

대변형 효과를 고려한 비등방성 원통형 셸의 거동에 관한 연구

A Study on Behavior of Anisotropic Circular Cylindrical Shell including Large Deformation Effects

천 경 식¹⁾ · 손 병 직²⁾ · 장 석 윤³⁾

Chun, Kyoung Sik · Son, Byung Jik · Chang, Suk Yoon

요 약: 구조물이 거대해지고 복잡해지면서 미소변형을 전제로 한 선형이론으로는 해석이 불가능한 대변형 및 비선형 거동이 발생하는 경우가 많아지고 있다. 또한 고성능 컴퓨터의 등장과 다양한 수치해석 기법의 개발 등으로 보다 엄격한 설계기준에 따른 구조의 최적화 설계가 절실히 요구되고 있다. 그로 인해 선형 영역내에서 한정되었던 구조공학적인 문제를 비선형 영역까지 확대시켜 구조물의 거동을 보다 정확히 분석하고, 예상 가능한 문제점을 사전에 파악하여 효율적이고 경제적인 최적의 구조물을 설계해야 한다. 본 연구에서는 비등방성 원통형 셸 구조물의 기하학적 비선형 문제를 해결하였다. 원통형 셸의 반경방향 길이와 원통방향의 길이비인 형상비 변화, 부분 원통형 셸의 중심각 변화, 화이버 각도 변화, 적층수와 배열조건 변화 등의 다양한 조건에 따라 비등방성 원통형 셸 구조의 기하학적 비선형 거동특성을 분석하였다.

ABSTRACT: Nonlinear behavior and large deformation cannot be analyzed using techniques based on linear theory. Nonetheless, they are emerging as gradually huge and complex structures. In addition, the optimum design of structure is necessary in the development of high-performance computation and numerical methods, as well as stricter design-criterion. Therefore, the structural problems in engineering that are limited to the linear region must be extended to the nonlinear region. Likewise, structural behavior must be accurately analyzed. In turn, this requires considering the expected problems beforehand. Only then can an efficient, economical, and optimized structure be designed. This paper presents the solution of the geometrical nonlinear problem of anisotropic cylindrical shell. The characteristics of the geometrical nonlinear behavior of anisotropic circular cylindrical shells may vary according to several causes, e.g., change of fibers, curvature in the circumferential direction, subtended angle, aspect, etc. Parametric studies were conducted to determine the effect of factors on the large deflection behavior of laminated shells, with interesting observations.

핵심용어: 비등방성, 원통형 셸, 반복법, 대변형, 기하학적 비선형, 유한차분법

KEYWORDS: Anisotropic, Cylindrical shells, Picard method, Large deformation, Geometrically nonlinear Finite difference method

1. 서론

구조물의 거동은 기하학적인 형상과 재료의 특성에 의한 비선형성에 크게 영향을 받을 수 있다. 비선형 해석에 기여하는 요인으로는 대변형 효과를 고려한 기하학적 비선형과 비탄성에 의한 재료의 비선형으로 나눌 수가 있다. 셸 구조물은 면내거동으로 외부하중에 저항하므로 면외거동이 지배하는 다른 구조형식보다 공학적으로 우수한 형식이다. 그러한 구조물은 재료 비선형 거동을 보이기 전에 탄성 불안정으로 파괴되

는 경향을 나타낸다. 또한 구조물이 거대해지고, 복잡해지면서 미소변형을 전제로 한 선형이론만으로 해석이 불가능한 대변형 및 비선형 거동이 발생하는 경우가 많아지고 있으며, 고성능 컴퓨터의 등장과 다양한 수치해석 기법의 개발 등으로 보다 엄격한 설계기준에 따른 구조물의 최적화 설계가 요구되고 있다. 그로 인해 선형 영역내에서 한정되었던 구조 공학적인 문제를 비선형 영역까지 확대시켜 거동을 보다 정확히 분석하고, 예상 가능한 문제점을 사전에 파악하여 효율적이고 경제적인 최적의 구조물을 설계해야 한다.

1) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정

2) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 박사수료

3) 정회원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

본 논문에 대한 토의를 2003년 2월 28일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

셸의 연구는 Kirchhoff-Love의 가정에 근거한 고전적 이론을 시작으로 Donnell, Sanders⁽³⁾ 등에 의해 얇은 탄성 셸의 선형 이론이, Flugge 등에 의해 두꺼운 셸 이론이 제안되었다. 그 후 전단변형 효과를 고려한 새로운 방식의⁽⁴⁾ 제안을 시작으로 Vasikev, Vinson는 복합재료에서는 구조평면 내에서 탄성계수가 전단탄성계수보다 충분히 크므로 직교이방성 적층 원통형 셸의 연구에서 전단변형이 포함되어야 한다는 이론을 정립하고, 휨과 전단변형을 갖는 복합재료로 구성된 구형 셸에 관한 상세한 연구를 하였다. Novozhilov⁽⁵⁾는 셸의 대변형 이론을 제시, Sanders⁽⁶⁾와 Koiter⁽⁷⁾에 의해 확립되었다. Stein⁽⁸⁾ 그리고 Dennis, Palazotto⁽⁹⁾는 복합 적층 셸의 기하학적 비선형 이론을 발전시켰다.

