대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 1 호
Journal of rhe Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.1, 29-47. March 2002

학교 대수 도입과 관련된 논의*

김 성 준**

I. 서론

대체로 산술은 학습에 있어서 필요성을 인정받는 편이다. 산술에서 다루는 다양한 주제는 실생활 주변에서 쉽게 찾아 볼 수 있으며, 또한 자연스럽게 사용된다. 그러나 대수는 다르다. 우리의 실생활은 대수를 사용하지 않고도 생활이 가능하다는 것을 보여준다. 예를 들어 신문 전체를 훑어본다고 할 때, 산술과 관련된 주제는 쉽게 발견할 수 있는 반면, 대수와 관련해서 무언가를 찾아보기는 쉽지 않다. 바로 이러한 점 때문에 대수를 배워야 할 필요성 및 가치에 대한 설명은 어려워진다. 이처럼 대수의 가치는 산술의 가치처럼 쉽게 입증될 수 있는 성질의 것이 아니다. 이것은 산술과 달리 대수에서는 그 효용 가치가 어디에 어떤 식으로 놓여 있는지 관심이 없을 경우, 그 가치를 인식하기 어렵기 때문이다. 그 결과 학생들은 대수를 학습하는 과정에서 다음과 같은 질문을 한다. "대수적 지식을 알지 못한다면, 우리에게 어떤 일이 일어나는가?" Usiskin은 이러한 질문에 대하여, "대수적 지식은 앞으로 직업을 선택하는 데 필요하며, 생활하는 가운데 대수를 통한 조정이 필요하며, 무언가 결정을 내려야 하는 상황에서 판단의 근거를 제공하며, 화학, 물리학, 경영학, 심리학 등 많은 학문 분야에서 논의되는 다양한 주제와 관련되어 있다"는 답변을 제시한다(Usiskin, 1995, p.23). 이러한 해석은 대수가 암기 대상이나 일반화된 산술로 유추해서 해석할 수 있는 단순한 공식들의 집합이 아니라, 사고를 위한 도구로 인식되어야 함을 강조한 것으로, Whitney는 이와 같은 맥락에서 수학적 상황과 추론과 함께 대수적 사고 과정의 필요성을 강조한다[1]. 이러한 맥락에서 보면 대수는 개념 이해와 수학적 사고를 신장시키기 위해서 필요하며, 따라서 대수 학습의 목표는 실제 학교 대수에서 지도되는 대수의 내용보다 폭넓게 제시되어야 한다. 그 예로 Thorpe는 대수 학습의 목표로 일반적인 방정식의 풀이를 포함하여 실제와의 관련성 및 다른 학문과의 연계성 등을 제시하였다[2]. 또한 Tall

---

* 이 논문은 2000-2001년도 서울대학교 대학연구센터(팀) 연구 과제 지원에 의하여 연구되었음.
** 서울대 대학원

1) Whitney에 따르면 학생들은 상황 속에서 수학적 요소를 보는 자연스러운 힘을 길러야 하며, 이러한 요소들과 관련된 결론을 연결짓는 추론과 함께 자신 있게 그 과정을 펼쳐나가는 힘을 길러야 한다고 하였다 (Thorpe, 1989, p.12, 재인용). 이것은 Usiskin이 제시한 답변과 같은 맥락에서 해석할 수 있을 것이다.

2) Thorpe(1989)는 대수 학습의 목표를 크게 4가지로 나누어 제시하였다: ① 특정한 조건을 만족하는 방정식을 만들고 그 방정식에서 해를 찾는 기술을 개발한다./ ② 학생들에게 응용문제, 비율문제와 같은 다양한 실제 문제를 해결하는데 도움이 되는 기호 사용법을 가르친다./ ③ 학생들이 미래에 물리나 공학에서 필요로 하는 다양한 기술을 준비시킨다./ ④ 학생들이 과학 문헌을 지적으로 읽어나갈 수 있도록 대수의 다양한 공식에 적응시킨다.

& Thomas는 "교육과정에서 대수의 도입이 간단한 것들을 어렵게 만들 가능성도 있지만, 대수를 가르치지 않는 것은 곧 어려운 것들을 간단하게 하는 것을 불가능하게 할 것이다(Mason, 1996, p.77, 재인용)"라는 말을 통해 대수가 교육과정에서 필수적인 지도 내용이 되어야 함을 강조하였다.

이처럼 학생들이 산술과 비교해서 대수의 필요성과 가치를 받아들이는데 있어서 많은 어려움을 느끼는 것에 비해, 대수 학습은 중등 수학 이후 문자 도입과 함께 교육과정에서 무엇보다 중요하게 다루어지고 있는 것이 현실이다. 이 글은 이러한 상황에서 발생하는 문제점, 곧 대수가 중요한 내용으로 학교 수학에서 강조되지만 그에 비해 학생들은 대수에서 제한된 사고를 하고 있으며 그 결과 많은 어려움을 호소하고 있는 현실에서 출발하여, 이를 해결하기 위해서는 무엇보다 학교 대수의 도입에 대한 분명한 논의가 필요하다는 것을 가정하고 있다. 이를 위해서 먼저 2장에서는 대수의 정의를 여러 문헌을 통해 살펴보고, 3장에서는 대수 도입과 관련된 다양한 관점에 비추어 학교 수학에서 제기되는 대수 도입의 문제를 논의할 것이다.

II. 대수의 정의

Freudenthal(1968)은 대수를 수학의 가장 기본적인 자료들을 추상화하고 위계를 구성하는 개념적 도구로 보고 있다. 그에 따르면, 대수는 유리수체 등을 다루는 '수의 대수'와 기하에서 점, 선, 변환과 그 합성을 다루는 '기하의 대수' 두 가지로 구분된다(Bell(2), 1996, p.168-169, 재인용). 학교 수학은 크게 대수와 기하로 구분되나, Freudenthal의 이러한 관점에 따르면 결국 대수가 이 두 영역에서 핵심적인 역할을 한다고 볼 수 있다. 학교 수학에서 대수의 이러한 역할을 고려할 때, 대수의 도입은 신중하게 다루어져야 하며 무엇보다 중등 수학 이후 학생들의 이해 수준을 향상시키기 위해서는 더욱 중요하게 다루어져야 한다. 이에 학교 대수 도입을 논의하기에 앞서 우선 대수에 대한 분명한 정의를 살펴볼 필요성이 제기된다.

일반적으로 학교 대수는 문자 기호와 방정식이 중심에 놓여 있다. 따라서 기호 조작과 방정식을 강조한 대수의 정의를 우선 살펴보면 다음과 같다. Katz(1993)는 대수에 대한 정의를 분석하면서 대수에서 가장 중심이 되는 아이디어를 방정식의 풀이와 이를 위한 기호의 조작으로 보았으며, Artin(1993) 역시 수와 관련된 추론에서 그것이 일반적인 성질을 발견하는 것이든 기지수의 관계로부터 미지수를 발견하는 것이든 문자를 포함한 과학은 모두 대수로 정의하고 있다(Melillo, 1999, p.13, 재인용). 한편 Straley는 대수와 실세계와의 관련성을 강조하면서 기호적 대상의 조작을 통한 탈문맥화와 재문맥화의 과정을 대수로 보았으며, 이러한 맥락에서 대수적 사고를 강조하고 있다[3].

현대 대수의 입장에서 대수를 보면 위에서 언급한 기호와 방정식 대신 구조를 강조하여 대수를 정의하게 된다. 이에 해당하는 대표적인 예로 MacLane & Birkhoff(1967)가 제시한 다음의 정의를 들 수 있다. 그들은 학교 대수와 대학 수준의 대수를 연결하려는 시도에서 대수를 수에 제한된 대수가 아닌 수학적 대상

3) 대수는 기호 모델을 구성하고 그리고 기호적 대상을 조작하는 것으로 볼 수 있다. 이 과정에서 기호적 대상들은 일시적으로 그 의미로부터 벗어날 수 있지만, 그러나 그 의미는 어느 시기가 되면 다시 살아나게 된다. 따라서 대수적 사고는 실세계와 대수적 명제 사이의 해석을 가능하게 함으로써 실세계를 바라보는 하나의 방법이다(Melillo, 1999, p.14, 재인용).

을 다루는 대수 곧, 수학의 구조를 다루는 대수를 강조하고 있다(Usiskin, 1988, p.7, 재인용).

> 대수는 수의 합과 곱, 거듭제곱을 조작하는 기술로부터 시작한다. 이러한 조작 규칙은 모든 수에 대해 유효하고, 다양한 종류의 수를 대표하는 문자에서도 역시 유효하게 작용한다. 그리고 그 규칙은 반드시 수가 아니라 하더라도, 어떤 대상이든 적용이 가능하다. 따라서 우리가 보았듯이, 대수 체계는 덧셈과 뺄셈 같은 연산이 어떤 기본 규칙을 만족할 때, 조작 가능한 원소들의 집합이다.

