer & Doorman, 1999; Kaput, 1994; Toeplitz, 1967). 이러한 여러 대안에서 생각해볼 수 있는 것은 미적분의 역사와 미적분의 지도를 연결시키고자 하는 것이다.

수학의 역사는 인류라고 하는 가장 큰 학습자의 학습과정이라고 볼 수 있다. 역사를 통하여 학생들의 학습 과정을 이해할 수 있고, 학생들이 보다 효과적으로 수학을 학습할 수 있도록 교재를 만드는데 도움을 얻을 수 있다. 역사발생적 원리는 단순히 수학을 역사적 발달 순서대로 가르치자는 것이 아니라, 수학사에서 볼 수 있는 개념의 발생과 그 발달 과정을 고찰하여 학생들이 보다 잘 이해할 수 있도록 교재를 구성하여 교수-학습에서 활용하게 하려는 것을 뜻한다. 이러한 관점에서 볼 때, 미적분의 역사를 미적분 지도에 적용하려는 것은 자연스러운 대안이 될 수 있으며 실제로 미적분은 학습-지도와 연관하여 수학의 역사 중에서 가장 활발하고 다양하게 연구된 분야 중의 하나이다. 이 장에서는 미적분 지도에 대한 시사점을 찾고자 미적분의 역사에 대해 간략하게 살펴보고자 한다.

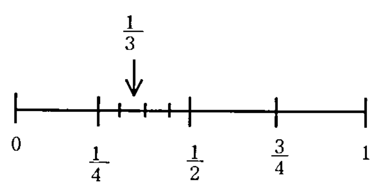
(1) Archimedes와 미적분의 기원

미적분은 Newton과 Leibniz에 의해 본격적으로 발달되었으나 그 개념은 이미 오래 전부터 있었고 그리스의 Archimedes에게서 그 기원을 찾아볼 수 있다. 고대 그리스 기하학에서는 무한과 관련된 문제에 대한 증명 방법으로 착출법을 주로 사용하였으며 착출법을 사용할 때 무한을 피하기 위하여 귀류법을 사용하였다. 착출법이란 Eudoxus가 처음으로 사용하였다고 알려졌으며, "임의의 어떤 양에서 반 이상(또는 정확히 반)을 없애고, 그 나머지에서 그 반 이상을 없애고, 이런 과정을 계속하면 결국에는 주어진 양에서 어떤 작은 양보다도 작은 어떤 양이 남는다(Boyer, 1991)"는 것으로 유클리드 원론의 제10권 명제 1에 소개되어 있다. 착출법은 원뿔의 부피는 밑면과 높이가 같은 원기둥 부피의 $\frac{1}{3}$이라는 사실을 증명하는데 사용되었고, 원의 넓이, 구의 부피, 포물선의 넓이나 길이 등을 구할 때 사용되었으며, 이러한 방법

에서 미적분 특히 적분법의 발상을 뚜렷이 볼 수 있다. 예를 들면, Archimedes는 포물선으로 이루어진 도형의 넓이를 구하는 과정에서 "$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$"이 성립함을 보일 필요가 생겼으며, 이러한 사실을 다음과 같이 설명하고 있다.

> 길이가 1인 선분을 같은 길이를 갖는 네 개의 선분으로 나누어, 그 중 한 부분은 취하고, 두 부분은 버리고, 남은 한 부분은 남겨둔다. 남겨진 한 부분을 다시 길이가 같은 네 부분으로 나누어, 그 중 한 부분은 취하고, 두 부분은 버리고, 남은 한 부분은 남겨둔다. 이러한 과정을 계속하면, 우리는 정확히 $\frac{1}{3}$만을 취하게 되며, 남겨진 부분은 점점 작아지게 된다.(Zippin, p.29)

이러한 설명은 <그림 1>을 통해 쉽게 보여진다.



<그림 1> $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots=\frac{1}{3}$에 대한 설명

<그림 1>에서 남겨진 부분을 제외한 부분의 $\frac{1}{3}$만을 계속해서 취하고 있기 때문에 결국 그 합은 $\frac{1}{3}$이 될 것이다. 즉 착출법은 매우 직관적인 접근을 이용하여 그 결과를 예측하고 있으며, 무한을 피하고 이를 보다 엄밀하게 증명하기 위해 귀류법을 사용하고 있다. 귀류법을 사용한다는 것은 사전에 결과를 알고 있어야 하고 그것은 이 방법이 비발견적이라는 것을 뜻한다. Archimedes는 포물선의 넓이나 길이 등을 구할 때 착출법을 사용하였는데, 그의 방법에서 미적분 특히 적분법의 발상을 뚜렷이 볼 수 있다. Archimedes는 아마도 천재의 직관으로 적분의 개념을 파악하고 있었겠지만, 무한을 피하기 위해서 어쩔 수 없이 위와 같은 방법을 취했던 것 같다. 그러나 그가 사용한 착출법에는 미적분의 개념적 토대가 되는 직관적 발견적 방법이 숨어있으므로 교육적으로 시사하는 바가 크다고 할 수 있다.

