대한수학교육학회지 <학교수학> 제 4 권 제 1 호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.4, No.1, 1-13. March 2002

보조선 지도법 연구

임 재 훈* 박 경 미**

Ⅰ. 서론

학생들이 기하 문제를 해결할 때 어려움에 직면하는 이유 중의 하나는 문제의 해결에 필요한 보조선을 어떻게 그어야 할지 모르는 것이다. 기하 증명 문제 중에는 보조선을 그어야만 해결할 수 있는 문제가 많으며, 적절한 보조선을 긋지 못하면 이런 문제의 해결은 그 출발점에서부터 막히게 된다. 예를 들어, 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 정리를 증명하기 위해서는 한 꼭지점에서 각의 이등분선이라는 보조선을 적절히 그어야 한다. 이 보조선을 긋지 못하면 그 다음 증명을 하기 어렵다.

실제 증명 수업 상황을 보면, 어떻게 이와 같은 보조선을 그을 생각을 하게 되었는지에 대해서는 별다른 언급 없이, 일단 보조선을 그렇게 그으면 증명이 이러이러하게 될 수 있다는 지도가 이루어지는 경우가 많다. 보조선을 긋는 것은 설명할 수 없는 '계시'의 영역에 속하는 것처럼 여겨지기도 한다. 이런 상황은 보조선을 긋는 일반적인 원리가 없어 보이는 데 기인하는 것이기도 하다. 나귀수(1998)의 지적대로, 이등변삼각형의 두 밑각의 크기가 같다는 정리를 증명할 때 각의 이등분선인 보조선이 어디에서부터 나왔는가를 학생들에게 설명하는 것은 어려운 일이며, 보조선을 긋는 일정한 법칙도 존재하지 않는 것 같아 보인다. 데이비스와 허쉬도 보조선은 우연적이거나 우발적으로 보이고 어떤 의미에서 천부의 재능 또는 교묘한 수법에 속하며, 보조선에 관한 이 슬픈 진실은 학생에게 고통을 준다고 하였다 (Davis & Hersh, 양영오, 허민 역, 1995). 서동엽(1999)은 증명에 필요한 보조선을 그려 넣는 것이 학생에게 쉬운 문제가 아님을 인식해야 하며, 분석의 과정을 경험하게 하는 것이 필요한 보조선을 그리는 데 도움이 된다는 견해를 제시하였다.

본 고에서는 보조선도 인간의 사고의 결과로 나온 것이므로 그 사고의 맥락을 탐색해 재연하는 것이 가능하다고 보고, 중학교 논증 기하와 관련된 몇 가지 문제를 소재로 하여 각 문제에서 특정한 보조선을 그은 이유 또는 맥락에 대해 논의할 것이다. 이러한 이유나 맥락을 밝혀 냄으로써 그냥 보조선을 이렇게 그으면 증명이 된다는 식의 지도를 벗어나 보조선이 인간의 사고의 결과로 나온 것임을 알도록 하는 좀 더 합리적인 지도가 이루어질 수 있는 교사의 지적 배경 또는 근거를 마련할 수 있을 것이다.

* 전남대학교
** 홍익대학교

II. 보조선과 관련된 두 가지 논의

(1) 유클리드 기하에서 비형식적 활동과 수학적 증명 사이에는 연결성이 있다.

실험이나 실측과 같은 비형식적 활동과 수학적 증명은 대비와 연결성이라는 양면성을 지니고 있다. 실험이나 실측과 같은 비형식적 활동과 수학적 증명 사이의 대비적인 성격은 중학교 수학 교과서에도 잘 드러나 있다. 교과서에는 실험이나 실측에 의하여 어떤 도형의 성질을 알아보는 것은 그 성질을 추측하거나 이해하는 데에는 좋은 방법이 될 수 있지만, 이것만으로 그 성질이 옳다고는 말할 수 없다는 점이 언급되어 있다. 즉 실험이나 실측이 정당화 수단으로 불충분함을 부각시킴으로써 수학적 증명의 필요성을 강조하고 있다. 수학적 성질의 발견 과정에서 관찰과 실험과 실측이 중요한 역할을 하지만 증명 수단으로는 불충분하고 불완전하기 때문에 논리적인 수학적 증명이 필요하다는 것이다. 실험과 실측이 수학적 정당화 수단으로 불충분한 것은 사실이며, 이러한 대비를 통해 수학적 증명의 필요성을 강조하는 것은 정당하다고 하겠다.

수업에서도 이와 같은 대비가 활용된다. 다음은 나귀수(1998)가 제시한 가상의 증명 수업의 일부이다. 이 예에서 교사는 학생들이 제시한 실험적 방법의 약점을 지적함으로써 실험과 실측이 수학적 정당화 수단으로 부족함을 드러내고 학생들로 하여금 수학적 증명의 필요성을 느끼도록 한다.

…

학생: 삼각형 ABC를 반으로 접어서 각 B와 각 C를 겹쳐 봐요.

학생: 각 B와 각 C의 크기를 각도기로 재어서 비교해봐요.

교사: 어떤 학생이 각 B와 C를 겹쳐 본다고 했는데, 선생님이 그린 이등변삼각형은 작으니까 오려서 반으로 접어서 각 A와 각 C를 겹쳐 볼 수 있겠지. 그런데 말이야, 우리 학교만큼 큰 이등변삼각형은 어떻게 접어 보죠? 그런 큰 삼각형은 실제로 접어볼 수 있을까요? 없을까요?

학생: 접어볼 수 없어요.

교사: 또한 아주 큰 삼각형은 각의 크기를 각도기로 재어 보는 것도 힘들겠죠? 또한 각도기가 항상 정확하다고 할 수도 없겠죠?

학생: 예.

교사: 그러니까, 실제로 접어보고 겹쳐보고 또 각도기로 측정해 보고 하는 것은 한계가 있을 수밖에 없겠죠?