Mahoney(1980)는 대수의 역사를 바탕으로, 대수에 대한 현대적 관점에 근거하여 대수적 사고에는 연산적인 기호체계, 수학적 관계와 구조, 추상성과 관련된 내용이 포함되어야 한다고 제안한다(Charbonneau, 1996, p.15, 재인용). 특히 그는 이러한 사고 가운데 수학적 관계에서 파악되는 구조를 현대 대수의 핵심으로 보았으며, 이러한 그의 생각은 구조를 강조하는 현대 대수학의 경향에서부터 비롯된 것이다.

다음으로 대수에서 패턴과 관계, 그리고 분석을 강조한 정의를 Whitehead와 Charbonneau에게서 찾아보자. 먼저 Whitehead(1947)는 대수의 역사를 유한개의 패턴을 표현하기 위한 기술의 성장 과정으로 보고 있다. 그는 대수를 특수한 존재와 구별되는 패턴이 증가하면서 강조된 학문으로 보고 있다(Lee, 1996, p.103, 재인용).

Charbonneau(1996)는 대수를 수치적 영역의 단순한 확장이나 기호 체계의 문제로만 보는 것은 잘못된 관점이라고 주장한다. 흔히 학교에서는 처음 문자를 다루면서 문자를 수와 같은 것이라고 가르친다. 그리고 그것들은 실제로 수처럼 조작 가능하다. 수에 대한 이러한 강조는 수를 제외한 많은 수학적 대상이 그러한 대수 기호로 표현된다는 사실을 숨기고, 따라서 대수 기호 역시 다른 수학적 대상을 표현하고 조작하기 어렵게 된다. 기호 체계는 한편으로는 대수에서 중심적인 역할을 하지만 그것이 대수의 전부는 분명 아니다. 다시 말해 기호 체계가 의미 있는 대수 기호로서의 역할을 다하려면 단순한 기호 계산이 아닌 더 넓은 맥락에서 파악되어야 한다. 여기에서 그는 대수의 핵심을 관계와 분석 측면에서 찾고자 하였다(Charbonneau, 1996, p.35). 그에 따르면, 대수는 관계를 다루는 도구이다. 관계를 다룬다는 것은 대상과 과정을 동시에 볼 수 있다는 것을 의미하고, 이러한 연결을 통해 규칙과 함수 등의 대수 내용을 파악하는 것이다. 분석은 산술적인 과정과 대수를 분명하게 구분 짓는 것으로, 문제해결에서 조건을 통해 다양한 양을 미지의 것으로 나타내는 방법이다. 그는 이러한 관계와 분석을 통해 대수를 파악할 때 대수의 본질을 볼 수 있다고 강조하였다.

이처럼 대수는 대수를 바라보는 시각과 대수를 학습하는 수준에 따라 기호 조작과 방정식, 구조, 그리고 관계와 패턴 및 분석에 초점을 두면서 다양하게 정의될 수 있다. 대수 정의에 있어서 나타나는 이러한 다양성의 어려움을 극복하기 위해 Usiskin과 Kieran은 대수에서 어느 한 측면만을 강조하기 보다 이러한 다양한 측면을 묶어서 대수를 표현하려는 시도를 하였다. 먼저 Usiskin(1988)에 따르면 대수는 4가지 개념으로 구분되는데, 그 각각은 일반화된 산술로서의 대수, 문제해결 과정을 연구하는 대수, 양들 사이의 관계를 연구하는 대수, 구조를 연구하는 대수로 나누어진다. 이에 비해 Kieran(1989)은 대수의 3가지 주요한 관점을 소개하면서, 대수를 일반화된 산술, 표현 체계, 규칙들의 집합으로 나누어 제시하였다. Usiskin과 Kieran이 제시한 대수에 대한 이러한 종합적인 시각은 위에서 논의한 다양한 정의를 포괄적으로 고려하면서, 동시에 학교 대수에서 나

타나는 대수의 여러 측면을 강조하는데 도움이 될 것이다.

위에서 논의한 정의들을 토대로 대수에서 핵심이 되는 몇 가지 내용들을 정리하면 다음과 같다. 우선 대수는 양들 사이의 관계를 통해 대상들간의 구조를 파악할 수 있는 지식을 필요로 하며, 이것은 일반화로 연결되면서 이후 실생활에 대한 기호 모델을 구성하고 그에 따르는 다양한 지식 등으로 확장된다. 따라서 대수 학습을 위해서는 기호 체계, 구조, 추상화와 관련된 내용이 포함되어야 하며, 동시에 일반화, 동적 변화 등을 파악할 수 있는 능력과 문맥을 통해 기호 대상을 조작하는 능력이 함께 요구된다. 한편 대수를 언어적인 측면에서 본다면, 대수는 양들 사이의 일반적인 관계를 추론하면서, 관계를 나타내기 위해 양적 상황을 이해하고 표현하는 일련의 과정으로 정의할 수 있다. 따라서 대수를 자유롭게 사용하는 학생들은 양의 변화와 표현 안에서 그리고 표현 사이에서 서로 다른 대상들을 조정하고 탐구할 수 있으며, 또한 기호 체계 내에서 추측을 만들어내기도 하고 그 가설을 테스트할 수 있게 된다. 따라서 대수에서 강조되어야 할 내용은 단순한 기호 규칙의 습득과 방정식의 풀이가 아닌 일반화와 추상화의 과정이 문제 해결 및 모델링을 통해 드러날 수 있어야 한다. 이러한 대수의 핵심적인 내용들은 학교 대수 도입과 관련된 다양한 관점에서 보다 구체적으로 드러나게 된다.

III. 학교 대수 도입과 관련된 다양한 관점

앞에서 논의한 것처럼 여러 연구자들이 설명하는 대수의 정의에는 대수의 다양한 모습이 포함되어 있다. 이러한 다양한 모습은 학교 대수에서 다루어야 하는 많은 주제들과 연관되어 있으며, 또한 학생들이 대수에서 경험하는 어려움의 원인이 되기도 한다.

다음은 중등 수학에서 다루는 대수의 내용과 학생들이 경험하는 오개념을 통해 대수 도입 연구의 필요성을 살펴본 것이다. 중학교 1학년에서 시작되는 학교 대수는 문자의 도입과 등식의 성질에 대한 학습과 방정식의 풀이가 주된 내용으로 받아들여진다. 그리고 '변수'라는 용어는 1학년 함수 단원에서 간단하게 정의된다. 이 과정에서 주로 다루어지는 내용은 기호의 조작과 그 조작을 위한 규칙의 사용이며, 이러한 '대수 언어'의 연습이 집중적으로 다루어진다. 이는 곧 학교 대수에서 일차적으로 필요한 것을 관계를 표현하기 위한 대수 언어의 사용으로 보기 때문이다. 대수 언어는 관계를 기호적 표현을 이용해서 다양한 형태로 표현한다. 예를 들어, 대수 언어는 방정식을 만들어서 그 방정식을 통해 해를 구하는 과정과 문제 상황을 공식을 통해 일반화하고, 함수와 식을 조작하는 등 다양한 학습 과정에서 중요한 역할을 수행한다. 그러나 이러한 과정에서 학생들은 대수 언어를 이해하고 사용하는데 있어서 많은 어려움을 경험하게 된다. 대수 언어의 잘못된 수행과 조작은 기호적 표현과 의미 사이의 관계를 정확하게 파악하지 못하게 하며, 그 결과 학생들은 많은 오개념을 만들어낸다. 이러한 오개념은 학생들 자신이 만들어낸 맥락에서 사용하는 동시에 이미 학습한 모델에 근거해서 정당화하려 하기 때문에 쉽게 변하지 않는다. 그 결과 교사와 학생은 결국 다른 의미를 갖는 동일한 기호를 사용하게 되며, 이것은 많은 학생들이 중등 대수에서 기호와 관련해서 그 의미 대신 형식적인 규칙의 학습에 집중하게 되는 이유가 된다. 이러한 상황에서 대수

도입에 관한 논의는 대수와 관련된 많은 문제를 해결하기 위한 출발점이 될 수 있다. 다시 말해 대수 도입에서 다양한 관점을 논의하는 것은 대수 지도에서 발생하는 많은 어려움을 해결하기 위한 시도로 볼 수 있다.

대수 도입을 논의하기 위해서, 먼저 그 인식 규범에 따라 크게 두 가지 형태로 그 관점을 구분하여 살펴보자[4]. 수학사는 모든 수학이 일반화 또는 추상화와 관련되어 있음을 보여준다. 우리는 수학사에서 드러나는 일반화 또는 추상화의 모습을 하나의 인식 규범으로 받아들이려 한다. 그러나 여기서 문제가 되는 것은 이러한 인식 규범이 혼자서 작용할 수 없다는 데 있다. 즉, 일반화와 같은 인식 규범은 다른 인식 규범 예를 들면, 문제 해결 또는 모델링과 같은 표현 형식을 가져야 한다. 우리는 후자의 표현 형식을 'primary need for knowledge'로 정의할 수 있으며, 일반화 또는 추상화와 같은 인식 규범을 'driven-norm'으로 볼 수 있다. 이러한 인식 규범의 문제를 대수 도입과 관련된 다양한 관점에 적용해 보면, 우선 대수에 내재되어 있는 특성으로 일반화, 추상화, 구조를 생각해 볼 수 있고 그 각각은 대수에서 driven-norm 곧 대수 체계 내부에서부터 형성된 중요한 특징들로 볼 수 있다. 다른 한편으로는 대수 학습 과정에서 구체적으로 드러나는 외재적 표현 형식을 생각해볼 수 있는데, 이러한 표현 형식에는 문제 해결, 모델링, 함수가 중심이 된다. 이러한 두 측면 곧 내재적 특성과 표현 형식은 독립적으로 존재할 수 없으며 상보적인 결합을 필요로 한다. 그러나 다음에서는 먼저 각각의 관점에서 그 특징들을 살펴볼 것인데, 이러한 논의는 상보적인 대수 도입을 위해 전제되어야 하기 때문이다.