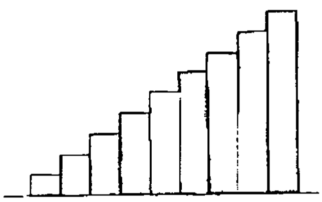
(2) 속도-거리에 관한 연구와 미적분

14세기 전반기에 Oxford의 Merton College의 T. Bradwardine, W. Heytesbury, R. Swineshead, J. Dumbleton 등의 스콜라학자들은 물리적 양의 연속적인 변화에 관하여 이론적인 연구를 하였다. 그 당시에는 운동에 관한 연구에 있어서 속도와 순간속도의 명확한 정의가 없었다. Merton 학파의 가장 주목한 만한 한 가지 업적은 등가속도 운동의 평균속도 정리 즉, $s=\frac{(v_1+v_2)t}{2}$를 만든 것이다.[1] 여기서 s는 시간 t동안 이동한 거리이고 v_1은 처음속도이고 v_2는 나중 속도이다.

14세기 중반에 N. Oresme은 문제를 시각화하기 위하여 상황을 그래프로 그리기 시작하였으며 Descartes보다 먼저 좌표기하를 만들었다. 그는 그래프에서 직선의 길이 또는 직사각형의 넓이는 변수의 값을 나타낸다고 설명하였다. Boyer(1959)는 Oresme이 아마도 처음으로 곡선 아래의 넓이가 물리학적 양을 나타낸다고 보았

1) 등가속도 운동의 평균속도 정리는 step function을 이용하면 비교적 직관적으로 접근가능하다.

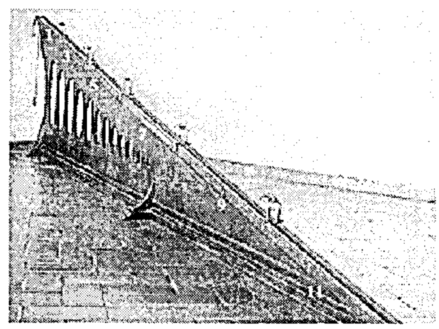
을 것이라고 언급한다. Oresme은 등가속도와 속도의 차이를 인식하였고, 등가속도로 움직이는 물체가 이동한 거리를 연구하면서 속도는 동일한 시간 간격 동안 동일한 양으로 증가한다는 것을 알았다. <그림 2>는 속도를 직사각형의 높이로, 시간을 직사각형의 밑변으로 표현하는 그래프이다. 이 그래프에서 직사각형의 넓이는 그 시간 동안 움직인 거리를 나타낸다 (Gravemeijer & Doorman, 1999).



<그림 2> 직사각형의 높이에 의해 표현된 속도

Boyer(1959)는 Oresme이 그 시대의 수학적 원자론을 마음에 두고 직선이 너비를 갖는다고 생각하였기에 넓이는 수많은 직선으로 이루어진 것으로 생각하였다고 말한다. 이것은 순간속도, 곧 매우 짧은 시간 동안의 속도라는 관념과 연계된다. 이러한 관념은 14세기 후반과 15, 16세기에 파리와 이탈리아, Oxford의 여러 사람들이 공유했던 생각이며 Galileo에 의하여 가장 대담하게 이루어졌다.

17세기에 Galileo는 자유 낙하하는 물체가 등가속도로 움직인다고 추측하였다. Merton 법칙을 실제 운동에 적용하면, 같은 시간 간격동안 움직인 거리 사이의 비가 1:3이 되며, 만약 시간을 4개의 같은 구간으로 나눈다면 1:3:5:7이 되어 홀수의 수열로 결정되는 비가 계속된다고 생각하였다. 이때, $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$이 되어 이러한 수열을 다 더하면 결국 어떤 수의 제곱이 된다. Galileo는 그의 추측을 실험하기 위하여 그림 2와 같은 미끄럼틀을 만들었다. 그림에서 점으로 표시된 곳 사이의 거리는 위에서 말한 홀수에 비례한다. 미끄럼틀 위에 공을 굴려서 그 공이 점으로 표시한 곳 사이를 통과하는 데 같은 시간이 걸린다는 것을 확인하였다. Galileo의 실험은 각각의 시간 간격동안 낙하거리가 일차적으로 증가한다는 것을 보여준다. 이 결과로부터 그는 거리와 시간과의 관계가 이차적이어야 한다고 결론을 내렸다. 오늘날의 미적분의 개념으로 생각하면 일차함수의 적분이 이차함수가 된다는 것을 의미한다.



<그림 3> Galileo의 낙하 실험(Doorman, 2001)

(3) 미적분의 발달

미분과 적분의 두 개념은 17세기에 Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat, Pascal, Gregory, Roberval, Huygens, Barrow, Wallis, Newton, Leibniz 등의 수학자들에 의하여 개척되었다. 이들 각자는 도함수와 정적분을 정의하고 계산하는 데 있어 각자 고유한 방법으로 접근하였다.

불가분량이라 불리는 무한소를 이용해서 Cavalieri는 곡선 아래의 넓이를, Kepler는 회전체의 부피를 구하였다. 이 방법은 곡선 아래의 넓이를 매우 얇은 사각형들로 분할한 후에 그 사각형들을 합하여 원하는 넓이를 구하는 것이다. 이러한 생각이 정도의 차이는 있지만 일찍 Archimedes로부터 Cavalieri에 이르기까지 줄곧

이론적으로 전개되어 왔다. 그러나 2개의 무한소의 比로 나타내는 미분의 개념은 이전에는 찾아 볼 수 없었던 것으로 운동에 있어서의 속도, 곡선에 긋는 접선 등의 문제에서 출발한 새로운 개념이었다.