학생: 예.

교사: 우리는 아직 각 B와 각 C가 같은가를 밝히지 않았기 때문에 각 B와 각 C가 같다라는 것은 우리의 추측에 불과한 거예요. 각 B와 각 C가 같다고 할 수 있어요? 없어요?

학생: 없어요.

교사: 왜죠?

학생: 각 B와 각 C가 같은지 틀린지를 아직 따져보지 않았으니까요.

교사: 이제, 각 B와 각 C가 정말 같은가를 선생님과 함께 한번 따져 봅시다. 따져 봐서 맞으면 참이고, 틀리면 거짓인 거예요.

학생: 예.

교사: 각 A의 이등분선을 그어 보겠어요. 각 A의 이등분선은 각 B와 각 C가 같은지 틀린지를 밝히기 위해 그어보는 보조선이에요…

아주 큰 이등변삼각형에 대해서는 접어보는 등의 실험과 실측을 해보기 어렵다는 것, 하나의 삼각형을 가지고 접어본 결과가 모든 삼각형에 대해 성립한다고 보장하기 어렵다는 것은, 실험과 실측의 한계로 자주 등장하는 내용이다. 여기서, 이와 대비하여 수학적 증명이 지닌 일반성이 학생들에게 어느 정도 호소력 있게 받아들여질지 생각해 볼 필요가 있다. 유클리드 논증 기하의 증명을 할 때 보통 증명 옆

에 그림을 그리게 된다. 그런데 아주 큰 이등변삼각형을 만들어 접어보기 어려운 것과 마찬가지로 증명 옆에 아주 큰 이등변삼각형을 그리고 각의 이등분선을 긋는 것도 역시 어렵다. 그림 옆에 쓰여 있는 증명의 진술은 모든 삼각형에 대해 적용되는 것이지만, 보기에 따라서는 증명 옆에 그려진 특수한 그림 하나에 대한 기술이라고 볼 수도 있다. 요컨대, 실험과 실측의 한계 중 모든 경우에 대해서 해볼 수 없다는 것이 수학적 증명에 대비되는 성격의 것으로 인식되기에 충분한 지도가 이루어지고 있는가의 문제이다.

'유클리드 기하에서 비형식적 활동과 수학적 증명 사이의 연결성'이라는 표현은 이러한 정당한 대비를 부정하는 것이 아니다. 수학적 정당화의 수단이라는 맥락에서 보면, 실험 및 실측과 증명은 대비되는 성격을 지니고 있다. 그러면 연결성이 의미하는 것은 무엇인가? 유클리드 원론의 여러 공준과 정리들이 '작도할 수 있다'는 것이다. 원론 제 1권의 공준 5개 가운데 처음 3개가 두 점을 잇는 선분을 작도하고(공준 1), 선분을 연장하고(공준 2), 원을 그릴 수 있다(공준 3)는 것이다. 정리 중에서도 제 1권의 정리 1 '주어진 선분 위에 정삼각형을 작도할 수 있다.'와 같이 실지로 자와 컴퍼스를 써서 작도할 수 있다는 것을 주장하는 여러 정리가 있다.

합동이나 각의 이등분선, 선분의 수직이등분선, 평행선에서 동위각이 같다, 엇각이 같다는 수학적 개념이나 정리도 이에 대응하는 실제적인 비형식적 활동을 가지고 있다.

아래 표의 왼쪽의 비형식적인 활동에 명확하게 나타나 있는 동적인 성격이 오른쪽의 수학적 표현에서는 드러나지 않고 상당히 정적인 표현으로 바뀌어 있다. 그도 그럴 것이 일상 세계에서는 도형 모양의 종이를 임의의 장소로 이동하거나 접거나 뒤집거나 자르거나 겹쳐보는 일을 할 수 있지만, 증명할 때 그려 놓은 도형에 대해서는 그런 일을 실제로 수행할 수 없다. 그래서 종이를 접는 대신 각의 이등분선이나 선분의 수직이등분선을 그을 수 있다고 말하고, 각을 이동시킨다고 하는 대신 평행선에서 동위각과 엇각이 같다고 말한다. 이런 수학적 표현들은 일상 세계에서 가능한 비형식적인 활동을 종이 위에 그려진 도형이라는 제약조건이 따르는 수학의 세계에서 변형된 형태로 수행하는 것을 표현한 것으로 볼 수 있다.

비형식적 활동	수학적 표현
두 도형에서 한 도형을 모양이나 크기를 바꾸지 않고 옮겨서 다른 한 도형에 겹쳐 보니 포개어진다.	합동
부채꼴 모양의 종이를 포개지도록 접는다.	각의 이등분선
선분의 양끝점이 만나면서 선분이 포개지도록 종이를 접는다.	선분의 수직이등분선
각을 평행이동 시켜도 각의 크기는 변하지 않는다.	평행선이 한 직선과 만날 때, 동위각이 같다.
각을 평행이동 시키고 180°회전해도 각의 크기는 변하지 않는다.	평행선이 한 직선과 만날 때, 엇각이 같다.

(2) 정의와 공리와 기지의 성질을 이용할 수 있도록 보조선을 긋는다.

연역적 증명은 증명하고자 하는 정리를 정의, 공리, 이미 증명된 성질들의 결합으로 환원하는 작업이다. 중학교 논증 기하의 정리를 증명할 때, 주로 이용되는 일종의 공리에 해당하는 것으로 삼각형의 합동, 닮음 조건이나 피타고라스의 정리와 같은 삼각형의 성질 그리고 엇각이 같다 동위각이 같다와 같은 평행선의 성질이 있다. 중학교 논증 기하의 많은 문제가, 주어진 문제를 이 두 성질을 이용할 수 있는 형태로 변형시킬 수 있는가를 묻고 있는 것이

다. 그러므로 중학교 논증 기하에서 보조선을 긋는 일반 원칙 중 하나는 삼각형이나 평행선이 만들어지도록 긋는 것이다.

