대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 1 호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.1, 15-27. March 2002

수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성 분석과 수준 탐색
- 기하 영역을 중심으로 -

조 영 미*

I. 서 론

우리는 암암리에 정의는 어떠해야 한다는 관념을 갖고 있다. 이를테면, 정의는 류와 종차로 이루어져야 하며, 최대한 간략하게 서술되어야 하며, 정의는 그 일부분으로부터 논리적으로 추론될 수 있는 부분을 포함해서는 안 된다 등의 관념을 갖고 있다. 이 관념은 한마디로 말해, 학문에서 사용하는 정의가 보여주는 특성에 해당한다. 수학적 정의 역시 이러한 특성을 갖추고 있다.

그런데, 우리는 학교수학 교과서에서 사용하는 정의 중에서 그러한 특성을 갖추지 않은 것을 쉽게 발견할 수 있다. 학교수학의 정의로 변형되는 과정에서 다른 특성이 부각되는 것이며 그 '다른 특성'들은 학교수학에서 사용하는 정의의 특성이 된다. 본 논문에서는 먼저 학교수학 교과서에서 사용하는 정의의 제 특성을 찾아보고자 한다. 이는 특히 학문에서 사용하는 정의의 특성과 대비되는 점을 학교수학에서 찾아내기 위함이다.

한편, 학교수학에서는 초중고로 학년 수준이 높아짐에 따라 수학적 특성이 강조된다. 학교수학에서 사용하는 정의에도 이러한 점이 반영된다. 즉, 초등학교 수학교과서에서 사용하는 정의는 비학문적, 비수학적 특성이 두드러진 반면에, 고등학교에서는 좀더 수학적 특성이 두드러진다. 이 아이디어에 기초하여, 본 논문에서는 초중고에 따른 정의의 수준을 탐색해 보고자 한다. 이 때, 앞서 추출해낸 학교수학 교과서의 정의의 특성이 자료로서 유용하게 사용된다.

특별히 본 논문에서는 기하 영역에 한정하여 학교수학적 정의의 수준을 탐색한다. 다른 내용 영역에 비해 기하 영역에 많은 정의가 등장하여 특성을 추출해 내기가 수월하며, 또한 동일한 용어가 초중고에 따라 비교적 상이한 방식으로 정의되고 있어 수준을 탐색하는 데 용이하기 때문이다.

II. 정의 방법에 관한 이론적 고찰

우리는 한 용어에 상이한 성격의 의미를 대응시킬 수 있다. 예를 들어, 삼각형이라는 용어에, '세모꼴', '△', '세 선분으로 둘러싸인 도형' 등의 의미를 대응시킬 수 있으며, 이 때 '세모꼴'은 삼각형의 동의어, '△'은 삼각형의 예, '세 선분으로 둘러싸인 도형'은 삼각형의 내포 등으로, 각각은 상이한 성격의 의미이다. 용어에 어떤 성격의 의미를 대응시키는가에 따라 정의가 달라지며, 본 논문에서는 이를 정의의 방법(이하 '정의 방법')이 달라진다고 말한

* 이화여대 교육과학연구소

다.

본 논문에서는 Ginther(1964)의 구분을 참조하여 정의 방법을 내포적 방법, 외연적 방법, 동의적 방법으로 구분하고자 한다. 대체적으로, 그는 일반 논리학을 따라 학교수학 교과서에서 사용하는 정의를 이와 같이 구분하였다. 그런데, 학교수학 교과서에서 사용하는 정의는 수학적 특성을 지니고 있으며, 그러한 특성 중에는 일반 논리학의 구분으로는 놓치기 쉬운 것이 있다. 따라서, 본 논문에서는 Ginther의 구분을 기본적인 틀로 삼으면서 수학적 특성을 반영할 수 있도록 정의 방법에 관해 이론적으로 고찰한다.

1. 내포적 방법

내포가 다양한 의미로 사용되기 때문에(Copi, I., 1963, pp.181-183, 박종홍, 1983, p.28) 정의 방법으로서 내포적 방법을 직접적으로 규정하는 것은 쉽지 않은 것으로 보인다. 따라서, 본 논문에서는 내포적 방법을 간접적으로 정의하고자 한다. 즉, 일정한 조건을 제시하는 정의를 내포적 방법으로 명명한다. 이를테면, 이하에서 좀더 자세히 살펴볼 터인데, 논리적 정의는 류와 종차라는 '조건'을 제시하고 있으므로 내포적 방법에 해당하며, 발생적 정의는 운동 관념을 사용한다는 '조건'을 제시하고 있으므로 내포적 방법에 해당한다. 이와 같은 기준에서 논리적 정의, 발생적 정의, 관계적 정의, 조작적 정의, 공리적 정의 등을 내포적 정의 방법으로 삼을 수 있다.

정의 방법을 다룬 문헌들을 살펴보면, 이 정의 방법 각각에 독특한 측면이 있음을 알 수 있다. 이하에서는 이 정의 방법 중에서 현재 학교수학과 관련이 있는 정의 방법을 위주로 그 독특한 측면을 살펴보고자 한다.

먼저, 논리적 정의는 류와 종차에 의한 정의이다. 류는 어떤 대상이 속하는 집단을, 종차는 그 집단 내에서 그 대상과 다른 대상을 구분짓는 속성을 가리킨다. 이를테면, '인간은 이성적 동물'이라고 정의할 때, '동물'은 류, '이성적'은 종차에 해당한다. 학교수학 교과서에서 우리는 '선분의 개수가 3인 다각형을 삼각형', '차수가 1인 다항식을 일차식' 등의 논리적 정의를 쉽게 찾아 볼 수 있다.