그리스의 기하학은 르네상스의 수학자들에게 특별한 경우에는 풀 수 있으나 일반적인 해법이 없는 많은 문제들을 남겼다. 그 중에는 곡선의 접선을 구하는 문제, 법선을 구하는 문제, 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이에 관한 문제, 최대값과 최소값을 구하는 문제들이 있다. 미적분의 발달의 직접적인 계기가 된 그러한 문제에 관한 이론은 Descartes의 해석기하가 발달되면서 새로운 활로를 찾게 되었다. 17세기에 들어서면서 기호와 문자를 적극적으로 사용하는 방법이 도입되었고 방정식의 일반론이 확립되었다. Archimedes의 구적이론 속에 들어 있었던 극한의 개념은 이때부터 비로소 근대적인 논증 방법에 의해 다루어지고, 수학은 변량을 다루는 수학으로 근본적인 탈바꿈을 하였다.

그러나 Newton과 Leibniz 이전에는 일반적인 해법이 없었고 다양한 문제들 사이의 관계에 대한 어떤 이해도 없었다. Courant(1941)은 이에 대하여 다음과 같이 말한다.

> 17세기에 Galileo와 Kepler를 이어 많은 사람들의 관심을 사로잡고 있었던 것은 다음 두 가지 문제였다. 첫 번째 문제는 주어진 곡선에 접하는 접선을 찾는 접선의 문제로 미분의 근본적인 문제이다. 두 번째 문제는 주어진 곡선 내부의 넓이를 구하는 구적(quadrature)의 문제로 적분의 근본적인 문제이다. Newton과 Leibniz의 위대한 업적은 이 두 문제가 서로 밀접하게 연결되어 있다는 것을 명확하게 인식한 것이다. 그들에 의하여 새롭게 통합된 방법은 과학의 강력한 도구가 되었다.

한때 Archimedes와 같은 천재를 필요로 했던 넓이, 부피, 모멘트에 관한 문제들과 심지어 그보다 훨씬 어려운 문제들이 Newton과 Leibniz의 미적분이라 불린 무한소 방법을 도식화한 결과 지금에는 쉬운 문제가 되었다(Freudenthal, 1983).

Newton의 알고리즘의 기초는 유율(fluxion)의 개념이다. Newton은 유체를 변화 중에 있는 어떤 양으로 생각하고 유체의 유율을 변화율로 보았다. 예를 들면, 어떤 사람이 연필로 직선을 그을 때, 직선의 길이를 유체로, 어느 순간의 연필의 순간 속도를 유율로 볼 수 있다. 초기의 수학자들이 고심했던 복잡한 문제들에 대한 Newton의 단순화는 주어진 유체의 유율을 계산하는 문제, 주어진 유율의 유체를 계산하는 문제로 이루어진다. 이 문제들은 각각 미분과 적분의 문제이다. Newton은 그의 '유율의 방법'에서 전형적인 일단의 기하 문제들을 체계화하는 데 있어서 다음과 같이 유율의 개념의 유효성을 명확히 언급하고 있다(Kitcher,1984).

> 지금 이것을 하기 위해, 나는 이에 대한 모든 어려움은 단지 이 두 가지 문제로 압축된다는 것을 발견할 것이다. 국소 운동으로 묘사되는 공간에 대해 어떻게 가속되고 늦춰지는지를 제시할 것이다.
> - 이동거리가 연속적으로 즉 모든 시각에서 주어졌을 때 주어진 어떤 시각에서의 운동의 속도를 찾는 것
> - 운동의 속도가 연속적으로 주어졌을 때 주어진 시간에서의 이동거리를 찾는 것

Newton은 접선, 법선, 곡률, 최대, 최소의 문제들이 어떻게 첫 번째 문제로 압축되는지를 보여준다. 구적 문제는 두 번째 문제로 압축되고 곡선의 길이를 구하는 문제는 둘 다 포함한다. 이러한 변형은 Newton의 기하에 대한 운동학적 접근에 의해 영향을 받았다. 그는 운동학적 용어로 기하학적 문제를 제시함으로써 기하학적 문제가 어떻게 기본적인 문제들로 압축되

는지를 보였다. 그의 과제는 기본적인 문제들에 대한 알고리즘을 찾는 것으로 압축되었고 그의 논문들은 이러한 문제들을 해결하기 위한 규칙들로 이루어졌다. 무한소와 무한급수의 방법은 Newton의 규칙들의 발견과 정당화에 중요한 역할을 하였다.

Kitcher(1984)에 의하면, Newton은 실무한의 존재를 인정하는 데 주저하고 극한값에 무한히 접근하는 그러나 결코 완결되지 않는 잠재적 극한을 수용하는 극한 방법을 택하였다. Newton은 유율, 극한에 관한 설명이 불완전하다는 것을 알고 있었으나 그의 수학적인 연구결과가 물리학적으로 참이 되었으므로 미적분학의 논리적 기초에 관하여 별로 시간을 소비하지 않았다. 그의 '프린키피아'에서 그는 기하학적 방법을 사용했고 극한에 관한 정리들을 기하학적 형태로 제시하였다. 물론 기하학적 증명은 전적으로 엄밀한 것은 아니었다.

Newton이 발견한 미적분법은 그와 거의 같은 시기에 Leibniz에 의해 독립적으로 발견되었다. Leibniz는 무한소 기하학을 무한소 해석학이라는 일종의 기호 수학으로 전환하였고, 무한소를 취급하는 방법으로서 특성삼각형의 개념을 확립하였고, 해석학의 중심 개념으로서 함수의 개념을 도입하였으며, 차분·미분 등의 개념을 확립하고, 무한급수의 하나로서 테일러 전개를 파악하였다.