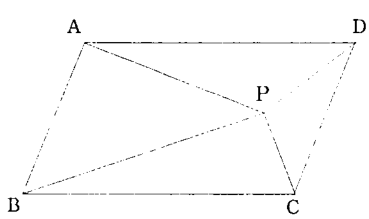
앞에서 언급한 '유클리드 기하에서 비형식적 활동과 수학적 증명 사이의 연결성'은 수학 밖으로 나가 보조선을 낳은 맥락을 찾아본 것이라면 '삼각형이나 평행선이 만들어지도록 긋는다'는 것은 수학 체계 내에서 보조선을 긋는 이유에 해당한다. 유클리드 기하에서 비형식적 활동과 수학적 활동 사이의 연결성은 일반 경험 세계와 멀리 떨어져 있지 않은 기본적인 정리의 증명과 같은 문제에서 보조선을 긋는 이유를 설명하는 데 주로 도움이 된다면, 삼각형이나 평행선이 만들어지도록 긋는다는 것은 이는 물론 좀 더 복잡한 정리의 증명 문제에도 적용되는 일반적인 성격의 것이다. (다음 III 장의 몇 가지 예에서도 '삼각형이나 평행선이 만들어지도록 긋는다'는 원칙이 모두 적용되므로 각 예에서 이에 대해 별도로 언급하지는 않겠다.)

다음 문제를 생각해 보자.

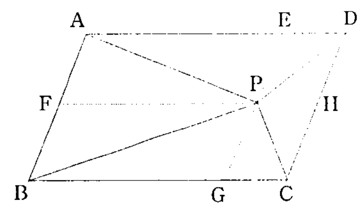
평행사변형 ABCD의 내부에 한 점 P를 잡으면,

$\triangle ABP + \triangle CDP = \frac{1}{2}\square ABCD$

임을 증명하여라.

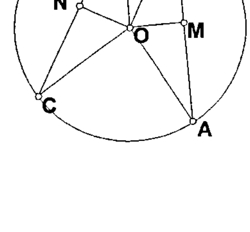


이 문제를 풀 때 어떤 방향으로 보조선을 그을 생각을 해 나가야 할까? 문제에 나와 있는 점들을 가지고 문제 해결에 도움이 될 듯한 삼각형이나 평행선을 그려보는 것이 한 가지 방향이다.



이런 방향으로 가면서 문제에 있는 점들로 만들 수 있는 삼각형이나 평행선을 생각하면 보조선 FH와 EG를 긋고 싶은 생각이 떠오른다. 이 문제는 보조선 FH와 EG를 그어 넓이가 같은 삼각형들을 찾으면 쉽게 증명할 수 있다. (점 P의 위치를 극단적인 경우인 D로부터, H, P의 위치로 옮겨가면서 보조선 EG와 FH를 그어야겠다는 생각을 얻을 수도 있다.)

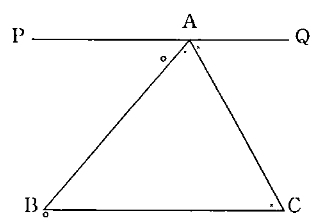
한편 가정과 결론 중 결론에서부터 시작해 추론하는 분석법도 적절한 삼각형이나 평행선을 만드는 보조선을 긋는 데 도움이 된다. 분석법은 역행적 추론이라고도 불리는 것으로, 증명하고자 하는 명제가 이미 성립하는 것처럼 가정하고 그 명제가 선행하는 어떤 명제로부터 유도될 수 있는가를 묻고 다시 그 선행자는 무엇인가를 묻는 방식으로 계속하여 충분조건을 찾아 이미 참임이 드러난 명제에 도달하는 방법이다. 분석의 과정을 거꾸로 하는 과정을 종합이라 하며 이는 가정에서 결론을 유도하는 연역적인 증명에 해당한다고 볼 수 있다.



예를 들어 “한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다”는 정리를 생각해 보자. 이 때 두 현의 길이가 같다는 결론에서 출발하여, 결론이 성립하려면 두 현 AB, CD 또는 길이가 두 현의 길이의 반인 선분 AM과 DN을 각각 한 변으로 하는 적당한 두 삼각형이 합동이면 된다는 분석을 통해 선분 OA, OB, OC, OD와 같은 선을 보조선으로 그을 생각을 할 수 있다.

III. 몇 가지 예

1. 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180° 이다.

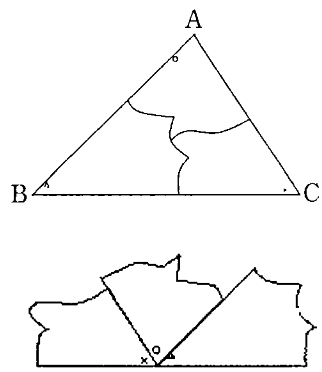


증명)

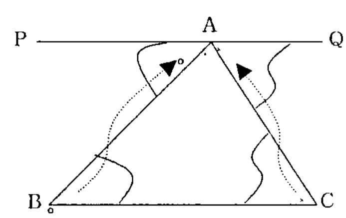
위의 그림과 같이 삼각형 ABC의 꼭지점 A를 지나 밑변 BC에 평행한 직선 PQ를 그으면, ∠B=∠PAB, ∠C=∠QAC이다. 따라서 다음이 성립한다.