둘째, 발생적 정의는 정의항에 개념의 발생 조건 또는 과정을 기술한다. 예를 들어, 구는 주어진 한 점으로부터 일정한 거리에 있는 점의 자취로 정의된다. 그런데, 원의 한 지름을 축으로 하여 그 원을 회전함으로써 생성되는 곡면으로 구를 정의할 수도 있다. 후자의 정의를 발생적 정의라고 한다. 발생적 정의는 과학적 행위를 가능하게 한다. 실례로, Archimedes는 위에서 예시한 구의 발생적 정의를 사용하여 구의 표면적을 구할 수 있었다(우정호, 1986, pp.255-256). 발생적 정의는 또한 수학에서의 논증 방식과 철학자들의 사유에도 적지 않은 영향을 끼친 바 있다(Mancosu, 1996, p.98).

셋째, 관계적 정의는 관계로 이루어진 어떤 체계 내에서 정의하려는 사물이 차지하는 위치를 사용한 것으로, '위치적 정의'라고 일컬어지기도 한다. Ogden과 Richards는 이를 '어떤 사람에게 특정 장소가 어디에 있는지를 알려주려고 할 때 우리는 이미 그가 알고 있는 장소들과 공간적으로 연결되는 것들을 묘사한다. 정의도 이와 마찬가지이다(Robinson, 1954, p.99, 재인용)'라고 설명한 바 있다.

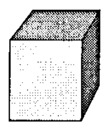
초등학교 수학 교과서에서 음의 정수를 '$-1, -2, -3, \cdots$과 같이 자연수에 '—' 부호가 붙은 수'라고 정의한 것을 볼 수 있다(초, 6-2, p.6). 그런데, 음의 정수를 '$x+a=0$ $(a>0)$을 만족하

는 수 x'라고 정의할 수도 있다. 두 정의를 비교해 볼 때, 전자는 '—'라는 표지(標識)를 사용한 데 대해, 후자는 덧셈과의 관계를 사용한 것이며, 이를 음수에 대한 관계적 정의로 볼 수 있다.

지금까지 살펴본 내포적 방법들은 대체적으로 말해 학문적인 특성을 지닌다. 그런데, 학교수학 교과서에서 우리가 정의라고 부르는 대상에는 그러한 특성을 지닌 것도 있지만, 그렇지 않은 것도 있다. 오히려 비율로 볼 때 후자가 더 높은 수치를 차지한다. 다시 말해, 학교수학에 제시된 정의 중에서 일단 내포적 방법으로 분류된 정의를 다시 위의 각 정의 방법 중에 어느 한 가지로 분류하고자 할 때, 그렇게 분류되는 정의는 많지 않다. 따라서, 지금까지 살펴본 내포적 방법으로는 학교수학 교과서에 제시된 정의들을 포괄하는 데 역부족이다. 이 점을 감안하여 다음 III장에서 본격적으로 학교수학에서 사용하는 정의를 분석할 때에는 내포적 방법에 속한 정의를 다른 방식으로 세분하게 된다.

2. 외연적 방법

정의 방법의 하나로서 외연적 방법은 예를 사용하여 정의하는 것을 가리킨다. 외연적 방법은 세 가지 하위 유형으로 구분할 수 있다 (Copi, I., 1963, pp.187-189). 첫째, 그 개념이 가리키고자 하는 대상을 열거하는 것이다. 예를 들어, 자연수를 '1, 2, 3, …과 같은 수'라고 정의하는 경우이다. 둘째, 오른쪽 그림과 같이, 지시하여 정의하는 것이다. 셋째, 대상을 일일이 열거하는 대신 부분집합을 열거하는 정의이다. 예컨대, '유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 한다'와 같은 경우이다.



직육면체

논리적으로는 불완전한 외연적 방법은 심리적으로는 유용한 면이 있다. 이를테면, 예를 통하여 개념에 대한 가설을 형성하고, 이 가설을 또 다른 예에 적용해 보면서 이를 검증하고 수정한다. 또한, 우리는 추상적인 문제를 다룰 때에도 구체적인 사례 또는 전형적 모델을 사용하여 사고하는 경향이 강하다.

이러한 점을 감안할 때, 논리적인 측면에서 금기시 하는 것과는 다르게, 학습자의 이해를 목적으로 하는 학교수학에서 외연적 방법은 배제해야 할 정의 방법은 아니다. 다만, 그 방법이 지닌 한계를 분명히 하는 작업이 필요할 뿐이다.

3. 동의적 방법

이 방법은 피정의항과 유사한 의미를 지닌 용어를 사용하여 정의하는 것이다. 이 정의방법의 유형으로는, 첫째 학습자에게 친숙하거나, 학습자가 이해하기 쉬운 용어로 정의하는 것이다. 이를테면, '집합'을 '모임', '원'을 '동그라미 모양', '부채꼴'을 '부채모양'으로 정의하는 경우이다. 논리학에서 제시하는 정의 규칙에 의하면, 정의항에 피정의항 자체나 그 동의어가 포함되어서는 안 된다. 그러나, 학교수학에서는, 논리학에서 요구하는 것과 다른 성격을 지니기 때문에, 동의어를 사용하여 정의를 내리는 경우가 적지 않다.

외국어 사전은 각 용어에 대해 동의적 방법으로 정의를 내리고 있다고 볼 수 있다. 영한사전의 'definition:정의'는 영어의 'definition'을 국어 중에서 유사한 의미를 지닌 '정의'라는 용어로 바꾸어 설명하고 있는 것이다. 학교수학에서 이와 비슷한 사례로는, $x+6=1$를 '엑스 더하기 육은 십일과 같다'라고 읽는다고 정의하는 경우를 들 수 있다. 이는 동의적 방법의 둘째 유형이다.