Newton과 달리 Leibniz는 곡선의 운동학적 개념을 받아들이지 않았으며 무한소 계산법을 사용했으나 그 기하학적 의미는 다루지 않았다. Leibniz는 미적분의 기호 표시에 있어서 Newton보다 뛰어나 현재에 쓰이고 있는 기호법은 Leibniz식이다. 이 Leibniz식의 기호 표시는 계산에서 사용할 때 편리하다. 그러나, Leibniz의 미적분법에는 '한없이 접근한다'라든가 무한소의 양 또는 무한소의 과정에서 계산을 가능케 하는 기본 개념의 해석이 분명치 않았다.

1734년 Berkeley는 Newton의 미적분의 엄밀성에 대해 비판하였다. 그는 Newton의 방법이 성공적이나, 그 성공에 대한 어떤 설명도 하지 않고 있다고 비판하였다. 이러한 비판으로 인해 Newton의 미적분은 쇠퇴하게 되었다. 반면에 Leibniz는 그의 작업의 궁극적 정당성은 그것의 유용성에 있다고 생각하였다. 그는 그가 창조한 계산의 과정이나 그 가치를 강조하였고, Leibniz의 뒤를 이은 Bernoullis, Euler 등의 대륙의 수학자들은 그러한 비판을 묵살하였다.

Newton과 Leibniz가 발견한 미적분학은 많은 비판을 받기는 했지만 Newton과 Leibniz의 연구결과를 토대로 빠른 발전을 이루게 된다. 특히 Newton과 Leibniz가 이용했던 '미적분학의 기본정리'는 미적분학의 발달에 핵심적인 역할을 하게 된다. 처음 '미적분학의 기본정리'를 발견한 사람은 Barrow이다. '미적분학의 기본정리'를 이용하여 우리는 두 가지를 할 수 있다. 즉 이미 알고 있는 정적분을 이용하여 부정적분을 구하거나, 이미 알고 있는 부정적분을 이용하여 정적분을 구할 수 있다. 그러나 Barrow는 전자에 관심을 둔 반면, Newton과 Leibniz는 후자에 관심을 가졌다(Toeplitz, 1967, pp.130-131). 즉 이미 알고 있는 부정적분을 이용하여 정적분을 구함으로써, 이전에는 배우기 어려웠던 계산이 이제는 누구나 배우기 쉬운 '계산법(calculus)'이 되었고, 17세기와 18세기 미적분학은 직관적으로 이해되었고 넓은 범위의 문제들에 응용되었다.

(4) 미적분의 엄밀화 과정

Cauchy는 극한을 미적분학의 기초로서 그 이론적 근거를 부여하였으며, 미적분학은 이러한 극한 방법을 사용하여 상당한 발전을 이루었

다. 실제로 그는 변수가 취하는 값이 차츰 일정한 값에 접근해서 그 차가 임의로 주어진 양보다 적어질 때 그 일정치를 처음의 변수의 극한이라 정의하였고 ε, δ 등의 기호를 써서 현재의 ε-δ 방법에 가까운 방법을 전개하고 있다. 이 ε-δ 방법은 ε, δ가 항상 유한값을 취한다는 점에서 어떤 의미로는 극한방법의 유한화라고 할 수 있다. 그는 철저한 이론 정비 작업을 하였는데, 그 내용을 보면 변수, 상수, 극한값 등을 정의하고, 이것을 바탕으로 차례로 무한소, 함수, 연속, 무한급수의 합 등을 정의하고 다시 이를 바탕으로 도함수, 정적분을 정의하고 평균값의 정리를 거쳐 미적분학의 기본정리를 중심으로 미적분의 체계를 이루었다.

미적분학은 그후 이러한 극한 방법을 사용하여 상당한 발전을 이루어 왔으나 그 기초론적인 위기를 맞게 되고, Weierstrass의 ε-δ 방법의 도입으로 비로소 엄밀한 전개가 가능하게 되었는데, ε-δ 방법은 실무한을 받아들인 것으로 볼 수 있다. 무한집합을 실무한으로 받아들여 그 등급을 구분하고 연산을 정의하여 실무한에 관한 이론을 정립한 Cantor의 집합론의 등장과 함께 현대 수학은 결정적인 발전을 이룩하게 되었다.

(5) 20세기의 미적분학

19세기말과 20세기 전반부에 집합론을 토대로 한 Weierstrass의 해석학체계가 이상적인 해석학이 되었고 유일하게 합리적이며 절대적인 진리로 여겨졌고 Lebesgue의 적분론을 비롯한 해석학의 발달로 이어졌다. 그러나 이와 달리 무한소에 기초한 비표준 해석학은 20세기 중반 만들어졌다. 대부분의 경우 비표준해석학이 미국의 수학자 A.Robinson이 1961년 만든 것으로 생각하지만 그것은 정확한 것이 아니다. 비표준해석학은 19세기와 20세기 전반부까지 거슬러 올라가며, 1950년대의 Schmieden, Laugwitz, Monna의 논문에서도 그 모습을 볼 수 있다 (Medvedev, 1988). 비표준해석학은 17, 18세기에 이용된 무한소에 대한 논리적 기초를 제공한다. Robinson의 비표준 해석학에서는 무한소와 무한대를 실무한으로 간주하여 실수의 집합을 초실수의 집합으로 확장함으로서 모순 없는 새로운 무한소 방법을 발전시킬 수 있었다. 비표준 해석학은 부분체로서 $\mathbb{R}$을 포함하는 초실수체가 존재한다는 사실에 근거하며, 이는 17, 18세기의 대부분의 직관적인 무한소 논쟁을 논리적인 정의로 전환하기 위하여 이용할 수 있다. Medvedev(1988)에 따르면, 오늘날 무한소방법은 “엄밀하지 않은 발견술적 방법”이 아니라 상당히 단순하고 우아하게 이미 알려진 결과뿐만 아니라 새로운 결과를 얻는 것을 가능하게 하는 훌륭한 수학적 추론 방법으로 여겨진다.