∠A+∠B+∠C = ∠A+∠PAB+∠QAC = ∠PAQ = 180°

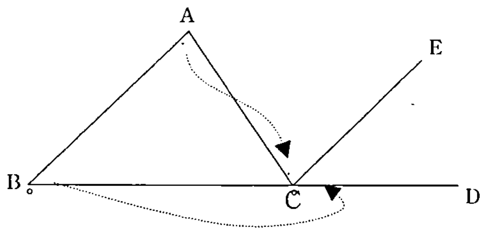
삼각형 ABC의 꼭지점 A를 지나 밑변 BC에 평행한 직선 PQ가 보조선이다. 이 보조선은 무슨 생각으로부터 나왔을까? 아래 그림은 실제로 삼각형 모양의 종이에서 세 귀퉁이를 오려 제 3의 장소에 모아 붙여 세 각의 합의 크기를 확인하는 것으로, 현행 중학교 교과서들에도 제시되어 있는 것이다.



그런데 수학적 증명에서는 이렇게 각을 실지로 오려서 임의의 다른 장소에 모아 붙여보는 일을 할 수 없고, 또 각을 옮길 때도 ‘제약’이 따른다. 증명을 위해 그린 도형에서 각을 옮길 수 있는 합법적인 위치로는 동위각이나 엇각의 위치 또는 이를 합성한 위치가 있다. 결국 이런 위치로 각을 옮겨 모아 보려면 평행선을 적당히 그어주어야 한다. 위의 증명에서 그은 보조선 PQ는 다름 아니라 “그려 놓은 평면 도형 위에서 각을 옮겨 모아 붙이려는” 생각에서 나온 것이다.



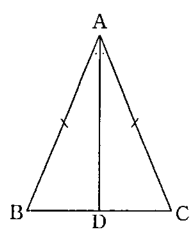
위 정리를 다음과 같이 보조선 CD와 CE를 그어 증명할 수도 있다. “한 곳에 모아 붙여본다”는 아이디어는 동일하며 각을 옮겨 모아보는 위치와 붙이는 방법이 위와 조금 달라졌을 뿐이다.



요컨대, 위의 두 보조선을 긋게 된 이유를 설명하는 것은 가능하다. 그것들은 각을 옮겨 모아 붙여보는 작업을 그려진 도형 위라는 제약 조건하에서 수행하기 위해 그은 것이다. 이렇게 보면 위의 두 증명은 종이로 만든 삼각형을 잘라서 세 각을 모아 붙여보는 비형식적인 활동을 단지 종이 위에 그려진 도형에 대해 수행한 것으로 볼 수 있다. 각을 잘라 내어 한 곳에 붙여보아 확인하는 실험·실측적인 비형식적 활동은 수학적 정당화 수단으로는 불충분하지만, 이를 그에 대응하는 수학적인 표현으로 고쳐 쓰면 수학적인 증명으로 연결된다.

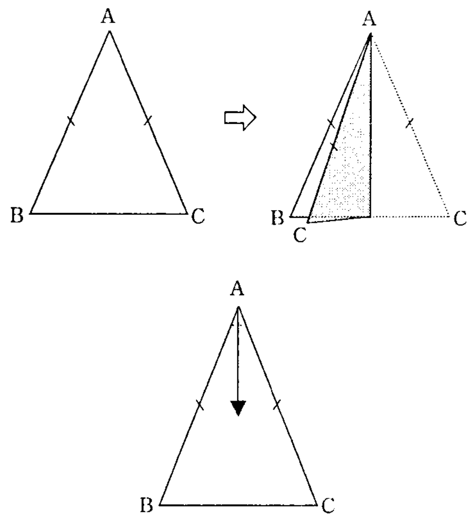
2. 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.

증명 1)

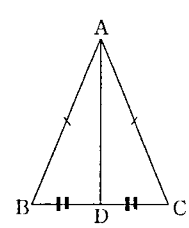


오른쪽 그림과 같이 ∠A의 이등분선과 변 BC와의 교점을 D라고 하자.
△ABD와 △ACD에서
$\overline{AB}=\overline{AC}$ (가정) ………①
∠BAD=∠CAD ………②
$\overline{AD}$는 공통인 변 ……③
①, ②, ③에서 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 각각 같으므로 △ABD≡△ACD (SAS 합동)이다. 따라서 ∠B=∠C이다.

이 증명에 대응하는 비형식적 활동은 무엇일까? 일상 세계에서 ∠B=∠C인지 알아보려면 어떻게 하는가? 위의 꼭지점 A쪽부터 양쪽 변이 만나도록 종이를 접어나가 아래에 가서 B와 C 쪽이 겹쳐지는지 확인하는 것이 한 방법이다. ∠A의 이등분선이라는 보조선은 삼각형을 위쪽부터 양쪽이 만나게 접어나가는 비형식적 활동에 대응하는 수학적 표현이다.

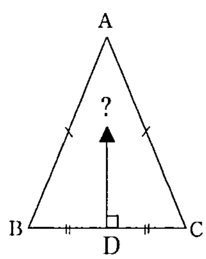


위쪽에서부터 아래쪽으로 접어나가지 않고 위의 꼭지점과 아래 변의 중점을 먼저 잡고 그 두 지점을 연결하는 선을 따라 접어 겹쳐지는지 보는 것도 자연스럽게 생각할 수 있는 비형식적 활동이다. 이에 대응하는 수학적인 표현은 '꼭지점 A와 선분 BC의 중점을 연결하는 선'을 보조선으로 긋고, 양쪽 삼각형이 합동(SSS)임을 보이는 것이다.



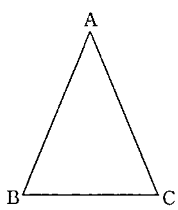
∠B=∠C인지 확인하는 일상의 다른 방법으로 무엇을 떠올릴 수 있을까? 위에서부터 접지

않고 아래에서부터 접어 올라가며 알아보는 것도 생각할 수 있다. 이 활동에 대응하는 수학적 표현은 선분 BC의 수직이등분선을 그어 올라가는 것이다. 그런데 이 선이 반드시 꼭지점 A를 지나갈 것인지가, ∠A의 이등분선이 선분 BC와 만난다는 것만큼 자명해 보이지 않는다는 문제가 있다.[1)]



위 정리는 다음과 같이 증명할 수도 있다.