한편, Smith(1962, pp.67-86)는 동의적 유형과 관련하여, '말에 의한' 동의적 방법과 '상징에 의한' 동의적 방법이라는 두 가지 범주를 제시한 바 있다. 이 중 후자는 축약하거나 기호화하는 것이다. 'united nations'를 축약하여 'U.N.'이라고 한다든지, '처음 속도를 V_o'로 기호화하는 것은 이러한 동의적 방법에 속한다. 이 방법은 특히 수학이나 물리 등에서 많이 사용된다. 학교수학에서 축약의 경우로는, '양의 유리수를 간단히 양수라고 한다', '$\log_{10}N$을 $\log N$으로 나타낸다'와 같은 정의를 들 수 있다. 기호화의 경우로는, '1센티미터는 1cm로 나타냅니다', '두 복소수 $a+bi$와 $c+di$ 가 같다는 것을 $a+bi=c+di$로 나타낸다'라고 정의하는 경우이다. 학교수학 교과서에서 이러한 유형의 정의는 적지 않다. 따라서, 본 논문에서는 축약이나 기호화를 동의적 방법의 셋째 유형으로 간주한다.

III. 학교수학 교과서에서 사용하는 정의 방법 분석

1. 분석 틀 및 분석 과정

이 분석의 목적은 학교수학에서 사용하는 정의 방법의 특성을 추출하기 위함이다. 이를 위해, 우선 초・중・고[1]를 통틀어 학교수학에 제시된 정의를 내포적, 외연적, 동의적 방법으로 분류하고, 이들을 다시 각 방법 내에서 하위 유형 별로 분류하였다. 그리고 분류된 하위 유형 내에서, 학교수학에 제시된 정의의 특성을 추출하고자 하였다. 각 정의 방법 별 하위 유형에 관한 내용은 부록에 있다[2].

2. 분석 결과

학습자의 이해를 우선하는 학교수학에서는 수학적 지식, 학습자의 심리, 수학의 역사적 발생 등 다양한 요소들을 고려하여 수학적 정의를 변형시키며 그 결과로 학교수학에서 사용하는 정의는 소위 학문에서 사용하는 정의가 갖춘 특성[3]과 상이한 특성을 지닌다. 이하에서는 앞에서 설명한 분석 틀과 분석과정을 거쳐 얻은, 학교수학 교과서에서 사용하는 정의에서 찾아 볼 수 있는 특성들을 진술해 보고자 한다.

(1) 특성 I[4]

① 외연적 정의 방법을 사용한다.

외연적 정의 방법은 예를 사용하는 것으로,

---

1) 6차 교육과정을 따른 교과서를 분석하였으며, 고등학교에서는 공통수학만을 대상으로 하였다.

2) 본 연구에서 채택한 분석 틀의 기본적인 아이디어는 Ginther(1964)의 것이다. 본 논문에서는 그가 정의의 엄밀성을 비교하는 데 사용하였던 분석 틀을 수정 보완하여, 학교수학에 제시된 정의 방법의 재 특성을 추출하는 데 사용하였다.

3) 학문에서 사용하는 정의의 특성은 대략 다음과 같다. ① 류와 종차로 이루어져야 한다 ② 필요충분조건으로 이루어져야 한다 ③ 동의어를 사용하지 않아야 한다 ④ 애매하거나, 불분명하거나, 비유적인 말을 사용하지 않아야 한다 ⑤ 최대한 간략하게 서술되어야 한다 ⑥ 긍정적인 정의가 가능할 때에는 부정적인 정의를 사용해서는 안된다 ⑦ 용어를 정의할 때에는 완벽하게 알고 있거나 이미 설명된 용어만을 사용한다.

4) 학교수학에 제시되는 용어 중에는 반복하여 등장하는 것이 있다. 이러한 용어의 경우에 학습자의 발달 수준이나 수학적 지식 등을 고려하여 정의 방법이 달라진다. 그러한 차이를 통하여 학교수학에서 정의 방법을 변형하는 양태를 알 수 있으며, 이는 학교수학에 제시된 정의의 특성으로 삼을 수 있다. 이와 같이, 학년을 달리 하여 반복하여 등장하는 용어를 통해 추출해 낸 특성을 '특성 II'이라고 명명한다. 그리고, 이러한 특성 이외의 것을 '특성 I'라고 명명한다.

심리적으로 유용하기 때문에 학교수학에서, 특히 초등학교와 중학교 수학에서 적극적으로 사용한다. 용어가 가리키는 대상을 지시하여 정의하는 방법과, 예를 사용하는 방법은 특별히 초등학교와 중학교에서 적극적으로 사용한다. 대표격인 한 가지 예를 사용하는 정의 방법은 초중고에서 모두 사용되며, 상대적인 비율을 고려할 때, 고등학교 수학에서 특별히 높은 비율을 차지한다. 다음과 같은 사례가 있다.

용어	정의항
직각	[그림 생략] 위와 같은 각 ㄱㄴㄷ을 직각이라고 합니다.
동위각	[그림 생략] 두 직선 l, m과 한 직선 n이 만날 때 생기는 8개의 각 중에서 ∠a 와 ∠c, ∠b 와∠f, ∠c 와 ∠g, ∠d 와 ∠h를 각각 서로 동위각이라고 한다.
사인곡선	[그림 생략] 이 그래프를 사인곡선이라고 한다.

② 동의적 정의 방법을 사용한다.

학생에게 친숙한 말이나 이해하기 쉬운 말을 사용하여 정의한다. 중・고등학교 수학에서는 매우 한정된 내용 영역에서 찾아 볼 수 있는 반면에, 초등학교 수학에서는 여러 내용 영역에서 이러한 정의 방법을 찾아 볼 수 있으며, 특히, 도형 영역의 경우에는, 다음 표와 같이 유사한 이미지를 연상시키는 동의어를 사용한 정의를 볼 수 있다.

용어	정의항
원	동그라미 모양
부채꼴	두 반지름과 원의 한 부분으로 둘러싸인 부채 모양의 도형

③ 정의항의 줄임말이 용어가 될 수 있도록 정의항을 선택한다.[5]

중학교 수학에서 '내각'을 '내부에 만들어진 각'으로 정의하는 데, 이 정의항에서 '내'와 '각'을 취하면 용어 '내각'이 된다. 이와 같이, 학교수학에서는 정의항의 몇몇 글자를 취해 정의하고자 하는 용어가 만들어 질 수 있도록 정의항을 선택하는 경향이 있다. 다음과 같은 사례가 있다.