Ⅳ. 미적분 지도의 대안적 접근

미적분은 여러 사람에 의하여 오랜 기간에 걸쳐 발달해왔으며, 지난 3세기 동안 과학의 중요한 언어로서 사용되었다. 미적분의 발생과 발달의 과정에서 미적분의 기본적인 몇 가지 문제들은 몇 세대를 걸친 부단한 노력에 의해 해결되었다. 20세기초에 Perry와 Klein 등이 전개한 수학교육 개혁운동은 이러한 미적분의 응용성과 교육적 가치에 대해 인정하였고 그에 따라 학교에서 미적분을 지도하게 되었다.

우리 나라 학교수학에서 미적분은 고등학교 학교수학의 중핵으로서의 역할을 해 왔으나 앞으로 시행될 제 7차 교육과정에서는 ‘수학 II’와 ‘미분과 적분’에서만 다루어지게 되며 대학에서 자연 계열이나 공학 계열을 이수하려는

학생들을 대상으로 하게 된다. 그러나 미적분 지도의 내용과 접근 방법 면에서는 제 6차 교육과정의 내용과 크게 다르지는 않다. 교과서에서는 논리적인 전개를 기초로 미적분 과정이 다루어지며, 미적분 발달의 계기가 되었던 문제들은 학생들이 개념을 이해하고 학습하는 단계에서 이용되지 않고 이미 배운 계산을 연습하는 응용문제로만 다루어진다. Kline(1973)은 미적분이 극한 이론 위에 세워졌기에 극한 개념으로부터 미적분을 가르쳐야 한다고 결론을 내릴 수는 있으나 학생들이 아무런 동기유발없이 그러한 극한 개념에 의한 논리적인 학습을 할 수 있는가에 관하여 의문을 던지며 역사적으로 미적분이 물리와 연관하여 발전되었기 때문에 학교수학에서도 그러한 물리문제와 더불어 제시해야 한다고 말한다. 우정호(2000)는, 미적분 지도의 주된 문제점으로 기본적인 개념의 이해에 충실하지 못하고, 형식적인 계산법을 습득하게 하는 형식주의적인 지도에 있다고 한다. 이러한 형식적인 미적분 지도와 관련하여 여러 문제점들을 제기할 수 있지만, 그 중에서도 '미적분학의 기본정리'는 그 의미에 대해서는 충분히 고려되지 못한 채 단지 계산을 위하여 이용되는 것으로만 이해된다. 미적분학의 교육적 가치는 미분과 적분의 관계, 즉 역조작을 고려할 수 있게 함으로써 수학적 사고에 풍부한 조작 가능성을 이해하도록 하는데 초점을 맞추어야 하며, 이러한 점에서 '미적분학의 기본정리'는 미적분 지도에 있어서 궁극적인 목적이 되어야 한다.

그러므로 학생에게 동기유발을 줄 수 있는 문제상황을 제시하는 것이 필요하고, 역사적으로 볼 때도 문제상황에서 미적분이 발달되었다면 그러한 발달을 가져올 수 있는 문제상황을 도입하는 것이 필요하다고 볼 수 있다. 역사발생적 관점에서 볼 때 단 하나의 대안을 생각할 수 있는 것은 아니다. 보는 시각에 따라 다양한 대안이 가능하다. 곡선 아래의 넓이나 회전체의 부피를 구하는 문제를 제시하여 Kepler와 Cavalieri가 했던 무한소 방법으로 시작할 수도 있다. 또한 Gravemeijer와 Doorman(1999)은 속도-거리와 관련된 문제상황에서의 그래프의 재발명을 통하여 미적분을 지도하고자 시도한다. Kaput 역시 SimCalc 프로젝트에서 속도-거리에 관한 다양한 문제상황을 통하여 미적분의 개념을 도입한다.

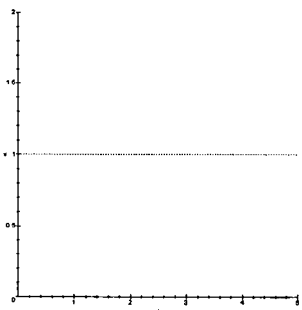
현재 우리 나라 교육과정에서 수열을 먼저 다루고 있다는 점을 생각할 때, 미적분 지도의 대안적 접근법의 하나로 속도-거리와 관련된 문제상황을 통하여 수열의 내용과 관련지어 미적분의 기본정리를 도입하는 방안을 생각해 볼 수 있으며 Gravemeijer와 Doorman(1999)의 연구를 기초로 대략 다음과 같은 과정으로 도입할 수 있다.[2)]

먼저 등속도 운동과 관련된 다음과 같은 문제를 제시한다.

처음 5초 동안 1m/s로 굴러가는 공이 있다. 이 공이 굴러간 거리는 몇 m인가? 처음 t 초 동안 굴러간 거리는 몇 m인가?