증명 2)
삼각형ABC와 삼각형 ACB에서
$\overline{AB}=\overline{AC}$ (가정) ……………………①
$\overline{AC}=\overline{AB}$ (가정) ……………………②

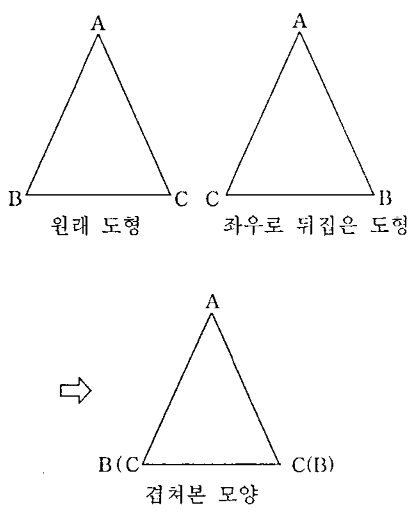


∠BAC=∠CAB (공통인 각) ……③

①, ②, ③에서 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 각각 같으므로△ABC≡△ACB (SAS 합동)이다. 따라서 ∠B=∠C 이다.

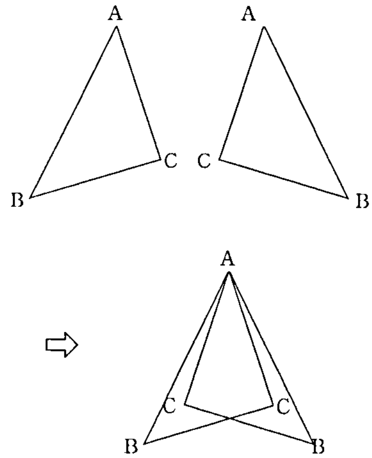
이 증명에 보조선은 등장하지 않지만, 이 증명에 대응하는 비형식적인 활동을 생각해 보자. 휘시바인(Fishbein, 1987)은 학생들이 이 증명을 어려워하는 이유로 하나의 삼각형 그림을 보면서 그것을 삼각형 ABC와 삼각형 ACB의 양쪽으로 생각하기가 어려운 데 있다고 말하고 이를 '복제 장애(duplication obstacle)'라고 한 바 있다.

그런데 위 증명을 이해하기 어려운 이유를 다른 맥락에서 생각해 볼 수 있다. 그것은 위 증명에 해당하는 일상적인 비형식적 활동을 모르기 때문에 위의 증명이 어렵게 느껴질 수 있다는 것이다. 위 증명에 대응하는 일상적인 비형식적 활동은 "똑같은 삼각형을 하나 더 만들어 그것을 원래 삼각형에 뒤집어 붙여서 포개어지는지 보는 것"이다. 뒤집지 않고 붙이면 모든 도형이 언제나 포개어지지만, 뒤집어 붙이면 좌우대칭인 도형이 아니면 포개지지 않는다. 위의 증명은 "똑같은 삼각형을 하나 더 만들어 뒤집어 붙여서 포개지는지 보자."라는 비형식적 활동의 수학적 표현일 뿐이며, 위의 증명이 어렵다면 그것은 "똑같은 삼각형을 뒤집어 원래 삼각형과 포개어지는지 보면 된다."는 비형식적인 활동이 그 배경에 있음을 모르기 때문이다.



<이등변 삼각형과 같은 대칭도형의 경우>

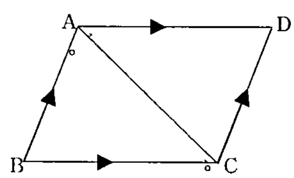
1) 지금까지 위에서 그은 세 선은 결과적으로 같은 선분이지만, 각각 ∠A의 이등분선, 꼭지점 A와 선분 BC의 중점을 연결한 선, 선분 BC의 수직이등분선이라는 다른 성질의 선이며, 따라서 증명에서 사용할 수 있는 성질도 서로 다르다.



<비이등변삼각형과 같은 비대칭도형의 경우>

3. 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 대각의 크기가 각각 같다.

대변의 길이에 관한 증명)



위의 그림과 같이 대각선AC를 그으면, △ABC와△CDA에서

$\overline{AB}$ $\overline{DC}$ 이므로∠BAC=∠DCA(엇각)……①

$\overline{AD}$ $\overline{BC}$ 이므로 ∠ACB=∠CAD(엇각)…②

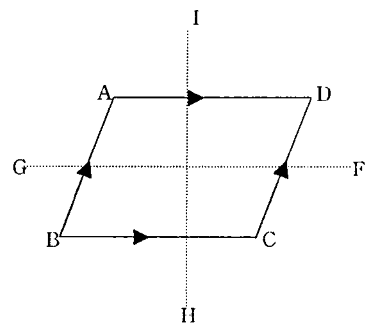
$\overline{AC}$는 공통인 변 ……………………………③

①, ②, ③에서△ABC≡△CDA (ASA 합동)이다.

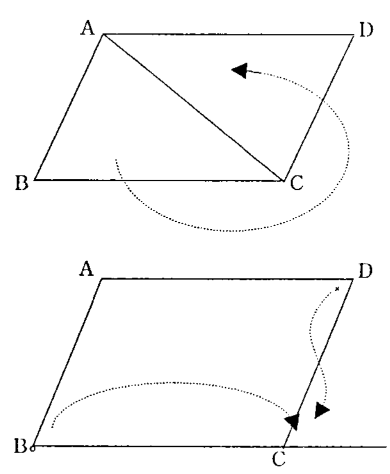
따라서 $\overline{AB}=\overline{DC}$,$\overline{AD}=\overline{BC}$ 이다.