용어	정의항
직사각형	4각이 모두 직각인 사각형
다면체	다각형인 면으로만 둘러싸인 입체도형
내심	삼각형의 내접원의 중심

④ 용어가 지시하는 대상을 좀더 확실하게 지적하기 위해 보충어를 사용한다.

이등변삼각형 중에서 세 변의 길이가 같은 삼각형을 정삼각형이라고 합니다.(초 3-1, p.55)

이 정의에서 '이등변삼각형 중에서'라는 보충어는 정삼각형이 이등변삼각형임을 알려주기 위해 삽입된 것이라고 볼 수 있다. 이 경우에 해당하는 사례들은 학문에서 사용하는 정의의 조건 가운데 하나인, '정의는 최대한 간략하게 진술되어야 한다'는 조건에서 벗어나 있다고 볼 수 있다. 다음 표는 대표적 사례이다.

용 어	정 의 항
각기둥의 옆면	옆으로 둘러싸인 직사각형 모양의 면
옆넓이	4개의 옆면의 넓이
밑넓이	한 밑면의 넓이

⑤ 수학적 언어와 좀더 세련된 수학적 언어가 동시에 정의항에 사용된다.

수학적 언어에는 수준이 있으며, 이러한 수준을 고려하여 정의를 제시하게 되는데, 높은 수준의 수학적 언어를 일방적으로 제시하는 것은 학습자에게 부담이 될 수 있다. 따라서, 학

5) 이하에 열거될 특성들은 내포적 방법에서 찾아 볼 수 있는 대표적인 것이다.

습자에게 친숙한 언어와 더 높은 수준의 언어를 동시에 기록하여 수준 차이로 인한 갈등을 완화하는 방향으로 정의를 내리는 것이다. 이러한 사례는, ④와 마찬가지로, '정의는 최대한 간략하게 기술되어야 한다'라는 정의 조건에서 벗어난다. 다음 표는 대표적 사례이다.

용어	정의항
수직 이등분선	직선 CD는 선분 AB를 이등분하고 $\overline{AB}$와 직교한다. 곧 이것은 $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$와 같이 나타낼 수 있다. 이와 같은 직선 CD를 선분 AB의 수직이등분선이라고 한다.
원	평면 위의 한 정점 O 로부터 일정한 거리 r에 있는 점 P 들의 집합 $\{P\mid\overline{OP}=r\}$를 점 O 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이라고 한다.

⑥ 류(類)를 적시(摘示)하지 않는 경우가 있다.

류와 종차에 의한 정의는 내포적 정의 방법의 전형이다. 학교수학에서는 외형상 이러한 형태를 취하고 있지만, 실상 류를 정확하게 제시하지 않는 경우가 있다. 초등학교 도형 영역에서는 최근류의 자리에 매우 넓은 류를 제시하여 도형을 정의하는 경우가 있다.

삼각형	초	3개의 선분으로 둘러싸인 도형
	중	선분의 개수가 3인 다각형
각기둥	초	위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 되어 있는 입체도형
	중	위와 아래에 있는 면, 곧 밑면이 평행하고, 옆면이 모두 직사각형인 다면체

⑧ 필요충분조건이 아닌 내포를 사용하는 경우가 있다.

필요충분조건으로서의 내포는 정의하고자 하는 용어가 가리키는 대상의 외연에 속하는 모든 원소들이 지니고 있는 공통의 성질이면서 동시에 그 외연에 속하지 않는 원소들은 가지고 있지 않은 성질이다. 학문을 위한 정의에서는 필요충분조건을 사용하는 것이 중요하지만, 학교수학에 제시된 정의는 이 조건을 반드시 지키는 것은 아니다. 한편, 초등학교 수학에서는 대부분의 내용 영역에서 필요충분조건이 아닌 내포를 사용하는 정의를 찾아 볼 수 있다. 중학교에서는 주로 대수 영역에서 그러한 사례를 찾아 볼 수 있다. 이 특성은 직관이 강조되거나 학문성이 강하지 않은 저학년, 또는 그러한 내용 영역에서 쉽게 찾아 볼 수 있는 것이다.

용 어	정 의 항
모선	원뿔의 꼭지점과 밑면인 원둘레의 한 점을 이은 선분
예각	90°보다 작은 각

(2) 특성 II

① 상위 단계에서 사용한 용어를 하위 단계에서 사용할 때 그 용어를 풀어서 제시한다. 다음은 그러한 사례이다.

용 어		정 의 항
평행사변형	초	두 쌍의 마주 보는 변이 서로 평행인 사각형
	중	대변이 서로 평행인 사각형
각기둥	초	위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 되어 있는 입체도형을 각기둥이라 한다.
	중	위와 아래에 있는 면, 곧 밑면이 평행하고, 옆면이 모두 직사각형인 다면체

② 류에 유의하여 정의한다. 다음은 그러한 특성을 갖는 정의의 사례이다.

용어		정 의 항
각기둥	초	위와 아래에 있는 면이 서로 평행이고 합동인 다각형으로 되어 있는 입체도형
	중	위와 아래에 있는 면, 곧 밑면이 평행하고, 옆면이 모두 직사각형인 다면체
원점	초	좌표평면에서 좌표축이 만나는 곳
	중	두 좌표축이 만나는 점 O

③ 점차 엄밀해지도록 정의한다. 다음은 그러한 특성을 갖는 사례이다.