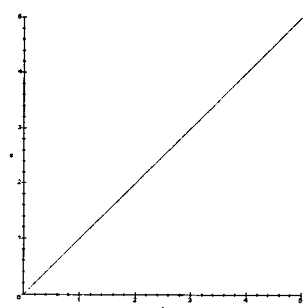
처음 5초 동안 속도가 $1(m/s)$로 일정한 운동을 그래프로 나타내보면 <그림 4>와 같다. 이 때 이동한 거리는 $1(m/s)\times5(s)=5(m)$가 되며 그래프에서 $v=1$이라는 직선과 t축 사이의 넓이와 같다.

2) Freudenthal(1991, p.55)은 고등학교 수준에서, 그의 표현대로 하면 '미분과 적분의 방법(Differential and Integral Methods)' 즉, 그래프 표현에 의한 접근 방법에 의하여 미적분이 도입되어야 한다고 보았다. Gravemeijer와 Doorman(1999)은 Freudenthal의 이러한 생각을 기초로 하고 있다.



<그림 4> 등속도 운동의 시간-속도 그래프

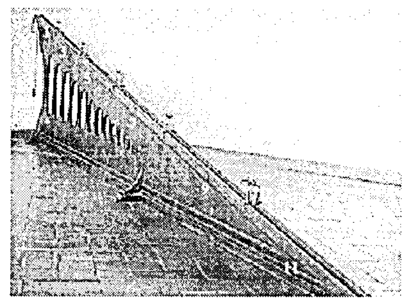
마찬가지로 처음 t초 동안의 거리는 $s(m)=1(m/s)\times t(s)=t(m)$가 되며, $s=t$라는 식이 되며 <그림 5>와 같은 그래프로 나타낼 수 있다.



<그림 5> 등속도 운동의 시간-거리 그래프

등속도를 다르게 하여(예를 들면 2m/s, 3m/s 등) 각각의 이동거리를 구하고 함수로 나타내 본다. 등속도로 운동했을 때 이동거리는 시간 t에 대한 일차식으로 표현된다는 것을 알 수 있다.

다음으로 등가속도 운동과 관련된 다음과 같은 문제를 제시한다. 다음 문제에서 제시된 운동은 Galileo의 실험을 보여주는 것이다. 이 때 각 이동거리는 $1=1^2$, $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$, $1+3+5+7=4^2$이 되고, 수열의 합으로 표현하면 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$이다. 이동거리의 차이는 $2^2-1^2=3$, $3^2-2^2=5$, $4^2-3^2=7$이 되고, 마찬가지로 수열로 표현하면 $n^2-(n-1)^2=2n-1$ $(n\geq 2)$이 된다.

> 아래 그림과 같은 경사면에서 공을 굴렸다. 이 때 공은 중력가속도에 의하여 등가속도로 운동한다. 그림에서 각 점 사이의 거리의 비는 1:3:5:7이다. 1초 동안 그 각각의 거리를 지나간다고 할 때,
> (ⅰ) 처음 1초 동안, 처음 2초 동안, 처음 3초 동안, 그리고 처음 4초 동안 움직인 거리를 구해보자.
> (ⅱ) 이 운동의 시간-속도 그래프와 시간-거리 그래프를 그려라.
>
> 

이 문제의 각 시간별로 속도를 구하기 위해서는 Merton 학파가 발견한 등가속도 운동의 평균속도 정리인 $s=\frac{(v_1+v_2)t}{2}$를 이용할 수 있으며, 등가속도 운동에서의 속도와 거리 사이의 관계를 탐구하도록 격려하여 다음과 같은 풀이를 유도할 수 있다.

1초, 2초, 3초, 4초, …, t초의 속도를 각각 $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots, v_t$라 하고 각각의 속도를 구하면 다음과 같다.

$1=\frac{(0+v_1)\times 1}{2}$ 에서 $v_1=2$

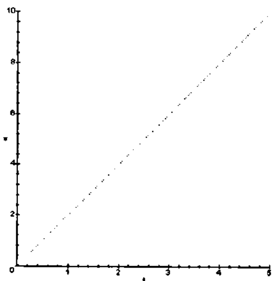
$3=\frac{(v_1+v_2)\times 1}{2}$ 에서 $v_2=4$

$5=\frac{(v_2+v_3)\times 1}{2}$ 에서 $v_3=6$

$7=\frac{(v_3+v_4)\times 1}{2}$ 에서 $v_4=8$

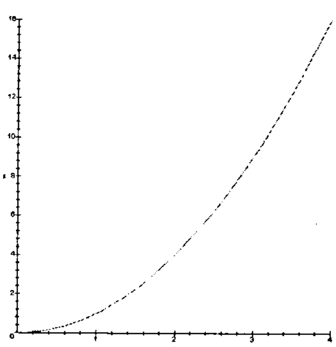
이러한 사실을 일반화하면 $v_t=2t$가 된다는 사실을 쉽게 알 수 있다.

여기서 시간-속도의 관계를 나타내는 $v_t=2t$의 그래프에 대해 생각해 보자.



<그림 6> 등가속도 운동의 시간-속도 그래프

<그림 6>에서 t^2은 0초부터 t 초까지의 이동거리 곧 0부터 t 까지의 직선 아래의 넓이가 되고, 이것은 속도가 시간의 일차식으로 표현될 때, 곧 $v=2t$가 될 때, 거리는 시간의 이차식 곧 $s=t^2$이 됨을 보여준다. <그림 7>은 $s=t^2$의 시간-거리 그래프이다.