(1) 대수의 내재적 특성과 대수 도입: 일반화, 추상화, 구조

① 일반화

수학적 사고가 일어나려면, 조작적이고 특수한 것에서 벗어나서 일반적인 것으로 주의를 돌리는 것이 필수적이다. MacLane(1986)은 유추로부터 발생하는 다양한 형태의 일반화에 관심을 가졌다. 그에 따르면 '사상, 유추, 주의의 전환'에서 비롯된 추상화는 수학에서 본질을 추구하는 과정이며, 이러한 탈문맥화 과정은 유추와 관련해서 일반화의 여러 측면에서 나타난다고 주장하였다(Mason, 1996, p.81, 재인용).

이러한 일반화는 대수적 사고와도 밀접한 관련이 있다. 대수에서의 일반화와 관련해서, Mason(1996)이 제시한 대수의 네 가지 근원[5]은 주목할 만하다. 그는 일반화하는 능력은 표현에 대한 자신감이 발달하면서, 그리고 동일한 과정에 대한 다양한 식들을 파악하는 가운데 이루어지는 과정으로 보았다.

따라서 수학적 사고에서 이루어지는 일반화와 대수에서 진행되는 일반화 수준에 대한 고찰은 대수를 도입하는데 우선적으로 논의가 필요한 부분이다. 다시 말해 학교 수학에서 어떻게 일반화가 진행되는가에 대한 이해와 대수 영역에서 학생들이 일반화 능력을 개발하는 방법 사이에는 많은 관련성을 예상할 수 있으며,

---

4) 이 구분은 Radford가 제시한 두 가지 형태의 인식 규범에 따른 것으로, 그는 일반화와 문제해결을 각각 driven norm과 primary need for knowledge의 예로 들고 있다(Radford, 1996, p.108). 저자는 이러한 구분을 확장해서 대수의 내재적 특성과 외재적 표현 형식으로 나누어 대수 도입의 관점을 논의하였다.

5) 대수의 네 가지 주요한 근원으로 Mason이 들고 있는 것은 다음과 같다: 일반성을 표현하기, (변수에 대한 의식을 뒷받침하는) 가능성과 제한점, 재배열과 조직하기, 일반화된 산술(산술의 규칙을 표현하기 위해 수 대신 사용하는 전형적인 문자)(Mason, 1996, p.66).

이는 곧 대수의 도입에서 일반화를 중요하게 다루어야 함을 의미한다.

대수에서 일반화는 어떻게 나타나는가? 흔히 대수에서 일반화된 패턴은 공식으로 통한다. 공식은 어떤 한 가지 양과 다른 양들과의 관계를 나타낸다. 우리는 길이와 면적 공식을 사용한다. 그리고 세금, 할인율 등 경제 활동과 관련해서도 공식은 그 이면에 놓여있다. 물론 공식 없이도 이런 활동이 가능하나, 그럴 경우 공식을 사용할 때와 비교하면 시간과 노력에서 많은 차이가 나게 된다. 우리는 대수에서 일반화를 통해 특정한 형태의 문제를 공식화하는 경험을 하며, 한번에 그 답을 파악할 수 있게 된다. 학교 수학에서 이러한 공식을 통한 일반화는 많은 예들을 축적하고 패턴을 파악하기 위한 귀납적인 활동의 하나로 간주된다. 또한 대수는 패턴을 통해 드러나는 언어이다. 예를 들어 분수의 곱셈에 있어서, 그 곱은 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱한 결과라는 설명에 대해, 산술은 여러 예만을 제시할 뿐이지만, 대수의 경우 일반화된 단순한 언어로 표현된다. 이처럼 대수는 간단하게 표현될 뿐만 아니라, 그 표현은 산술과 유사하게 나타난다.

이제 대수 학습에서 나타나는 일반화의 수준에 대하여 살펴보자. "연속하는 홀수 개의 수들의 합에서 발견할 수 있는 패턴에는 무엇이 있는가?" 라는 문제가 주어지고 그 각각에 대한 풀이를 학생들의 일반화 수준에 따라 구분하면 다음과 같다(Driscoll, 1999, p.69).

수준1: 수준1의 학생은 35까지 모든 연속하는 세 수의 합은 3으로 나누어질 수 있음을 실제 계산을 통해 확인한다. 이 풀이에서 일반화는 불완전한 귀납의 논리를 통해 확보된다. 물론 이 발견의 논리에서 정당성을 확보한 것은 아니다. 다시 말해, 수준1의 학생은 35를 넘어가는 경우에 있어서 세 수의 합을 다시 확인함으로써 자신의 결론을 정당화할 뿐이다.

수준2: 수준2의 학생은 모든 연속하는 세 수의 합은 3으로 나누어진다는 결론을 내린다. 그리고 수에서 발견한 사실에 근거하여 다음과 같은 과정에서 확인하려 한다. 만약 세 수에서 가운데 수를 n이라고 하면 다른 두 수는 n-1, n+1이 될 것이다. 그리고 그 합 (n-1)+n+(n+1)은 3n이 된다. 이것은 3으로 나누어진다. 수준2의 학생은 일차적으로 하나의 특별한 경우에 있어서 일반화를 시도한다. 그러나 다른 경우 즉, 다른 연속하는 홀수 개인 5개, 7개의 수에 대해서는 이와 유사한 결론을 내린다 하더라도, 이러한 과정 모두를 다시 일반화하여 표현하는 것은 쉽지 않을 것이다.

수준3: 수준3에 있는 학생은 수준2에서의 과정을 뛰어넘어 한 단계 높은 일반화를 시도한다. 연속하는 m(m은 홀수)개의 수의 합이 N이라고 할 때, 학생은 N이 m으로 나누어지는가를 확인해보고자 한다. 이 과정에서 학생은 N을 연속하는 m개의 수로 나타냄으로써 문제가 해결된다는 사실을 알게 된다. N을 m으로 나누고, 그 결과를 k라고 가정하면 그 연속하는 m개의 수 ...k-1, k, k+1...을 구할 수 있게 되고, N=mk로 표현됨으로써 가정이 옳다는 사실을 확인하게 된다. 이 수준에 있는 학생은 수준2에서의 일차적인 일반화를 뛰어넘어 다시 그 일반화를 묶어서 표현하는 일반화 곧, 일반화의 집합을 일반화하는 단계에 있는 것이다.

수준1은 산술 단계에서 확보할 수 있는 일반화의 수준이다. 반면 대수에서 일반화 학습을 통해 도달해야 할 단계는 수준2와 수준3의 일반화이다. 대수 도입에서 수준1은 효과적으로 사용될 수 있을 것이다. 결국 수준2로의 이행은 수준1에서의 일반화를 바탕으로 한다. 학생들은 수준2를 통해 수준1에서 발견한 논리가 정당성을 확보한다는 사실을 확인할 수 있으며, 다시 수준3을 통해 수준2에서 발견한 논리가 보다 일반적인 범위로 확장된다는 사실을 확인하게 된다. 이처럼 일반화의 수준은 이전 단계와의 관련성을 통해 성장하고, 따라서 대수 도입 단계에서 강조되는 일반화는 산술과

관련된 내용을 어떻게 조직하는가에 달려있다.

한편 대수적 사고의 발달에서 이러한 일반화 수준의 상승은 쉽게 일어나지 않는다. 실제로 교사들은 대수 지도에서 다음과 같은 어려움을 경험한다(Driscoll, 1999, pp.92-93).

먼저 학생들은 지나치게 빨리 일반화하려 한다는 점이다. 이러한 현상은 특히 수준1에서 수준2로의 이행에 있어서, 수준2가 아닌 수준1에서 정당화하기 때문에 나타난다. Mason은 이러한 상황에 대하여, 학생들은 대수 문제에서 표를 만들고, 공식을 추측하고, 그 공식이 한두 가지 예에서 잘 들어맞는지를 확인하고, 그리고 다음 질문으로 넘어가 버린다고 설명한다(Mason, 1996, pp.75-78). 이러한 상황에서 교사에게 요구되는 것은 특정한 집합에 대하여 '항상' 참인 것이 무엇인지를 명확하게 학생들에게 제시하는 것이다. 이는 곧 학생들에게 그들이 제시한 공식이 옳은지를 확인하기 위해 그들의 수준에 맞는 반례를 제기하거나, 학생들이 발견한 패턴에 대하여 스스로 설명하도록 해봄으로써 문제점을 발견하게 하는 것이다.