용어		정의항
각	초	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형
	중	한 점 O에서 시작한 두 반직선 OA, OB로 이루어지는 도형
정다각형	초	다각형 중에서 각 변의 길이가 모두 같고, 각의 크기가 모두 같은 도형
	중	다각형에서 특히 모든 변의 길이가 같고, 모든 내각의 크기가 같은 다각형
평행선 사이의 거리	초	평행선에 수직인 선분의 길이는 모두 같다. 이 길이를 평행선 사이의 거리라고 한다.
	중	두 직선 l, m이 평행일 때, 오른쪽 그림과 같이 직선 l위의 한 점 A에서 직선 m에 내린 수선의 발을 B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 두 평행선 l, m 사이의 거리라고 한다.

④ 관점을 달리하여 정의한다. 다음은 그러한 특성을 갖는 사례이다.

용어		정의항
원	초	본을 뜬 동그란 모양
	중	평면 위에서 한 정점 O로부터 같은 거리에 있는 모든 점의 집합
각	중	한 점 O에서 시작한 두 반직선 OA, OB로 이루어지는 도형
	고	반직선 OP가 한 점 O를 중심으로 반직선 OX의 위치에서 반직선 OP의 위치까지 회전하여 얻어진 도형
모선	초	원뿔의 꼭지점과 밑면인 원둘레의 한 점을 이은 선분
	중	회전해서 옆면을 만드는 선분 AB
두 평면의 수직	초	직각으로 만나는 두 면
	중	평면 P가 평면 Q에 수직인 직선을 포함하는 경우,

지금까지 학교수학에서 사용하는 정의의 특성을 살펴보았다. 이러한 분석 결과를 토대로, 다음에서는 기하 영역을 중심으로 하여 학교수학에서 정의의 수준을 탐색해보고자 한다.

Ⅳ. 정의의 수준 탐색

1. van Hieles의 기하 학습 수준

van Hieles는 기하학습 수준을 시각적 수준, 기술적 수준, 국소적인 논리적 관계를 파악하는 이론적 수준, 형식적인 연역체계를 파악하는 수준, 논리적 법칙의 본질을 통찰하는 수준으로 나눈 바 있다(우정호, 2000, p.435). 이러한 van Hieles의 이론 중 제 0수준과 제 1수준에서의 특성이 이하에 제시될 정의의 수준 중에서 제 0수준과 제 1수준을 설정하는 데 사용되었다.

2. Freudenthal의 수학적 언어 수준

Freudenthal에 의하면, 수학적 언어에는 첫째, 일상적 예나, '이것', '저것' 등과 같은 지시적 언어를 사용하는 구체적 언어 수준, 둘째, 상대적인 관계를 사용하는 언어 수준, 셋째, 문자를 사용하는 규약적인 변수 언어 수준, 넷째, 변환 등을 사용하여 나타내는 함수적 언어 수준(Freudenthal, 1978, pp. 233-242) 등이 있다.

Freudenthal의 언어 수준에 대한 견해는 정의 수준을 탐색하는 데 유용한 기준을 제공한다. 말로 된 언어보다는 문자가, 문자보다는 기호화된 표현이, 기호화된 표현 중에서도 함수를 이용한 표현이 수학적으로 수준이 더 높다는 그의 주장에 근거하여 본 논문에서는 학교수학에서 말로 된 언어, 문자, 기호화된 표현, 함수를 이용한 표현으로 이루어진 정의 사이의 위계를 탐색하였다.

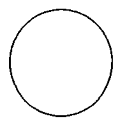
3. 정의의 수준

학교수학 교과서에서 사용하는 정의 방법의

특성 및 van Hieles의 이론과 Freudenthal의 견해를 바탕으로 기하 영역에 한하여 정의의 수준을 다음과 같이 설정할 수 있다.

(1) 제 0 수준 : 전(前)수학적 수준

이 수준은 용어를 정의하는 데 수학적 성격의 의미보다는 일상적 의미를 대응시키는 단계이다. 일상적인 의미를 사용하여 정의한 것으로, 먼저 오른쪽 그림과 같이 외형을 지시하는 정의 방법을 들 수 있다. 둘째, 동의어를 사용하는 정의 방법도 이 수준에 속한다.



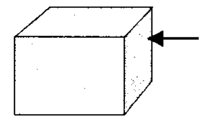
동그라미 모양

특히, 기하 영역에서는 용어를 정의하기 위해 동의어를 선택함에 있어, 용어가 가리키는 대상과 유사한 이미지를 연상시키는 용어를 사용하는 경향이 있다. 예를 들면, '상자모양을 직육면체라고 합니다'와 같은 정의가 이에 속한다. 이 두 가지 방법은, 구성요소가 아닌, 전체로서의 시각적 외관에 의해 도형을 정의한다는 점에서 van Hieles의 기하 학습 수준 중 '주변 대상을 형이라는 인식 수단에 의해 파악하는 단계인' 제 0 수준에 대응한다.

마지막으로, 이미지나 행동을 연상하도록 기술하는 방법이다. 예를 들어, '원을 그릴 때 침이 꽂혔던 점을 원의 중심이라고 합니다'와 같은 정의가 이에 속한다.

(2) 제 1 수준 : 기술적 수준

이 수준에서는 용어를 정의하는 데 성질이나 관계를 기술한 문장을 사용한다. 이를테면, 제 0 수준에서는 삼각형을 '△' 또는 '세모꼴'로 정의한다면, 이 수준에서는 삼각형을 그 구성요소인 선분을 사용하여 '세 선분으로 둘러싸인 도형'으로 정의하는 것이다. 또한, 제 0 수준에서는 직육면체의 꼭지점을 다음 그림과 같이 지시하는 방법을 사용하여 정의한다면, 이 수준에서는 '세 모서리가 만나는 점'으로 정의한다. 이 수준은 van Hieles의 기하 학습 수준 중에서, 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악하는 제1수준에 대응한다.