대변의 길이가 같은지를 확인하는 비형식적인 방법의 하나는 종이로 만든 사각형을 대각선을 따라 잘라 두 개의 삼각형으로 나누고 그것을 적당히 돌리거나 뒤집어 겹쳐보아 확인하는 것이다. 위의 증명은 이를 그려진 도형 위에서 행할 수 있는 수학적 표현으로 바꾸어 쓴 것이며 보조선은 가위로 자르는 선에 해당한다.

위와 같이 AC 선을 따라 자르지 않고 아래 그림의 FG나 HI 선을 따라 잘라서 적당히 겹쳐 보아 대변의 길이를 확인하는 것도 해볼 수 있다. 일상 세계에서 이루어지는 비형식적인 수준에서 보면 이 활동은 두 삼각형으로 잘라 겹쳐보는 위의 활동보다 어렵지 않다. 그러나 이를 수학적인 표현으로 고쳐 쓸 경우 사각형의 무게중심을 지나면서 선분 AD, BC와 수직인 선을 보조선으로 그어야 하고, 그 다음에 (합동 조건이 알려져 있는 삼각형이 아닌) 사각형의 합동을 다루어야 한다는 점에서 앞보다 복잡해진다.

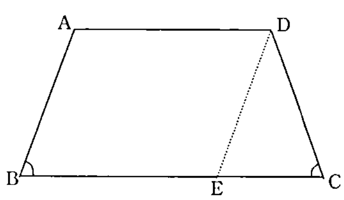


대각의 크기가 같다는 것은 다음 두 그림 중 어느 것을 이용해도 증명할 수 있다.



처음 그림과 관련된 일상의 비형식적 아이디어는 위의 대변의 길이에 관한 증명과 본질상 같은 것이다. 둘째 그림은 삼각형의 세 내각의 합의 크기를 확인할 때와 같이 ∠B와 ∠D를 적당한 제 3의 장소로 옮겨 그 크기를 비교하려는 것이다. 그려진 그림 상에서 두 각을 옮길 위치는 평행선을 이용한 엇각이나 동위각의 위치이다. ∠C는 바로 그 위치이며, 보조선인 'BC의 연장선'은 이런 생각으로부터 나온 것이다.

4. 사다리꼴 ABCD에서 ∠B와 ∠C의 크기가 같을 때 $\overline{AB}=\overline{DC}$이다.



증명)

변AB에 평행하게$\overline{DE}$를 그으면∠B=∠DEC (동위각)

그런데 가정에서 ∠B=∠C이므로

∠DEC=∠C

따라서△DEC는 이등변삼각형이므로

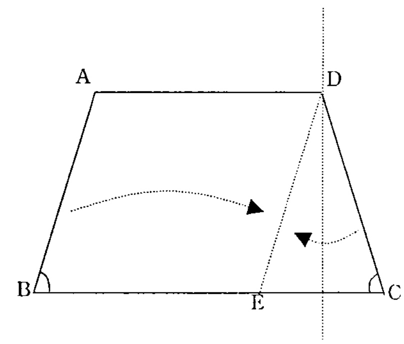
$\overline{DC}=\overline{DE}$ ………… ①

이다. 또□ABED는 평행사변형이므로

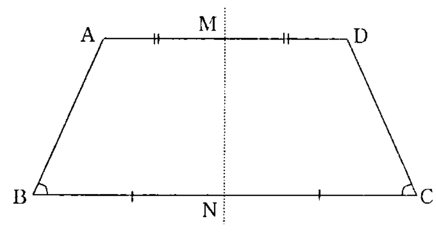
$\overline{AB}=\overline{DE}$ ………… ②

①, ②에서$\overline{AB}=\overline{DC}$ 이다.

이 증명에서 사용된 보조선 DE는 선분 AB와 CD를 옮겨 비교하는 제 3의 장소에 해당한다. 삼각형의 세 내각의 합에서 평행선을 이용해 각의 위치를 옮겼듯이 여기서는 선분을 평행이동이나 대칭이동을 이용해 옮기는 것이다. 이 두 선분을 어디에 옮겨 비교할 수 있을지를 생각할 때 떠오르는 유력한 장소 중 하나가 바로 선분 DE의 위치이다.

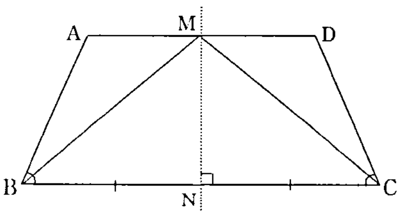


이 외에 두 선분의 길이를 비교하는 데 생각할 수 있는 일상의 방법으로 가위로 사다리꼴을 세로로 반으로 잘라 겹쳐보는 방법도 생각할 수 있다. 이 활동에 대응하는 보조선은 아래 그림의 '변 AD의 중점과 변 BC의 중점을 잇는 직선'이다. 그런데 이 경우 삼각형보다 복잡한 사각형의 합동을 다루어야 하고, 또 직선 MN이 변 AD, 변 BC와 수직으로 만난다는 것도 그렇게 자명하지는 않으므로, 가위로 잘라 비교하는 비형식적 활동과는 달리 좀 어려워진다.

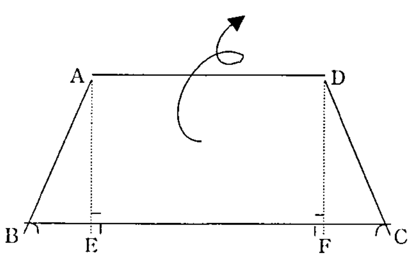


주어진 사다리꼴을 반으로 자르는 방법으로, 위의 방법 이외에도, 밑변의 가운데에서 수직으로 잘라 올라가는 방법도 있다. 이에 대응하는 보조선은 아래 그림의 밑변 BC의 수직이등분선이다. 이 때도 사각형의 합동을 다루어야 하는 단점이 있다. 그러나 이 방법으로 시작해도 증명이 불가능한 것은 아니다. 사각형의 합

동을 다루기 어려우므로, 다시 사각형을 삼각형으로 분할한다. 이에 대응하는 보조선은 선분 MB와 MC이다. 그러면 삼각형 MBN과 삼각형 MCN이 합동임을 보일 수 있고, 다시 삼각형 AMB와 삼각형 .DMC가 합동임을 보일 수 있다.