다음으로 생각해 볼 수 있는 것은 일반화된 형태의 문제를 학습하고도 상황에 따라 그 결과를 다르게 해석하는 것이다. 이것은 수준2에서 수준3으로의 이행에서 나타난다. 예를 들어, "우체국에서 발행하는 우표가 3원과 6원 두 종류 밖에 없다고 가정해 보아라. 편지를 보낼 때 우편 요금의 가능한 조합은 어떻게 만들어지는가?" 몇몇 학생은 다양한 조합의 표를 만들 것이며, 그리고 그들이 만든 표를 보고 패턴을 결정할 것이다. 모든 경우에서 3의 배수가 나온다는 사실을 확인할 수 있다. 이것은 경험에 따른 결론으로, 3과 6의 관계를 통해 나온 것이 아니라 오직 표를 근거로 해서 나온 것이다. 비록 학생들이 분배법칙을 내면화시켜 받아들였다 하더라도, 이와 같은 문제에서 3과 6의 조합이 3의 배수라는 것을 파악하는 것은 쉽지 않을 것이다. 그러나 교사의 지도를 통해 학생들은 자신의 결론을 확인할 수 있을 것이다. 문제는 상황을 달리하는 경우 발생한다. 만약 이 문제에서 두 수를 5와 10으로 바꾼다면, 많은 학생들은 앞서 해결한 3과 6의 조합의 결론을 일반화시키는 대신 또 다른 표를 만들려고 할 것이다. 이처럼 앞서 해결한 문제를 유추를 통해 다른 문제와 연결하지 못하는 것은 일반화의 지도에서 지적되는 어려움 가운데 하나이다. 물론 학생들은 수학적으로 발달을 거듭하다 보면 어느 시점에서, 수에서 발견할 수 있는 기본적인 성질을 분석하는 대신 경험적 패턴에만 의존하는 것이 적절하지 못하다는 것을 알 수 있을 것이다. 대수의 지도는 바로 이러한 시점을 분석하면서 이루어져야 하며, 이러한 분석이 효과적으로 이루어질 때, 학생들은 일반화가 대수에서 중요한 역할을 한다는 사실을 깨닫게 될 것이다. 여기서 주의해야 할 부분은 학생들은 유추를 통한 일반화에서 잘못된 성질에 대해서도 쉽게 일반화하며, 비공식적인 과정을 통해서도 잘못된 일반화에 빠진다는 사실이다.

대수에서의 일반화는 수가 아닌 다른 수학적 대상으로 전이된다는 점에서 무엇보다 중요한 위치에 놓여 있으며(Driscoll, 1999), 동시에 일반화를 가장 효과적으로 학습할 수 있는 영역이다. 학교 대수에서 일반화를 강조할 경우, 대수는 수의 맥락에서 일반성을 표현하고 조작하기 위해서 기호를 사용하는 것으로 정의할 수 있을 것이다. 일반화와 관련해서 학교 대수에서 발생하는 많은 어려움은 대수의 내용들을 상황에 따라 다양하게 일반화시키기 보다 오히려 지나치게 쉽게 학생들을 일반성에 노출시키기 때문에 발생한다. 따라서 적절한 일반화의 수준과 일반화에서 일어나는 다양한 형태의 장애는

대수 도입에서부터 중요하게 다루어져야 한다.

② 추상화[6)]

수학은 추상적인 지식체계다. 수학에서의 추상화는 초등 수준의 학교 수학에서, 예를 들어 자연수, 도형 등에서부터 시작해서 다음 단계에서 이전 단계를 다시 추상화해내는 과정을 통해 진행된다. 이러한 추상화의 과정은 대수에서 하나의 정점을 이루게 된다. 왜냐하면 대수는 문자를 비롯해서 수학의 가장 기본적인 자료들을 추상화하고 위계를 구성하는 데 개념적 도구를 제공하기 때문이다. 추상화와 관련해서 Battista에 의해 제시된 추상화의 수준을 대수의 도입 과정에 적용해 보면 다음과 같다 (Melillo, 1999, pp.7-8, 재인용).

Piaget의 반영적 추상화 개념과 내면화(interiorization)에 근거하여, Battista는 학생들이 의미를 구성하고 수학을 이해하는 추상화 수준을 구분하였다. 그에 따르면 추상화의 수준은 지각적 국면(perceptual space), 내면화 국면(internalized space), 조작적 내면화 국면(interiorized space)[7)], 그리고 조작적 내면화 국면의 2수준(second level of interiorized space)으로 구분된다.

지각적 국면은 시작하는 수준이다. 지각적 국면에서 학생들은 하기 위해서 본다. 이 단계에서 대수는 아직 과정에 머물러있다. 그리고 물리적 대상이 보이는 것만큼 지식은 제한된다. 예를 들어, 대수에서 절차가 주어져 있다면, 학생들은 그 절차에 수를 대입할 수 있고 그리고 일련의 행동을 할 수 있으나, 이 단계에서 그들이 할 수 있는 전부는 이러한 행동에 제한된다.

내면화 국면은 두 번째 수준이다. 이 국면은 지각적 국면과 달리 지각적 대상을 요구하지 않는다. 내면화 국면은 지각적 국면을 표현한 결과이다. 내면화 국면에서 학생은 지각적 국면을 추상화하면서 만들어낸 정신적 모델을 이용해서 조작할 수 있게 된다. 즉, 이 단계에 이르면 앞서 과정에 머물러 있었던 대수는 하나의 대상으로 인식된다. 대수를 한다는 것이 산술과는 다른 측면이 있다는 것을 깨닫게 되면서 그 차이점과 유사점을 구분하게 된다.

조작적 내면화 국면은 세 번째 수준으로, Piaget가 말하는 반영적 추상화의 결과로 이루어진다. 이것은 전단계인 내면화의 재표현을 통해 만들어진다. 다시 말해 조작적 내면화 국면은 내면화 단계를 추상화하여 입력하고 조작함으로써 이루어진다. 이 수준의 학생들은 앞서 기억한 내용을 통해 절차를 수행할 뿐만 아니라, 보다 일반적인 방법으로 그것들을 해석하고 적용할 수도 있다. 이 수준의 학생들은 대수에서 앞서 인식한 대상을 반영적 추상화를 통해 내적으로 조작하게 되고, 이 과정에서 대수에 대한 이해의 범위는 점점 넓어지게 된다.

4수준인, 조작적 내면화 국면의 2수준은 그 내용으로 전단계의 추상화를 이용한다. 이 수준에서, 학생들이 구성하는 반영적 추상화는

---

6) 추상화는 일반화와는 기본적으로 다른 심리적 과정을 따른다. 추상은 모든 요소로부터 이들 요소가 가지고 있는 공통적인 성질에 착안하여 이루어지는 것이지만, 일반화는 어떤 추상적인 유(class)를 보다 넓은 유로 확장하는 것과 관련된다(김남희, 1997, p.446). Driscoll은 이러한 일반화의 유형을 globalizing, extending 두 가지 형태로 구분하기도 한다(Driscoll, 1999, p.94).

7) 심리학에서 사용하는 '내면화'라는 용어는 'internalization'의 번역으로 보통 간주된다. 그러나 Piaget가 사용하는 '내면화'라는 용어는 'interiorization(佛:intériorisation)' 이다. 이는 자극-반응의 체계와 같이 객체의 일방적인 주입에 의한 조건화가 아니라, 인식 주체가 스스로 행동의 조정을 통하여 조작을 구성한다는 것을 강조하는 뜻으로 해석할 수 있다(홍진곤, 1999, p.88). 따라서 이 글에서는 2수준의 '내면화(internalization)'와 그 의미를 구분하기 위해 3수준을 '조작적 내면화(interiorization)'로 번역하여 사용하였다.

앞서 구성한 조작을 내적으로 자유롭게 조작 가능하게 하며, 이러한 내적 조작과 함께 구조에 대한 이해까지 가능하게 된다. 예를 들어, 학생이 이 수준에 도달할 때쯤이면, 그는 연속적인 절차에서 수행되는 행동을 이미 추상화하기도 하며, 그리고 새로운 상황에서 그 자신이 이해한 조작을 적용시킬 수 있을 만큼 추상화가 이루어진다. 이 수준에서 학생들은 이러한 대수의 추상화를 통해 한 걸음 더 나아가 기호 연산의 구조를 파악하게 되고, 실제적인 과정 없이도 구조를 통해 사고하거나 조작할 수 있게 된다[8].

산술에서 대수로의 이행, 곧 대수의 도입과 관련해서 일어나는 추상화는 첫 번째 단계인 지각적 국면에서 내면화 국면으로의 이행과 관련이 깊다. 이것은 산술의 절차적 사고 수준에서부터 대수를 하나의 대상으로 파악하는 사고 수준으로의 이행이다. 따라서 이러한 이행은 절차적 사고에서 진행되는 추상화라고 할 수 있으며, Battista는 이 과정을 보다 세분화하여 아래와 같이 세 수준으로 제시한다(Melillo, 1999, pp.8-10, 재인용). 이 수준들은 각각의 추상화가 그 이전의 추상화 수준에 근거하고 있다는 점에서 앞서 논의한 추상화의 4단계처럼 단계적으로 제시된다. 이 수준들은 모두 절차에 대한 사고를 포함한다. 그러나 세 번째 수준은 학생들이 절차적 사고로부터 대수적 사고로의 이행을 시작한다는 점에서 대수에서의 추상화가 본격적으로 이루어지는 단계로 볼 수 있다.