이 수준은 다시 두 단계로 구분할 수 있다. 먼저, 제 0 수준의 시각적 특성과, 성질과 관계를 동시에 사용하여 정의하는 단계로, 이를 '1a 수준'으로 보기로 한다. 다음으로, 순전히 성질과 관계만으로 정의하는 단계로, 이를 '1b 수준'으로 보기로 한다. 이 때, 1a 수준은 제 0 수준과 1b 수준의 가교 역할을 한다고 볼 수 있다. 분석적인 성질이나 관계를 사용하여 정의하지만, 순전히 이러한 방식으로만 정의하는 것은 학습자에게 부담이 될 우려가 있으므로, 제 0 수준에 해당하는 성격의 의미를 첨가하여 학생들의 부담을 줄이려는 의도가 있다고 볼 수 있다.

1a 수준에 해당하는 정의 방법으로는 다음과 같은 것을 들 수 있다. 첫째, 분석된 성질과 동의어를 동시에 사용한다. 예를 들어, '두 반지름과 원의 한 부분으로 둘러싸인 도형'이라는 성질을 사용하여 부채꼴을 정의할 수 있지만, 이러한 성질에 '부채 모양'이라는, 이른바 동의어를 함께 사용하여, '두 반지름과 원의 한 부분으로 둘러싸인 부채 모양의 도형을 부채꼴'이라고 정의한다.

둘째, 분석된 성질을 기술하는 데 일상 용어를 사용한다. 삼각형을 '세 점이 한 직선 위에 있지 않을 때, 두 점씩을 이은 세 개의 직선으로 이루어진 다각형'으로 정의할 수 있다. 그런데, 초등학교 수학에서는 '세 개의 선분으로 둘러싸인 도형'으로 정의한다. 두 정의의 차이점은, 전자는 삼각형의 내부를 배제하고 있지만,

'둘러싸인'이라는 일상 용어를 사용한 후자의 정의는 내부까지도 포함할 수 있는 표현이다. 후자의 정의는 '△'로서의 삼각형을 완벽하게 분석하고 있다고 볼 수는 없다.

셋째, 분석된 성질이나 관계를 대략적으로 기술한다. 평행선 사이의 거리를 다음과 같이 정의할 수 있다. '두 직선 l,m 이 평행일 때, 직선 l 위의 한 점 A에서 직선 m에 내린 수선의 발을 B라고 할 때, $\overline{AB}$의 길이를 두 평행선 l,m 사이의 거리라고 한다.' 이에 대해, '평행선에 수직인 선분의 길이는 모두 같다. 이 길이를 평행선 사이의 거리라고 한다'라는 정의는 분석된 성질을 대략적으로 기술하고 있다고 볼 수 있다. 또 다른 예를 들면, 점과 평면 사이의 거리는 다음과 같이 정의된다. '평면 P 위에 있지 않은 점 A로부터 평면 P에 그은 수선과 평면과의 교점을 H라고 하면, 선분 AH의 길이는 점 A와 평면 P위의 다른 어떤 점을 맺는 선분의 길이보다도 짧다. 이 선분 AH의 길이를 점 A와 평면 P와의 거리라고 한다'. 이에 대하여, '각뿔의 꼭지점에서 밑면에 수직으로 그은 선분의 길이를 각뿔의 높이라고 한다'라는 정의는 관계를 대략적으로 기술한 것으로 볼 수 있다.

이 밖에도, 분석된 성질이나 관계를 사용하면서도, 제한 조건이 분명하게 언급되지 않은 경우나 류가 불완전하게 제시된 경우 등도 1a 수준에 해당한다. 또한, 다음과 같이 예시적 언어를 사용한 정의 역시 1a 수준에 해당한다.

[1] 각 ㄱㄹㄴ과 각ㄱㄹㄷ은 직각이고, 선분 ㄱㄹ이 밑변 ㄴㄷ의 중점ㄹ에서 만난다. 이 때, 선분 ㄱㄹ은 밑변 ㄴㄷ을 수직이등분한다고 한다.

[2] 직선 CD는 선분 AB를 이등분하고 $\overline{AB}$와 직교한다. 이와 같은 직선 CD를 선분 AB의 수직이등분선이라고 한다'라고 정의할 수 있다.

[1]의 정의에는 [2]에서 기술되고 있는 '직교', '이등분' 등의 개념이 진술 속에 예시적 언어로 들어 있다.

1b 수준에 해당하는 정의 방법의 예는 다음과 같다. '직육면체에서 밑면과 수직인 면을 옆면이라고 한다'라는 정의는 옆면을 밑면과의 관계를 통하여 정의한 것이며, '면이 모두 정사각형인 직육면체를 정육면체라고 한다'라는 정의는 류와 종차에 의한 정의의 형태를 취하고 있는 기술적 수준의 정의라고 볼 수 있다.

(3) 제 2 수준 : 대상 기호를 사용하는 수준

이 수준에서는 용어를 정의하는 데 본격적으로 대상을 나타내는 문자 기호가 사용되는 단계이다. 다음의 예에서 [2]의 경우가 이 수준에 해당한다.

[1] 평행인 두 직선을 평행선이라고 한다.

[2] 서로 평행한 두 직선 l,m 을 평행선이라고 한다.

이 수준은 정의항을 기술할 때, 문자 기호가 부분적으로 사용되는가, 또는 전체적으로 사용되는가에 따라 다시 구분할 수 있다. 예컨대,

[1] 원 O위의 두 점 A, B를 이은 선분을 현이라고 하며…

[2] 접선 l 이 원 O와 만나는 한 점 M을 접점이라고 한다.

먼저, [2]에서는 문자가 전체적으로 사용되고 있다. 이에 대해, [1]에서는 현을 정의하는 데 문자 기호가 부분적으로 사용되고 있다. 만약 이 정의에서 문자를 전체적으로 사용한다면, '원 O위의 두 점 A, B를 이은 선분 AB를 현이라고 한다'라고 정의할 것이다. 따라서, 문자를 사용하여 정의하는 이 수준에서 두 단계를 구

분할 수 있다. [1]과 같이 부분적으로 문자가 사용되는 경우, 곧 정의항을 기술할 때, 문자 기호를 사용할 수 있는 부분에서 문자 기호를 생략하는 단계를 2a 수준으로 보기로 한다. 다음으로, [2]와 같이, 문자 기호가 전체적으로 사용되고 있는 경우로, 문자 기호가 사용될 만한 자리에는 모두 문자 기호가 사용되고 있는 단계를 2b 수준으로 보기로 한다.