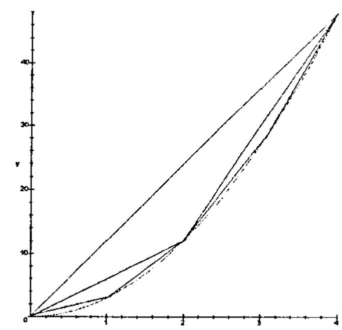


<그림 7> 등가속도운동의 시간-거리 그래프

이러한 도입은 속도-거리라는 물리 문제의 상황으로부터 수열 단원에서 배운 수열의 일반항과 수열의 합 사이의 관계를 이용하여 자연스럽게 유도될 수 있으며, 곡선 아래의 넓이를 구하는 문제와 거리를 구하는 문제가 서로 연관되며 적분의 개념이 된다는 것을 보여준다. 또한 이동거리로부터 어느 시간 간격 동안의 거리의 변화량이라는 개념에서 속도를 구하고, 시간 간격을 짧게 하였을 때 속도가 순간속도로 접근한다는 것을 이야기함으로써 미분의 개념을 도입할 수 있다.

다음으로 시간-속도의 관계가 $v_t=3t^2$일 때, 시간-거리의 관계에 대해 생각해 보자. 이 문제를 해결하기 위해서는 Archimedes가 사용한 착출법을 이용할 수 있다.

등속도 운동과 등가속도 운동에 대한 관찰을 토대로 시간-속도의 그래프에서의 t-축과 곡선 사이의 넓이는 시간-거리에 대한 함수를 나타낸다는 것을 알 수 있으며, 이러한 사실을 토대로 시간-속도의 관계가 $v_t=3t^2$일 때, 시간-거리의 관계를 구하기 위해서는 <그림 8>의 곡선 아래의 넓이를 구하는 문제로 귀착된다.



<그림 8> Archimedes의 착출법을 사용하여 넓이 구하기

먼저 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지의 넓이를 구해 보자. 먼저 <그림 8>에서 세 점 (0,0), (4,0), (4,48)을 이어 생기는 삼각형의 넓이를 구하여 s_1이라 하고, 네 점 (0,0), (4,0), (4,48), (2,12)를 차례로 이어 생기는 도형의 넓이를 s_2라 하고,

여섯개의 점 (0,0), (4,0), (4,48), (3,27), (2,12), (1,3)을 차례로 이어 생기는 도형의 넓이를 s_3이라 하고, 이와 같은 방법으로 각 구간을 반씩 나누어 생기는 사다리꼴의 넓이의 합을 s_4, $\cdots$, s_n이라고 한 다음 $s_1, s_2, \cdots, s_n$을 구하면 다음과 같다.[3)]

$$s_1=\frac{3\times4^2\times4}{2}=96$$

$$s_2=s_1-24$$

$$s_3=s_2-6=s_1-24-6$$

$$s_4=s_3-\frac{3}{2}=s_1-24-6-\frac{3}{2}$$

$$s_n=s_1-\sum24\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

이 되며, 결국 $\lim s_n=64$가 된다.

같은 방법을 사용하여 0에서 t초 사이의 그래프의 넓이를 구하면, $s_t=t^3$이 된다는 사실을 확인할 수 있으며, 이상을 정리하면 다음과 같다.

$v_t=1$일 때, $s_t=t$

$v_t=2t$일 때, $s_t=t^2$

$v_t=3t^2$일 때, $s_t=t^3$

그렇다면 $v_t=nt^{n-1}$일 때, $s_t=t^n$이라는 사실을 추측하기는 그리 어렵지 않을 것이며, 이러한 사실에서 다항식의 미적분에 대한 기초정리인 $\int nt^{n-1}dt=t^n$를 얻을 수 있다. 또한 역으로 $s_t=t^n$의 그래프에서 주어진 시간 t에서의 접선의 기울기를 계산해 보도록 함으로써 접선의 기울기가 그 점에서의 순간속도와 일치한다는 사실을 깨닫도록 할 수 있다. 이상의 접근방법은 미적분을 처음 학습하는 학생들에게 제시될 수 있는 한 가지 수업모형이 될 수 있다. 결국 이러한 접근법은 비교적 실제적인 상황에서 출발하여 직관적으로 접근하고 있으며, 미분과 적분에 대한 심상과 더불어 미적분학의 기본정리인 '$\Phi(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분이면, $\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$'에 대한 심상을 제공해 줄 수 있을 것이다.

위와 같은 접근법을 토대로 일반적인 함수의 정적분을 구하는 방법으로써 현재 고등학교에서 시도되고 있는 직사각형의 넓이의 합의 극한을 이용한 보다 형식적이고 엄밀한 접근법이 시도될 필요가 있으며, 고등학교에서의 미적분은 현재와 같은 여러 가지 함수의 미적분을 기계적으로 구하고 이를 응용하여 넓이와 부피를 구하는 방법을 지양하고, '미적분학의 기본정리'를 최대한 강조하고 이에 대한 응용으로서 몇 가지 간단한 경우에 대한 문제만을 다루는 것이 합리적일 것이다.