1수준에서 학생들은 산술적 절차를 단계적으로 수행한다. 이 수준에서 그들은 오직 특정한 수를 통해 일련의 연산을 수행한다. 예를 들어, 학생들에게 4개의 수를 주고 평균을 계산하라고 하면, 학생들은 평균을 계산하는 규칙에 따라 더하고 4로 나눌 것이다. 1수준에서, 학생들은 절차에서 나타나는 일련의 행동만을 추상해 낼 뿐이다. 이 추상화는 경험적 추상화이다. 왜냐하면 이 수준에서의 추상화는 학생들의 경험을 통해 표현되는 소재를 필요로 하기 때문이다. 이 수준은 앞서 논의한 지각적 국면의 처음 단계라고 할 수 있으며 과정을 통해 수학을 하고 있는 것이다.

2수준에서 학생들은 절차에서 표현된 일련의 단계를 실제 행동에 의존하지 않고 절차상의 수행을 재표현하고 그 결과를 기술할 수 있을 만큼 대수를 추상화하여 받아들이게 된다. 예를 들어, 학생들은 주어진 수 집합에서 평균을 발견하는 과정을 자신의 언어로 설명할 수 있게 된다. 그들은 이제 절차를 많은 경우에 적용 가능하게 되고 그리고 주어진 수 집합을 특정한 경우로 제한하지 않게 된다. 이 수준은 지각적 국면과 내면화 국면의 중간 단계에 해당한다고 할 수 있다.

3수준에서 학생들의 관심은 절차를 구성했던 단위 행동으로부터 부분 부분의 결과를, 마치 그것들이 그 자체가 대상이라도 되듯이 그렇게 해석하고 검토하게 된다. 이 수준에서 추상화는 절차를 그 자체로 보면서 의미가 있는 부분으로 분해하고 그리고 대상으로 조작할 수 있게 한다. 이전에 수행한 절차의 부분을 개념적으로 분해하기도 하고 재결합시키기도 하는 능력(절차를 대상으로 파악하는 능력)은 학생들로 하여금 절차에 의존하지 않고 문제를 해결할 수 있게 한다. 예를 들어, 6개의 데이터와 그 합을 동시에 주면서 평균을 구하라고 하면, 3수준의 학생들은 6개의 데이터를 더하는 절차를 뛰어넘어 주어진 합을 통해 앞서 구했던 것

8) 이러한 추상화의 수준을 대수와 관련해서 해석하면, 각 수준에서 과정, 대상, 조작, 구조라는 용어가 핵심적인 역할을 수행하고 있음을 알 수 있다.

처럼 평균을 구할 것이다. 이러한 반영적 추상화는 학생들에게 의식적인 사고 조작을 요구한다. 3수준의 학생들은 내면화 국면에 도달했다고 볼 수 있으며, 이 수준을 통해 학생들은 산술적 사고가 아닌 본격적인 대수적 사고를 시작한다고 할 수 있다.

이와 같은 분석은 절차적 사고에서 이루어지는 추상화 수준에 초점을 두면서, 전단계에서 수행했던 사고를 다음 단계의 추상화와 연결하여 파악했다는 점에서 의미 있는 연구로 볼 수 있다(Melillo, 1999, p.10). 요약하면 학생들은 첫 번째 추상화에서 행동을 이용하고, 그리고 두 번째 추상화에서 행동을 반성하고, 그리고 세 번째 추상화로 나아가는 과정을 반복한다. 이 세 번째 수준의 추상화는 학생들이 일반적인 용어와 기호 규칙을 사용해서 그러한 절차에 대한 모델을 분명히 하고, 분해하고, 만들어 나가는 것을 가능하게 한다. 이러한 추상화의 단계를 통해 학생들은 대수를 받아들이게 되고, 모델링을 위한 도구로 대수를 이용하게 되고, 그리고 점차 대수를 조작하면서 대수의 구조로 나아가게 된다. 따라서 대수 도입에서 이러한 추상화의 수준이 어떻게 진행되는지, 그리고 그 수준에 따라 학교 수학에서 대수를 도입하는 수업 모형은 어떤 형태가 있는지에 대한 연구는 대수에서 발생하는 많은 어려움을 분석하고, 그 대안을 제시하는 연구를 위해 중요하게 다루어져야 할 것이다.

③ 구조

많은 대수 연구자들(Kieran, 1992; Sfard, 1991, 1995)은 대수 도입과 관련된 연구에서 절차적(procedural) 사고(또는 조작적 사고)와 구조적(structural) 사고를 구분한다. 이러한 구분을 통해 그들은 대수의 특징으로 대수에 내재된 '구조'를 제시하고 있다. 무엇보다 이러한 구조를 통해 수학을 연구하는 것은 현대 수학을 대표하는 특징 가운데 하나로, 구조를 강조하면서 대수에 접근하는 관점은 대수 도입의 중요한 한 측면이 된다. Kieran의 경우, 대수의 도입에 관한 연구에서 산술과 대수를 비교하여 절차적 사고와 구조적 사고를 다음과 같이 정의한다(Kieran, 1992, p.392).

> 절차적 사고는 수를 가지고 이루어지는 산술적 연산으로 그 결과가 역시 수와 관련된 것이며... 반면, 구조적 사고는 수가 아닌 대수식을 조작하는 연산과 관련된다.

그녀는 절차적 사고를 동적 사고로서 산술에서 수의 덧셈과 같은 연산을 통해 새로운 수를 만들어내는 과정으로 파악했다. 이러한 절차적 사고는 대수의 도입에서 자연스럽게 등장한다. 그러나 이러한 도입 방식은 비록 절차적 사고로부터 구조적 사고로의 도약이 일어나기 위해서는 절차적 사고가 기본이 되어야 하지만, 한편 대수를 학습하는 과정 전반에서 학생들이 대수식을 대상으로 인식하는 것이 아니라 수에서처럼 절차로만 해석하는 사고를 하게 된다는 문제를 발생시킨다.

이러한 문제의 예로, 산술을 경험한 학생들은 수치적 답을 찾거나 원하는 문제에서 항상 '대답 모드'에 놓여 있는 경우를 들 수 있다. 이는 곧 산술이 절차적으로 가르쳐지고 있다는 것을 의미한다. 산술의 경우 알고리즘이 주어지고, 단계 단계를 따라가면 답이 얻어진다. 따라서 산술에서 수관계에 대한 이해는 수업에서 관심의 대상이 되지 못한다. 이런 상태에서 학생들은 대수를 시작하게 되는데, 산술에 비해 대수에서의 초기 경험은 학생들에게 수치적 답이 아닌 대상들간의 관계를 통한 이해를 본격적으로 요구한다. 이것은 대수 도입에서 나타나는 어려움 가운데 하나이다. 학생들이 '답'을

구하는 절차를 위해 2x+5와 같은 대수식을 방정식으로 해결하려는 시도를 하는데, 이는 대수의 도입과 관련된 여러 연구에서 자주 인용되는 사례이다. 이러한 경우 구조적 사고는 2x+5와 같은 식을 과정으로서 뿐만 아니라 대수적 대상으로 다루고 볼 수 있게 해준다. 구조적 사고는 대수식 조작과 방정식 연산(절차적 사고)을 동시에 파악할 수 있게 한다. 다시 말해 구조적 사고는 대상의 조작을 포함하고 있지만, 그러나 이러한 것들은 산술에서의 조작과는 또 다른 측면을 가지고 있다. Kieran은 이러한 대수에서의 절차적 사고와 구조적 사고의 차이를 다음과 같이 설명한다(Kieran, 1992, p.392).

> 대수에서 절차적 사고는 산술 연산과 관련해서 수를 다루면서 수를 그 결과로 얻는 것이다. 예를 들어, 3x+y와 같은 대수식에서, x, y대신 4, 5를 각각 대입하면, 그 결과는 17이다. 또 다른 예는 2x+5=11에서 정답이 발견될 때까지 계속 다양한 값들을 대입해서 문제를 해결하는 것이다. 이것들은 외면상 대수의 예 같지만, 여기서 다루고 있는 대상은 대수식이 아니라 수치일 뿐이다. 게다가, 이러한 수들을 통해 이루어지는 연산은 계산에 치우쳐있다-그것들은 수치적 결과를 보여줄 뿐이다. 따라서, 이러한 예들은 대수에서의 절차적인 면을 설명하는 것이다. 반면 구조적 사고라는 용어와 관련해서, 그것은 수에서가 아니라 대수식에서 실행되는 다양한 연산을 뜻한다. 예를 들어, 3x+y+8x와 같은 대수식이 있다면, 이것은 11x+y로 간단하게 될 수 있고, 만약 z로 나누어야 한다면 (11x+y)/z로 쓸 수 있다. 5x+5=2x-4와 같은 방정식은 양변에서 2x를 뺌으로써 5x-5-2x=2x-2x-4를 만들고, 계속해서 3x+5=-4와 같이 간단하게 만들 수 있다. 이 두 예에서 다루고 있는 대상은 대수식이며, 앞서 보았던 것처럼 수치 사례가 아니다. 실행되는 연산 역시 계산적이지 않다. 게다가 그 결과는 여전히 대수식이다.