(4) 제 3 수준 : 관계 기호를 사용하는 수준

이 수준에서는 정의항에 기호화한 관계적 표현이 사용된다. 예컨대, 정의항에 '선분 OA'이라는 표현 대신에 '$\overrightarrow{OA}$'가 사용되고, '직선 m과 l이 수직'이라는 표현 대신에 '$m \perp l$' 이라는 표현이 사용되는 수준이다. 이 수준도 두 가지로 구분할 수 있다.

[1] 선분 AM과 선분 MB의 길이가 같을 때, 이것을 $\overline{AM}=\overline{MB}$와 같이 나타내며, 점 M을 선분 AB의 중점이라고 한다.
[2] 점 P가 선분 AB 위에 있고 AP : PB = m : n(m>0 , n>0) 일 때, 점 P는 선분 AB를 m : n으로 내분한다고 한다. 이 때, 점 p 는 선분 AB 의 내분점이라고 한다.

[1]에서 밑줄 친 부분은, 제 2 수준에 해당하는 '선분 AM과 선분 MB의 길이가 같다'는 관계를 기호화한 표현이다. 곧, 이 정의에서는 제 2 수준에 해당하는 표현과 관계 기호 표현이 함께 사용되고 있다. 이에 대하여 [2]의 정의에서는 제 2 수준에 해당하는 표현 없이 곧장 관계 기호 표현 'AP : PB = m : n (m>0 , n>0) '이 사용되고 있다.

[1]과 [2]를 비교해 보면, [1]의 정의는, 제 2 수준에서 제 3수준으로 넘어가는 그 중간단계로서 등장하는 정의라고 할 수 있다. 즉, 완전한 관계 기호 표현을 사용하기 위한 가교 역할을 하는 단계로 볼 수 있다. 이런 의미에서 [1]과 같은 정의를 3a 수준, [2]와 같은 정의를 3b 수준으로 설정할 수 있다.

(5) 제 4 수준 : 함수 언어를 사용하는 수준

함수 언어를 사용하여 정의한다. 함수적 언어는 Freudenthal이 수학의 언어 중에서 가장 높은 언어로 상정한 것이기도 하다. 학교수학에 등장하는 이러한 사례로는 다음을 들 수 있다.

좌표평면 위의 점 $P(x,y)$를, 점 $P'(x+a,y+b)$로 대응시키는 함수

$$T:(x,y)\rightarrow(x+ay+b)$$

를 평행이동이라고 한다.

V. 맺음말

본 논문의 연구 문제는 첫째, 학교수학에서 사용하는 정의의 제 특징을 추출하고, 둘째, 이를 기초 자료로 하여 기하 영역을 중심으로 정의의 수준을 탐색하는 것이었다.

이를 위해, 먼저 정의의 방법을 내포적, 외연적, 동의적 방법으로 구분하여 각 방법에 관하여 이론적으로 고찰해 보았다. 다음으로, 실제로 학교수학 교과서에서 사용하는 정의를, 이 세 방법의 어느 하나로 분류하고 다시 각 방법 내에서 설정된 하위 유형으로 분류하는 작업을 통하여, 그 특징을 추출해 보았다. 그 결과, 학교수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성으로 12가지 정도를 추출해 낼 수 있었다.

이렇게 추출된 특성과 van Hieles의 기하학습 수준 이론, Freudenthal의 언어 수준 이론을 바탕으로 기하 영역에서 정의의 5수준을 설정한 바, 좀더 구체적으로 진술하면, 전수학적 수준,

기술적 수준, 대상 기호를 사용하는 수준, 관계 기호를 사용하는 수준, 함수적 언어를 사용하는 수준이 그것이다.

학교수학 교과서에서 사용하는 정의는 학문으로서의 수학에서 사용하는 정의를 참조하긴 하지만 전적으로 그에 의존하지는 않는다. 학생들에게 수학을 이해시키려는 목적 하에서 여러 측면에서 수학적 정의에 변형을 가한다. 본 논문은 이러한 변형의 결과를 구체적으로 분석함으로써 정의와 관련하여 학교수학 교과서에 내재해 있는 메커니즘을 이해할 수 기회를 제공하였다. 더 나아가, 정의의 측면에서, 학문으로서의 수학과 학교수학의 차이점을 드러냄으로써 학교수학의 정체성을 밝히는 데 기여하였다고 생각한다.

그런데, 학교수학에서 사용할 목적으로 정의에 변형을 가할 때 무엇보다 심사숙고해야 할 문제는 그러한 변형이 과연 적절하게 이루어졌는가라는 점이다. 예컨대, 변형의 기본적인 목적이 학습자의 수학의 이해를 도모하기 위한 것이라고 한다면, 과연 그러한 목적을 달성하는 데 적절한 변형인가를 숙고해야 한다는 것이다. 본 논문에서는 이와 같은 문제에 대해서는 논의하고 있지 않다. 이 점에서 본 논문은 한계를 지니고 있다. 본문에서 연구된 내용을 좀더 보완하고 확장하여 차차로 이 문제 또한 다각적으로 심도 있게 논의되어야 할 것이다.

참고문헌

교육부 (1995a). 수학 1-1. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1995b). 수학 1-2. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1995c). 수학 2-1. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1995d). 수학 2-2. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1996a). 수학 3-1. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1996b). 수학 3-2. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1996c). 수학 4-1. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1996d). 수학 4-2. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1997a). 수학 5-1. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1997b). 수학 5-2. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1997c). 수학 6-1. 서울: 대한교과서 주식회사.