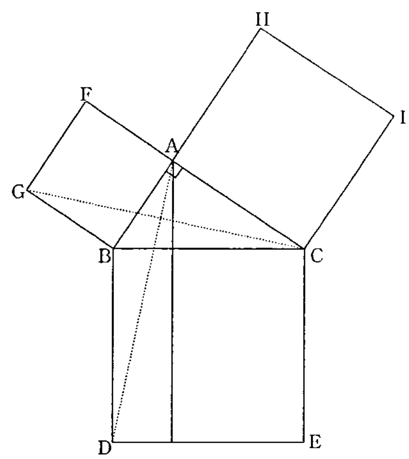
다음과 같은 방법도 생각할 수 있을 것이다. 문제가 되는 것은 양쪽 끝에 있는 두 변이므로, 양쪽 삼각형을 가위로 오려 내고 가운데 사각형은 빼버리고 겹쳐보는 것이다. 아래 그림의 보조선 AE와 DF는 이 활동에 대응하며, 양쪽 끝의 두 삼각형이 합동임을 보이면 된다.



위의 예들은 막연히 보조선이나 증명의 아이디어가 떠오르기를 기다리기보다 먼저 비형식적인 활동 수준에서 그것을 어떤 식으로 해볼 수 있을까를 구체화하는 것이 도움이 될 수 있음을 시사한다. 이것이 되었다면 그 다음으로 그 활동에 대응하는 수학적 표현을 만들어 본다. 이 사다리꼴 문제의 첫 번째나 네 번째 경우처럼 비형식적인 활동을 그에 대응하는 수학적 표현으로 쉽게 바꾸어 진행할 수 있는 경우가 있고, 두 번째 세 번째 경우처럼 일상 세계에서 비형식적인 활동의 수행은 어렵지 않지만 그것을 수학적 표현으로 바꾸어 진행하기는 다소 어려운 경우가 있다. 이런 것을 확인하고 적절한 비형식적 활동과 그에 대응하는 수학적 표현을 선택하는 것이 마지막에 할 일이다.

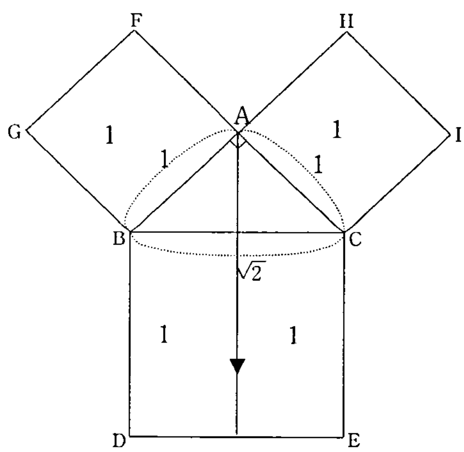
5. 피타고라스 정리의 유클리드 증명법

유클리드 원론에서 피타고라스 정리는 아래 그림을 이용하여 증명된다. 이 증명에서 결정적인 첫 단계는 꼭지점 A에서 변 BC에 수직이 되도록 밑으로 보조선을 그어 큰 정사각형을 두 개의 직사각형으로 나누는 것이다.

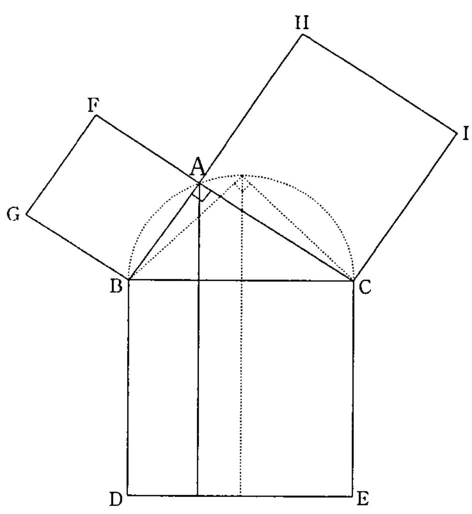


피타고라스 또는 유클리드는 어떻게 이 밑으로 긋는 보조선을 그을 생각을 하게 되었을까? 피타고라스 학파가 $\sqrt{2}$를 발견하였다는 사실로부터 가상의 스토리를 구성할 수 있다. $\sqrt{2}$의 발견에 사용된 세 변의 길이가 1, 1,$\sqrt{2}$인 직각삼각형을 생각하자. 이 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 1, 1, 2 이므로 아래 큰 정사각형을 반으로 나누어 생기는 직사각형의 넓이는 각각 1로서 왼쪽 위와

아래쪽 위에 있는 작은 정사각형의 넓이 1과 같게 된다는 것을 곧 짐작할 수 있다. 요컨대, 1, 1, $\sqrt{2}$로 된 직각삼각형으로 된 그림에서는 꼭지점 A에서 아래로 수선을 그을 생각을 하는 것이 의외로 자연스럽다.



⇩



이 그림에서 각 A가 90°를 유지하도록 A를 원주 위에서 왼쪽으로 이동시키면 아래로 내려 그은 선도 따라 이동하게 되며 왼쪽 위쪽의 정사각형의 넓이는 감소하고 오른쪽 위쪽의 정사각형의 넓이는 늘어나고, 아래쪽 두 개의 직사각형의 넓이도 왼쪽은 감소하고 오른쪽은 늘어나게 된다. 개연적으로 정사각형과 직사각형들에서 늘어나고 감소하는 양들이 서로 같을 것이라는 짐작을 하는 것도 자연스럽다.