이처럼 두 가지 형태의 사고는 산술과 대수에 의해 명확하게 구분되기 보다, 오히려 산술에서, 대수에서 그리고 그 이행기에서 동시에 나타난다. 따라서 학습하는 입장에서 그러한 특성을 동시에 파악해야 하며, 그리고 이러한 이행은 앞서 논의한 계속적인 추상화의 과정을 필요로 하기 때문에 절차적 사고로부터 구조적 사고로의 이행은 결코 쉽지 않다. 그럼에도 불구하고 산술에서 대수로의 이행에서 즉, 대수의 도입에서 궁극적으로 요구되는 것은 구조적 개념의 획득이다. 이러한 결론은 구조와 관련해서 Kieran의 연구뿐 아니라 다른 연구에서도 나타난다(Sfard, 1991; Battista, 1999).

Sfard는 Kieran의 의견에 동의하면서 조작적 사고로부터 구조적 사고로의 이행을 조작적 개념과 구조적 개념으로 대비시키면서 다음과 같이 설명한다(Sfard, 1991, p.4-5).

> 조작적 개념과 구조적 개념 사이에는 깊은 존재론적 간격이 있다...수학 자체를 대상으로 보는 것은 그것을 마치 실재인 것처럼 곧, 어떤 장소와 어떤 시간에서도 존재하는 정적 구조로 다룰 수 있는 능력이 있다는 것을 의미한다. 그것은 또한 '한눈에' 아이디어를 인지할 수 있다는 것을 의미하고 그리고 자세하게 하지 않아도 전체로서 조작할 수 있음을 의미한다...이에 비해, 과정으로서 개념을 해석하는 것은 그것을 실제로 보는 것이 아니라, 연속되는 행동에서 요구에 의해 존재하는, 그리하여 잠재적으로 존재하는 무언가로 보는 것을 의미한다. 따라서, 구조적 개념이 정적이고, 그리고 통합적이라면, 조작적 개념은 동적이고, 연속적이며, 세부적이라고 할 수 있다.

구조적 개념과 조작적 개념 사이의 이러한 차이는 산술과 대수를 비교해 볼 때, 상대적으로 어떤 개념이 강조되고 있는가와 관련된다. 따라서 대수는 동적이며 연속적이고 세부적인

사고에서부터 동일한 과정을 또는 새로운 대상을 정적이며 통합적으로 파악하는 사고로 진행하는 가운데 도입되어야 한다.

한편 Battista는 Kieran과 비슷한 입장에서 대수의 도입 필요성을 구조의 의미와 관련하여 설명한다(Melillo, 1999, pp.18-19). 그는 산술에서 대수로 이어지는 수업에서 추상화와 관련된 개념군의 사용을 제안한다. 그에 따르면, 학생들은 산술 절차를 구성하고 사용하고, 그리고 표현하는 과제들을 통해 대수를 시작한다. 학생들은 이와 같은 절차를 이용해서 과제를 완수하고, 절차를 표현하고, 그리고 절차를 구조화하는 수업을 받게 된다. 따라서 대수에서 진행되는 발달 과정은 산술에서의 절차적 연산을 자신의 언어로 기술하면서 대수의 구조를 파악하는 것으로 볼 수 있다. 이러한 구조의 파악은 앞서 논의했듯이 자신이 수행한 절차와 조작을 일반화 또는 추상화하는 점진적인 변화를 통해 이루어진다. 이것은 대수의 도입에 있어서 구조와 일반화, 추상화는 서로 상보적인 관계에 놓여 있음을 의미한다.

(2) 대수의 표현 형식과 대수 도입: 문제해결, 모델링, 함수

다음은 대수를 지도하는 어느 교사의 말이다(Lee, 1996, p.89).

> 대수 교사로서 나는 점차 내가 대수를 배웠던 방식이 완전히 잘못된 것이라는 사실을 알게 되었다. 그것은 확실히 이해를 강조하지도 않았으며 실생활과 관련된 어떤 연결도 없는 낡은 '훈련과 연습'의 수업이었다. 나는 '학생은 대수가 무엇을 위한 것인지 알고 싶어한다'는 얘기를 듣게 되었다. 그리고 고등학교 대수 이후 수년간 들어보지 못했던 '문제해결이 대수에서 중요하다', '함수는 대수의 근원적인 대상이며, 따라서 대수는 모두 그것과 관련된 것이다'라는 얘기를 듣게 되었다.

이 말은 앞에서 논의한 대수의 내재적인 특성과 함께 학교 대수가 어떤 형식을 통해 도입되고 있는지를 보여준다. 대수의 특성에는 일반화와 추상화, 그리고 구조 등이 포함된다. 이러한 특성은 교실에서 일반화를 드러내기 위해 모델링을 통하거나, 문장제와 같은 문제해결에서 방정식을 통해 대수 수업에 도입된다. 그리고 대상의 동적 변화는 주로 함수를 통해 그 추상화를 설명함으로써 대수 영역에 포함된다. 대수의 도입은 이처럼 문제해결과 모델링, 함수 등의 학습을 통해 일반화와 추상화, 구조 등의 대수의 특성을 드러내는 가운데 이루어진다.

① 문제해결

역사는 대수의 도입에 있어서 무엇보다 문제해결 접근법을 우선적으로 제시한다. 만약 역사적 관점에서 대수 교육을 논의한다면 대수의 도입은 문제해결 접근법에서 시작되어야 하며, 따라서 문장제와 방정식은 대수 학습의 중심이 되어야 한다. 문제해결에는 협의의 문제해결과 광의의 문제해결 두 가지 측면이 있다(Bell(2), 1996, p.167). 협의의 문제해결은 학교 수학에서 흔히 받아들여지는 입장으로서, 방정식을 만들고 푸는 과정을 통해 문제를 해결하는 것을 말하며, 광의의 문제해결은 하나 이상의 답을 구하고 좀더 일반적인 해법을 찾기 위하여 문제를 확장하거나 분해하는 것과 같이 열린 방식으로 문제를 탐구하는 것을 뜻한다. 대수에서 문제 해결을 통한 접근은 출발은 협의의 의미에서 이루어지지만, 결국에는 광의의 의미로 받아들여야 한다. 대수는 여러 수치뿐만 아니라 다양한 수학적 대상을 다루면서 문제를 해결하는 언어로 정의되기 때문이다.

문제해결을 강조한 대수 도입에서 다음과 같

은 문제를 생각해보자. 이 문제에서 요구하는 대수의 내재적 특성은 일반화와 관련된 것이다. 대수에서 배우는 모든 공식이 학교 수학에서 다루는 것처럼 복잡한 것은 아니다. 다음 문제에서 자동차의 연비를 계산해 보고 이를 일반적인 경우에 적용하려면 어떤 공식을 만들어야 하는가를 대수 도입과 함께 논의해보자 (Usiskin, 1995, p.24).

> 연료 탱크가 비어있는 상태에서 40.3 리터의 가솔린을 주입할 때 자동차의 주행거리는 25,000 km 상태였다. 그리고 다음 번 연료 탱크가 비어서 다시 가솔린을 주입할 때 주행거리는 25,450 km 였다. 이러한 경우 자동차의 연비는 얼마인가?

이러한 문제의 경우 산술적인 계산에 의해 그 답이 약 11km가 됨을 알 수 있다. 이 문제에서 그 값들을 다양하게 변화시키면서 학생들로 하여금 각각의 문제를 해결하게 한다. 이 과정에서 학생들은 대수의 도입 필요성을 인식하게 되고, 일반적으로 자동차의 연비를 계산할 수 있는 공식은 어떻게 만들 수 있는가에 대해 생각하게 된다. 대수에서 문제는 다음과 같이 주어진다. 주행거리가 a km 상태일 때, g 리터의 가솔린을 주입하고 다음 번 가솔린을 주입할 때 주행거리가 b km 상태였다면 자동차의 연비 공식은 (b-a)/g km로 나타낼 수 있을 것이다. 학생들은 이 공식을 앞서 계산해온 값들을 대입하여 확인할 수 있을 것이며, 이러한 표현 양식의 장점을 확신하게 된다.

대수의 역사에서 보는 것처럼, 그리고 위의 문제에서처럼 문제해결은 대수가 만들어지는 과정이다. 따라서 문제해결을 통한 대수의 도입 과정은 자연스럽게 학생들에게 다가갈 수 있을 것이다. 이와 함께 고려되어야 할 것은 대수에서의 문제해결은 산술과 다른 일반화 등의 특성을 가지고 있으며, 이러한 내용을 학생들에게 심어주는 학습 과정의 개발은 대수 도입에서 필요한 부분이다.