______(1997d). 수학 6-2. 서울: 대한교과서 주식회사.

김명렬, 김창동, 박수화 (1997). 고등학교 공통수학. 서울: (주) 중앙교육진흥연구소.

김연식, 박교식 (1994). 우리 나라의 학교 수학 용어의 재검토. 대한수학교육학회논문집 제 4(2). pp.1-9.

김연식, 김흥기 (1995). 중학교 수학 1. 서울: 동아출판사.

______(1996). 중학교 수학 2. 서울: 동아출판사.

______(1997). 중학교 수학 3. 서울: 동아출판사.

김응태, 박승안 (1998). 정수론. 서울: 경문사

박종홍 (1983). 일반논리학. 서울: 박영사.

우정호 (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가. 서울: 천재교육.

______(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

_____(2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.

Copi, I. M. (1952). Introduction to logic. 민찬홍 (역)(1988). 논리학 입문. 서울 : 이론과 실천

Elizabeth, G. R. (1984). *The usage of definition and explanation in secondary school mathematics*. Doctoral Dissertation. Temple University.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing :preface to a science of mathematics education*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Ginther, J. L. (1964). *A study of definitions in high school mathematics textbooks.* Doctoral Dissertation. University of Illinois.

Robinson, R. (1954). *Definition.* Oxford: Clarendon Press.

Smith, B. O. (1962). *A study of the logic of teaching*. Urbana: Bureau of Educational Research, College of Education. University of Illinois.

An Analysis of the Characteristics of Definitions and Exploration the Levels of Definitions in Mathematics Textbooks - In the Area of Geometry -

Cho Young Mi (Research Institute for the Science of Education, Ewha Womans Uni.)

The purpose of this thesis is, through analysing the characteristics of the definitions in Korean school mathematics textbooks, to explore the levels of them. Definitions used in academic mathematics are rigorous. But they should be transformed into various types, which are presented in school mathematics textbooks, with didactical purposes. In this thesis we investigated such types of transformation. With the result of this investigation we tried to identify the levels of the definitions in school mathematics textbooks.

We tried to construct, with consideration about methods of definition, frame for analysing the types of the definitions in school mathematics. Methods of definition are classified as connotative method, denotative method, and synonymous method. Especially we identified that connotative method contains logical definition, genetic definition, relational definition, operational definition, and axiomatic definition. With these analyses we made a frame for investigating the characteristics of the definitions in school mathematics textbooks.

With this frame we identified concrete types of transformations of methods of definition. We tried to analyse this result with van Hieles' theory about levels of geometry learning and the mathematical language levels described by Freudenthal, and identify the levels of definitions in school mathematics. We showed the levels of definitions in the geometry area of the Korean school mathematics.

<부 록>

내포적 방법의 하위유형	실례
U인 V를 X	직각이 있는 삼각형을 직각삼각형이라고 합니다.
…일 때, U인 V를 X	비율에서 기준량을 100으로 보았을 때, 비교하는 양을 나타낸 수를 백분율 또는 퍼센트라 하고,
U인 V, 곧 U'인 V를 X ◉ V가 U일 때, 곧U'일 때, V를 X	약수를 2개만 갖는 자연수, 곧 1보다 큰 자연수 중에서 1과 그 수 자신만을 약수로 가지는 자연수를 소수라고 한다. ◉ 자연수 a가 자연수 b로 나누어 떨어질 때, 곧 a=b×(자연수)의 꼴로 나타낼 수 있을 때, b를 a의 약수, a를 b의 배수라고 한다.
…이다. U인 V를 X	평균을 구할 때 대략의 평균을 미리 가정하여 각 변량의 차에 대한 평균을 구하면 편리하다. 이 때, 미리 가정한 대략의 평균을 가평균이라고 한다.
V가 U일 때, V를 X	두 직선이 만나서 이루는 각이 직각일 때, 두 직선은 서로 수직이라고 한다.
U일 때, V를 X	오차의 절대값이 어떤 값 이하라고 할 때, 그 값을 주어진 근사값에 대한 오차의 한계라고 한다
U이다. 이 때(여기서) V를 X	앞쪽의 물음에서 등식 x+3=7은 x에 4를 대입하면 참이 되지만 4이외의 값을 대입하면 거짓이 된다. 이와 같이 x의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하는 등식을 방정식이라고 하며, 이 때 x를 미지수라고 한다.

동의적 방법의 하위유형	실례
보다 친숙하고 알기 쉬운 말을 사용하여 정의	위와 같은 상자 모양을 직육면체라고 합니다.
말을 기호로 바꾼 정의	1센티미터는 1cm로 나타냅니다.
기호 읽는 법을 알려주는 정의	x를 사용하여 위의 문장을 등식으로 나타내면, x+6=11이고, 이를 엑스 더하기 육은 십일과 같다라고 읽는다.
정의항을 압축하여 정의	10이 10이면 100이라고 씁니다.
정의항을 대체하여 정의	100cm를 1m라고 합니다.

외연적 방법의 하위유형	실례
…[한 가지 예]인 V를 X	15÷5=3과 같은 식을 나눗셈식이라고 합니다.
…[예들을 열거]인 V를 X	1, 2, 3, …과 같은 수를 자연수라 하고,
…에서 ~[예]를 X	위의 등식 x+20=38에서 x, 20, 38을 각각 이 식의 항이라 하고
…이다. 이 때, ~[예]를 X	17을 5로 나누면, 3이 되고 2가 남습니다. 17÷5=3…2 이 때, 3을 17÷5의 몫이라 하고, 2를 나머지라고 합니다.
…[부분집합을 열거]를 X	가로로 놓인 수직선을 가로축, 세로로 놓인 수직선을 세로축이라 하며, 이들을 좌표축이라 한다.
…[지시하는 경우]를 X	정사면체 + 그림
…[예시적 언어를 사용]를 X.	6을 1, 2, 3, 6으로 나누면 나누어 떨어진다. 이 때, 1, 2, 3, 6을 6의 약수라고 한다.