실제로 피타고라스 학파나 유클리드가 이와 똑같은 생각을 하고 보조선을 그었는지 아니면 이와는 다른 맥락이 있었는지는 중요하지 않다. 여기서 중요한 것은 위의 맥락이 증명에 등장한 보조선을 그을 생각에 이르게 된, 설명 가능한 맥락이라는 것이다.

IV. 결어

학생들에게 수학적 사고를 가르치기 위해서는 먼저 가르치고자 하는 사고를 발견하는 것이 필요하다. 유클리드 논증 기하를 가르칠 때 유클리드가 원론을 쓰기 위해서 했던 사고를 알아내지 못하면 원론의 내용을 있는 대로 재진술하고 학생들로 하여금 그 내용을 기억하도록 하는 교수를 하게 될 가능성이 높아진다. 예컨대, 유클리드 원론에 나오는 피타고라스 정리의 증명을 가르칠 때 꼭지점 A에서 아래로 내려그은 보조선을 낳은 사고를 알아내지 못하면 못하는 만큼, “그냥 이렇게 선을 그으면”이라고 말할 수밖에 없다.

중학교 논증 기하에서 다루는 초보적인 문제들 중에는 도형을 접거나 겹치거나 잘라 붙이는 등의 다양한 비형식적인 활동을 생각하고 각각의 활동에 대응하는 수학적 표현을 찾아봄으로써 적절한 보조선을 그을 수 있는 경우가 많다. 이것은 수학 외적인 차원에서 보조선을 긋는 이유가 된다. 수학 내적인 차원에서 본다면, 증명은 정리를 이전의 입증된 것이나 가정된 것들의 결합으로 바꾸는 것이므로, 이전의

것을 이용할 수 있도록 보조선을 그어야 한다. 중학교 논증 기하에서 이 이전의 것에 해당하는 것은 그렇게 많지 않으며, 대표적인 것으로 삼각형의 성질이나 평행선의 성질이 있다. 그러므로 많은 경우 보조선은 삼각형이나 평행선이 나오도록 그으면 된다.

본 고의 의도는, 특정한 보조선을 그을 생각을 어떻게 하게 되었는지에 대한 지도 없이 일단 보조선을 그렇게 그으면 증명이 이러이러하게 된다는 식의 수업에 이의를 제기하고, 보조선을 긋는 이유를 베일에 감추어 두지 말고 드러내어 인간의 사고의 산물로 지도하여야 하며 이를 위해서는 먼저 보조선을 긋게 된 사고의 맥락을 밝혀 내는 일이 필요하고 또한 가능하다는 것을 몇 가지 예를 통해 보이는 데 있다. 이에 대하여 '이와 같은 방식으로 밝혀 낸 맥락을 수업 장면에서 구체적으로 어떻게 사용해야 할 것인지에 대한 세세한 방법과 그 효과를 제시하지 않으면 안된다'는 견해가 있을 수 있다. 그러나 이를 구체적으로 수업 장면에 어떻게 활용할 것인가는 각각의 교사가 자신이 지닌 교사로서의 전문성을 사용해 결정할 문제이며, 최선의 정해진 한 가지 방법이 있는 문제도 아니다. 어떤 교사는 이를테면 본 고에서 제시한 예제를 학생들에게 가르쳐 줄 때 각 문제에서 특정한 보조선을 그은 맥락을 학생들에게 설명해 주는 방식을 취할 수도 있을 것이고, 어떤 교사는 설명식 수업을 피하고 비형식적인 활동을 학생들이 직접 수행하게 하면서 스스로 특정한 보조선을 발견하도록 수업을 진행할 수도 있을 것이다. 이 둘 중 어느 방법으로 보조선을 지도하는 것이 좋은가와 같은 문제는 본 고의 관심이 아니며, 그다지 본질적인 문제도 아니다. 전문가로서의 수학 교사라면, 본 고에서 제시한 아이디어를 이해한 다음 본 고에서 다루지 않은 다른 예에서 특정한 보조선을 그은 맥락을 스스로 탐색해 낼 수 있을 것이며, 이러한 탐색 결과를 자신이 가르치는 학생들에게 적합한 방법으로 사용할 수 있을 것이다. 이러한 작업을 할 수 있는 전문성 없이 다만 완성된 채로 주어지는 교수 학습 자료의 사용자 및 전달자 역할 밖에 수행할 수 없는 교사는 전문가로서의 수학 교사가 아니다.

참고문헌

김호우 외 (1996). 중학교 수학 1. 지학사.

김연식, 김흥기 (2000). 중학교 수학 2. 두산.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

서동엽 (1999). 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 -중학교 수학을 중심으로-. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Davis, P. J. & Hersh, R. 저, 양영오, 허민 (역) (1995). 수학적 경험·상. 경문사.

Fishbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Heath, T. H. (1956). The thirteen books of Euclid's Elements, vol. 1. New York: Dover Publications, Inc.

A Study on Teaching How to Draw Auxiliary Lines in Geometry Proof

Jaehoon Yim (Chonnam National University)
Kyungmee Park (Hongik University)

The purpose of this study is to investigate the reasons and backgrounds of drawing auxiliary lines in the proof of geometry. In most of proofs in geometry, drawing auxiliary lines provide important clues, thus they play a key role in deductive proof. However, many students tend to have difficulties of drawing auxiliary lines because there seems to be no general rule to produce auxiliary lines. To alleviate such difficulties, informal activities need to be encouraged prior to draw auxiliary lines in rigorous deductive proof.

Informal activities are considered to be contrasting to deductive proof, but at the same time they are connected to deductive proof because each informal activity can be mathematically represented. For example, the informal activities such as fliping and superimposing can be mathematically translated into bisecting line and congruence. To elaborate this idea, some examples from the middle school mathematics were chosen to corroborate the relation between informal activities and deductive proof. This attempt could be a stepping stone to the discussion of how to teach auxiliary lines and deductive reasoning.