② 모델링

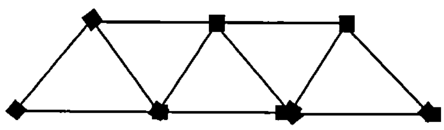
모델링에서 다루는 내용은 패턴과 관련된 것으로 특히 앞서 논의한 일반화는 모델링을 통해 그 적용 범위가 넓어질 수 있다. 모델링은 문제해결에서 요구하는 실제와의 관련성을 중요하게 다루며, 특히 현실의 다양한 문제를 모델링하는 과정은 대수에서 중요하게 다루어져야 한다.

모델링은 가정에 기초하여 모델을 창조하거나 고안하는 과정과 그리고 타당화 단계에서 모델을 조사하는 과정으로 구분된다(Janvier, 1996, pp.227-228). 따라서 대수의 모델은 두 가지 상태에서 살펴볼 수 있다. 우선 모델은 구체적인 대상이나 관계를 표현한다. 주어진 상황에서 의미가 없었던 모델의 요소에 문맥에 맞는 의미를 부여함으로써, 모델을 구체화시켜 해석한다. 다른 한편으로, 모델은 대수적 기호의 형태로서 그 모델을 출현시킨 실제와는 무관하다. 기호 조작을 포함하여 규칙을 맹목적으로 적용하는 것은, 결국 모델들 사이에 수학적 관계를 제공하면서 이러한 추상적인 상태를 공고히 한다. 따라서, 모델은 구체적이고 추상적인 두 가지 상태를 동시에 보여준다.

특히 학교 대수와 관련해서 모델링은 구체적인 상태의 모델을 어떻게 공식화시켜서 받아들이는가를 중요하게 다룬다. 모델링 과정에서 기본적인 공식이 일반화 가능한 모델이 되기 위해서는 공식화 단계가 중요한 역할을 한다. 모델링은 학교 대수 학습에서 잘 드러나지 않는다. 모델링 과정 전체를 수행하는 것, 즉 특징을 뽑아낸 것에 기초해서 모델을 만들고 그 모델을 검사하는 것은 확실히 특별한 일이다.

여기서 눈여겨보아야 할 부분은 학생들이 대수에서 하는 몇 가지 활동이 사실상 모델링에서의 공식화 단계를 어느 정도 포함하고 있다는 것이다.

예를 들어 다음과 같은 모양의 삼각형을 만드는데 필요한 성냥개비의 수를 구하는 문제에서 다음 두 가지 형태의 풀이는 서로 다른 카테고리에 속한다[9].



풀이1: 여러 예를 들고, 표를 만들고, 개수를 조사하고, 필요한 성냥개비의 수가 구하는 삼각형의 수 곱하기 2 더하기 1이라고 추측한다

풀이2: 수표나 다른 것을 사용해서, 주어진 모양에 삼각형을 하나 더하는 것은 성냥개비를 두 개 더 필요로 한다는 사실을 명확하게 하고 이를 진술한다.

풀이1의 경우, 구한 대수식은 모델이라고 하기 어려운 반면, 풀이2의 경우 문제에서 요구하는 기본적인 관계를 뽑아내었고, 이 기본적인 관계를 공식화하여 기호로 나타내었다. 풀이2는 이와 유사한 패턴을 특징짓는 관계를 잠정적으로 담고 있다. 따라서 이처럼 공식화 단계에서 모델과의 관련성을 인식하기 위해서는, 상황으로부터 대수식이 만들어지는 과정에서 변수 사이의 관계를 결정짓는 특성들이 포함되어야 한다. 이러한 작업이 이루어진 다음, 이와 비슷한 문제를 만나게 되면, 앞서 공식화했던 모델에서 이러한 종류의 문제가 일정한 관계에 속한다는 것을 명확하게 알게 된다. 일련의 관계는 정확하게 하나의 모델로 여겨질 수 있다. 실제로 다양한 접근에서 모델링 연습을 하는 것은 이후 학생들이 대수에서 기호 사용과 함께 모델을 사용하고 학습하는 것을 도울 수 있으며, 이와 함께 기호 사용의 범위를 넓힘으로써 모델을 일반화하여 기존의 다양한 모델 중에서 문제 상황에 적합한 모델을 선택할 수 있게 한다. 따라서 대수에서의 이러한 모델링 지도는 앞에서 논의한 일반화와 문제해결을 통한 대수 도입과 상보적인 관계에 놓여 있음을 알 수 있다.

③ 함수

함수를 통해 대수를 도입하는 관점은 양들 사이의 관계를 나타내는 언어로 대수를 보는 것이다. 나이가 들어감에 따라, 혹은 몸무게가 변함에 따라 건강 상태의 변화를 알고 싶다면 어떻게 해야 할까? 생활에서 지출 패턴을 변화시킨다고 할 때, 그에 따른 예산의 변화는 어떻게 알 수 있을까? 이러한 종류의 질문에서, 하나의 양은 다른 것들과 관련되어 있으며, 이것은 함수의 기본이 된다. 일반적으로 대수를 알지 못한 상태에서 함수는 표의 형태로 또는 그래프로 표현된다. 그러나 대수식은 가장 단순하면서 동시에 사용하기 편리한 장점을 가지고 있다. 게다가 그것은 다른 표현들이 담지 못하는 정보들을 담고 있다. 함수는 어떤 양이 변할 때 어떤 변화가 일어나는지를 알고 싶을 때 사용하게 된다. 대수적 사고에서의 핵심은 변수 개념이 가지는 모든 내포, 변수 개념의 사용, 변수 사이의 연결성 등을 함께 다루면서 전개된다. 따라서 대수를 지도하기 위해서 어떤 교수법을 택하든지 그 중심 내용에는 변수와 함수의 기본적인 아이디어들이 포함되어야 한다. 특히 함수 지도에서 초점이 되는 수학적

9) 다음 문제는 Janvier(1996, p.229)가 "Modeling and the Initiation into Algebra"에서 제시한 문제를 변형하여 제시하였다.

아이디어는 실생활 상황에서 다루어지는 양적인 관계를 함수를 통해 설명함으로써, 모델링과 더불어 대수의 도입 단계에서 동적인 대수의 개념을 다루는 것이다.

대수의 기하적 표현 즉, 그래프와 함수를 통해 접하게 되는 동적인 표현에 대해 Sfard & Linchevski는 "Descartes와 Fermat는 그래프 표현으로 나타내기 위해 변수에 대한 아이디어를 기하로 가져 왔으며, 이 아이디어는 Galileo, Newton, Leibniz 등에 의해 자연스러운 현상을 표현하기 위해서 과학에 적용되었으며, 결국 대수는 일정량에 대한 학문으로부터 변화하는 양에 대한 학문으로 변하였다"고 말한다(Sfard & Linchevski, 1994, p.200). 이는 대수의 도입 단계에서 동적인 현상을 설명하기 위해 함수적 접근이 하나의 대안이 될 수 있음을 보여주는 것이다. 함수적 접근에 대한 일련의 연구[10](C. Kieran & A. Boileau, M. Garancon, 1996)는 문자(함수에서 다루는 변수)를 변수로 다루면서 대수를 시작하여 단일한 값을 갖는 문자 상황으로 진행하는 것이, 단일한 값을 갖는 문자(미지수)로 시작하여 여러 값을 갖는 문자로 진행하는 가운데 발생하는 인지적 장애를 극복할 수 있음을 보여 준다.

그러나 대다수 대수 교육과정은 동적인 해석을 요구하는 변수로서의 문자 개념에 앞서 미지수로서의 문자를 도입하고 있다. 이것은 학생들이 변수로서의 문자를 개념화하는 과정에서 겪는 어려움을 가정하고 있다. 특히 Harper(1987)는 "학생들이 수학적으로 성숙하고 수학적 경험이 증가함에 따라 문자를 미지수로 사용하는 수사적 접근 방법으로부터 주어진 값을 여러 가지로 나타내는 방향으로 진행한다"고 말하면서 전통적인 도입 방식을 지지한다. 또한 Booth(1984) 등의 몇몇 연구자들은 "대수에서 변수 개념화의 수준은 고차원적인 인지구조의 발달과 관련된다"는 결론을 통해 함수적 접근을 반대하였다(Kieran 외 2인, 1996, p.274, 재인용). 그러나 이러한 미지수에서 변수로의 계열을 따르는 전통적인 대수 교육의 효과를 정확하게 평가한 결과가 없으며, 이러한 맥락에서 앞서 논의한 Kieran 등의 연구처럼 대수의 도입 단계에서 함수적 접근을 취하는 것은 하나의 대안으로 연구가 필요한 부분이다.