V. 결론 및 제언

역사적으로 볼 때 미적분의 기본적인 몇 가지 문제들은 몇 세대를 걸친 부단한 노력에 의해 해결되어 왔으며, 미적분은 과학 특히 물리학의 발달과 더불어 발전되었고 과학의 발달을 위한 도구로 사용되었다. 20세기초에 Perry와 Klein 등은 이러한 미적분의 응용성과 교육적

---

3) 일반적으로 포물선 $y=ax^2$위의 세 점 $(t_1,at_1^2),(t_2,at_2^2),\left(\frac{t_1+t_2}{2},\frac{a(t_1+t_2)^2}{4}\right)$을 잇는 선분으로 둘러싸인 삼각형의 면적은 $\frac{a|t_1-t_2|^3}{8}$이다. 이러한 사실을 이용하면 최초의 삼각형의 면적 s_1에서 빼게 되는 수열 24, 6, $\frac{3}{2}$ $\cdots$은 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이루게 된다.

가치에 대한 인정하였고 그에 따라 학교에서 미적분을 지도하게 되었다. 현재 교과서에서 미적분은 극한 개념의 응용으로 도입된다. 그러나 극한 개념에 기초한 논리적인 전개를 기초로 미적분 과정이 다루어지며 계산법의 숙달에만 초점이 놓여진다. 실제로 미적분의 발달을 가져왔던 문제들은 단지 미적분 단원의 응용문제로서 다루어지며, 앞에서 배운 계산을 연습하는 과정으로 여겨진다.

미적분의 역사에서 볼 수 있는 것은 미분의 개념보다는 적분의 개념이 먼저 나타났으며, 물리적인 개념 곧 속도-거리와의 관계와 관련지어 미분과 적분의 개념과 그 관계가 보다 분명하게 나타나기 시작하였다는 것이다. 속도-거리에 관한 문제와 곡선에 대한 접선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이에 관한 여러 문제를 해결하려는 과정에서 각각의 문제에 대한 다양한 해법이 제시되기 시작한 것은 비교적 오래전이지만 그러한 해법이 일반적인 알고리즘으로 발전되기까지는 오랜 시간이 걸렸으며, 미적분의 논리적 기초가 세워지고 엄밀한 이론으로 발전된 것은 비교적 최근의 일이라 할 수 있다.

미적분 지도에 대한 대안을 생각해보기 위하여 본 논문에서는 현재 미적분 지도에서의 접근 방법에 대해 살펴보고 미적분의 역사에 대한 고찰과 함께 속도-거리라는 문제상황을 통한 미적분의 도입에 관하여 살펴보았다. 이러한 도입은 적분 개념의 자연스러운 도입과 미분과 적분의 관계에 대한 이해의 바탕을 제공할 수 있다. 그러나 속도 특히 가속도의 개념은 역사적으로 볼 때 그 개념이 만들어지기까지 오랜 시간이 걸렸다는 점과 학생들이 물리 시간을 통하여 속도에 관한 내용을 배우지만 상당히 어려워한다는 점을 생각할 때 속도-거리의 문제상황을 통한 도입이 쉽게 이해되기는 어려울 수 있기에 후속연구가 필요하다.

참고문헌

교육부 (1998). 수학과 교육 과정. 서울: 대한교과서주식회사.

김연식, 김흥기 (2001). 수학 I. 서울: 두산.

김용운, 김용국 (1996). 수학사대전. 서울: 도서출판 우성.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교 출판부.

Bachelard, G. (1993). *La Formation de l'esprit scientifique : contribution a une psychanalyse de la connaissance*(16th ed.). Paris : J. Vrin.

Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York: Dover Publications.

Boyer, C. (1991). *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons Inc. 양영오, 조윤동 (공역)(2000). 수학의 역사(상). 서울: 경문사.

Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What is Mathematics?.* London: Oxford University Press.

Doorman, M. (2001). A Reinvention course for Calculus. Working session at PME & PSI 2001, Utrecht, The Netherland.

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York : Springer.

Freudenthal, H. (1983). Major Problems of Mathematics Education. In M. Zweng, et al. (Eds.). *Proceedings of the 4th International Congress on Mathematical Education* Boston : Birkhauser.

______(1991). *Revisiting Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematices,* 39, 111-129.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing Acsess to Calculus: New Routes to Old Roots. In Schoenfeld(ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*(pp. 77-156). Hillsdale, N. J.: L. Erlbaum Associates.

Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge.* New York, Oxford : Oxford University Press.

Kline, M. (1973). *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math.* New York: ST. Martin's Press.

Medvedev, F. A. (1988). Nonstandard Analysis and the History of Classical Analysis. *American Mathematical Monthly,* 105(7), 659-664.

Tall, D. (1981). Comments on the Difficulty and Validity of Various Approaches to the Calculus. *For the Learning of Mathematics,* 2(2), 16-21.

Toeplitz, O. (1967). *The Calculus-A Genetic Approach.* Chicago : The University of Chicago Press.

Zippin, L. (1962). *Uses of Infinity.* Washington: The Mathematical Association of America.

On the Teaching of Calculus according to the Historico-Genetic Principle

Park Moon Hwan (SangMyung University)
Min Se Young (Seoul National University, Graduate School)

Historically, mathematics has been developed by solving practical problems and gradually formalized and abstracted. But school mathematics seemed to stress the formalized and abstracted mathematics. The same is the case with calculus. In particular, it appeared extremely in teaching of calculus. It caused hindrance of learning and indeed, many students had difficulties in learning of calculus.

Therefore this study investigates the various approaches of calculus teaching and the history of calculus which include approaches by Archimedes, Galileo, Newton, Leibniz and Weierstrass etc. This may offer the implication for calculus teaching and we can find the alternative on the method of calculus teaching in historico-genetic principle. Finally we suggest the direction of calculus teaching from this perspective in the concrete.