IV. 결론 및 연구과제

이 글은 대수 도입에 있어서 다양한 관점을 조사하기 위해 대수의 정의에서부터 시작하여, 대수 도입과 관련된 다양한 관점에 대하여 살펴보고 있다. 대수 도입에 있어서 앞서 논의한 6가지의 관점은 상보적으로 결합되어 있다. 학교 수학에서 대수의 학습은 보통 변수, 대수식, 방정식의 순서로 제시된다. 그러나 이 과정에서 실제로 다루는 내용은 변수, 대수식, 방정식의 공식이나 규칙에 제한되지 않는다. 예를 들어, 방정식의 풀이에서 다양한 도입 방식을 살펴보자. 우선 대수 수업에서 방정식을 작성하고 푸는 것에 초점을 맞춘 문제를 제시한다면 이는 문제해결을 강조한 것이며, 방정식 학습을 통해 일반화와 탐구의 기회를 제공한다는 측면에서 보면 대수의 일반화가 강조된다고 할 수 있다. 또한 문제에 미지의 것이 여러 개 있을 때에는 함수적인 접근을 통해 방정식을 해결할 수도 있을 것이다. 따라서 대수에서 방정

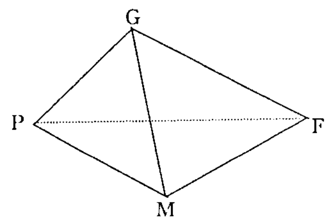
10) 1987년부터 1993년까지 이어진 여섯 가지 연구 주제(연구1: 추측-확인에 의한 수치적 문제해결 방법/ 연구2: 함수적 알고리즘 표현 만들기/ 연구3: 표준적인 대수 표현으로의 이행/ 연구4: 문제해결에서 좌표 그래프의 활용/ 연구5: 그래프 만들기, 해석하기, 수정하기/ 연구6: 과정-지향적인 개념화의 구조적 확장)는 C. Kieran & A. Boileau, M. Garancon(1996)에서 자세하게 다루고 있다.

식의 풀이는 이처럼 다양한 접근이 있을 수 있으며, 이것은 방정식을 알고리즘에 따라 해결하는 것과는 분명한 차이가 있다. 다시 말해, 대수 문제에 접근하는 다양한 방식은 일반화, 함수, 문제해결 등에서 특정 방식만을 강조할 것이 아니라, 다양한 방식을 모두 경험할 수 있도록 하는 것이 바람직하다는 것이다.

Wheeler(1996)는 대수 도입과 관련해서 이루어진 여러 연구를 일반화, 문제해결, 모델링, 함수적 접근의 4가지로 구분하여 설명한다. 그러나 그 역시 어느 한 가지 접근법만이 강조되는 대수 도입은 불가능함을 지적하고 있다. 이는 곧, 서로 간의 관련성을 통해 대수 도입에 대한 논의를 전개시켜 나가는 것이 보다 자연스럽다는 것이다. 이러한 맥락에서 Standards (1989)는 대수의 역할이 초등수학과 고등수학을 연결하는 시점에 놓여 있음을 지적하면서, 대수의 도입은 비형식적인 방법과 패턴, 모델링, 그리고 일반화 등의 다양한 관점이 상보적으로 결합되어야 함을 강조한다[11].

이 글은 대수 도입과 관련하여 다양한 관점을 대수의 내재적 특성으로 일반화, 추상화, 구조로 구분하였으며, 그러한 특성이 학교 대수에서 표현되는 형식을 문제해결, 모델링, 함수로 나누고 있다. 물론 이러한 구분이 절대적인 기준에 의해 이루어진 것은 아니다. 대수 도입과 관련하여 이후 연구과제로 생각해 볼 수 있는 것은 보다 다양한 대수로의 접근법에 대한 탐구와, 이와 함께 이러한 접근법을 강조하는 다양한 수업 모형을 구성해 보는 것이다.

예를 들어, Wheeler의 4가지 관점에 주목하면 다음과 같은 정사면체 모형을 제안해 볼 수 있다[12]. 각 꼭지점은 G(일반화), P(문제해결), M(모델링), F(함수)를 뜻한다.



이 정사면체 모형은 대수 도입에 있어서 다양한 수업 모형을 그 차원에 따라 구분할 수 있다는 장점을 가진다. 예를 들어, 일반화와 문제해결에 중심을 둔 대수 도입을 생각한다면, 이는 G와 P를 연결하는 선분에 초점을 두고 진행되는 1차원적 수업 모형이 될 것이다. 위의 모형에서 한 꼭지점에 초점을 맞추면서 대수 수업이 진행된다면 이는 0차원 수업 모형이 될 것이며, 전체를 고려한 대수 수업이 진행된다면 3차원 수업 모형이 될 것이다. 물론 차원 간의 수준에 대한 분석은 이후 과제가 될 것이며, 더불어 각 수업 모형의 특징을 분석하는 연구 역시 대수 도입과 관련해서 의미 있는 과제가 될 수 있을 것이다.

이와 함께 앞서 논의한 대수의 내재적 특성과 대수의 외재적 표현에 따른 6가지 관점을 대수 도입과 관련된 논의에서 확장해서 진행한

11) 중등학교 수학 교육과정은 많은 측면에서, 구체적인 초등학교 교육과정과 보다 형식적인 고등학교의 수학 교육과정을 연결시켜 주는 다리와 같다. 대표적인 이행은 산술과 대수간에 일어난다. 5-8학년 학생들에게 있어서, 학생들이 앞으로 대수에서의 형식적인 학습의 기본을 형성하기 위해서 비형식적인 방법으로 대수 개념을 탐구하는 것이 필수적이다. 이와 같은 비형식적인 탐색은 형식적인 대수적 조작을 다루는 것보다 물리적 모델, 자료, 그래프와 다른 수학적 표상(표현)을 강조하는 것이다. 학생들은 관찰된 패턴, 규칙과 문제를 모델화하고 표현하고 기술하기 위해 수 패턴을 일반화하는 것을 배워야 한다(NCTM, 1989).

12) 이 정사면체 모형은 저자가 구성한 것으로, 여기서 말하는 차원은 3차원이 2차원에 비해 더 높은 수준에 있다는 식의 수준 구분이 아닌 단순히 표현상의 구분임을 밝혀둔다.

다면, 이를 위해 어떤 모형을 구성할 수 있을 것인가, 그리고 각각의 관련성 및 특징 등을 명확히 하면서 그에 따른 구체적인 수업 모형을 구성해 볼 수 있을 것인가와 같은 문제 또한 의미 있는 연구과제가 될 수 있을 것이다. 더불어 지금까지 논의된 다양한 학교 대수 수업은 어떤 면을 강조하고 있는지를 분석해 볼 필요가 있을 것이며, 이러한 분석을 토대로 학교 대수의 도입을 재구성해 보는 작업 역시 대수 학습과 지도를 위한 연구에서 중요한 연구과제가 될 것으로 기대된다.

참고문헌

김남희(1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해. 대한수학교육학회 논문집, 7(1).

홍진곤(1999). 반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도. 서울대학교 박사 학위 논문.

Bell, A.(1) (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra*(pp.151-154). Kluwer Academic Publishers.

Bell, A.(2) (1996). Problem solving approaches to algebra: Two aspects. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra*(pp.167-185). Kluwer Academic Publishers.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra*(pp.15-37). Kluwer Academic Publishers.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, Grades 6-10.* Heinemann.

Harel, G. & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra*(pp.225-236). Kluwer Academic Publishers.

Kieran, C. & Wagner, S.(1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp.220-237). NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.390-419). New York: Macmillian.

Kieran, C. & Boileau, A., Garancon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra* (pp.257-293). Kluwer Academic Publishers.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra*(pp.87-106). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of qlgebra. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra*(pp.65-86). Kluwer Academic Publishers.

Melillo, J. A. (1999). An analysis of students' transition from arithmetic to algebraic thinking. Kent State University Thesis (Ph. D.).

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* NCTM.

Radford, L.(1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bednarz, et al. (eds.), *Approaches to Algebra*(pp.107-111). Kluwer Academic Publishers.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the fitfalls of reification-The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it?. In S. Wagner & C. Kieran (eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*(pp.11-24). NCTM.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should, and must be an eighth-grade course for average students. In B. Moses (ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12*(pp.40-48). NCTM(1999).

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (eds.), *The Ideas of Algebra, K-12*(pp.8-19). NCTM.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn?. In B. Moses (ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12*(pp.22-30). NCTM(1999).

Wheeler, D. (1996). Backwards and forwards: reflections on different In N. Bednarz, et al. (eds.), Approaches to Algebra. *Approaches to Algebra*(pp.317-325). Kluwer Academic Publishers.

A Study on the Approaching to School Algebra

Kim, Sung Joon (Seoul National University, Graduate School)

The purpose of this study is to investigate various perspectives on the approaching to school algebra. School algebra plays an important role in school mathematics, but many students have been in difficulties for the learning of school algebra. This problem has been continued for the long time. This paper supposed that this problem may be caused by the approaching stage to the school algebra. In order to investigate this problem, we first described the definition of algebra in chapterⅡ. And in chapterⅢ, we divided the perspectives of approaching to the school algebra into the two parts. The

one is the intrinsic nature of algebra, i.e. generalization, abstraction, and structural aspects. The other is the extrinsic representation of algebra, i.e. problem solving, modelling, functions. Each perspectives are investigated through various research studies. We hope that this works on each perspectives help a teacher prepare school algebra.