본 연구는 자유경계와 고정경계를 갖는 비등방성 원통형 셸을 해석모델로, 하중조건은 반경방향으로 등분포 하중을 재하시켜 비선형 거동 특성을 분석하고자 한다. 고차항을 고려한 비선형 변형률-변위 관계를 제시하고, 기본방정식과 탄성강도 및 기하학적 강성매트릭스를 유도하여 수치해석기법 중 하나인 유한차분법을 이용하여 프로그램을 작성하였다. 대변형 이론에 의한 기하학적 비선형 문제를 해결하기 위해 반복법(Iteration technique)을 사용하여 해석하였다. 본 논문의 해석절차에 의한 해의 정확성을 검증하였으며, 적층수, 배열조건 및 형상비(Aspect ratio), 중심각 변화 그리고 화이버 각도 변화가 원통형 셸의 비선형 거동특성에 미치는 영향을 분석하였다.

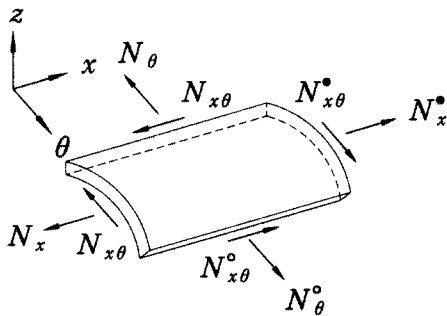


그림 1. 셸의 미소요소에 작용하는 면내력

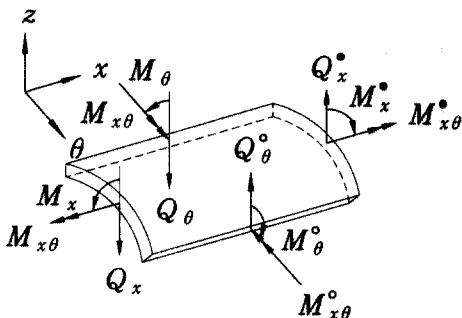


그림 2. 셸의 미소요소에 작용하는 면내력

2. 기본 이론

2.1 비선형 기본 방정식

셸의 해석은 3차원 탄성체로 가정하여 해석하는 것이 일반적이거나, 중간 두께를 갖는 셸은 3차원 탄성체의 특성과 얇은 셸의 역학적인 특성이 공존하므로 전단변형을 고려한 셸의 해석이 요구된다. 본 연구의 해석모델은 비등방성 원통형 셸로 Mindlin 이론을 이용하여 전단변형을 고려하였다. 즉, Kirchhoff의 가정에 의한 셸의 중립면에 수직인 단면이 변형 후에도 중립면에 수직하지만 전단변형 효과를 고려하면 중립면에 수직일 필요는 없다. 본 장에서는 먼저 셸 요소의 기하학적 관계를 제시하고, 본 연구의 해석모델인 원통형 셸에 대하여 고차항을 고려한 비선형 이론을 바탕으로 전개하고자 한다.

그림 1과 2는 본 연구에서 해석하고자 하는 원통형 셸의 미소요소로, 해석모델의 좌표계와 합응력을 나타낸 것이다. 여기서 원통방향을 x축, 원주방향을 theta축, 반경방향을 z축으로 설정하였다. 미소변형 이론에 의하여 전단변형 효과를 고려한 3차원 탄성체의 변형률-변위 관계식에서 고차항을 고려하고, 셸의 수직인 변형률을 무시하면 다음 식(1)과 같은 변형률-변위 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \epsilon_\theta &= \epsilon_\theta^0 + z\kappa_\theta \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta x} &= \gamma_{\theta x}^0 + z\chi_{\theta x} \\ \gamma_{\theta z} &= \gamma_{\theta z}^0, \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 \end{aligned}$$

여기서, 중립면의 변형률과 z에 비례하는 곡률은 식(2)와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= u_{x,x}^0 + (u_{z,x}^0)^2/2 \\ \epsilon_\theta^0 &= u_{\theta,\theta}^0/R + u_z^0/R + (u_{z,\theta}^0/R)^2/2 \\ \gamma_{\theta x}^0 &= u_{\theta,x}^0 + u_{x,\theta}^0/R + u_{z,x}^0/R \cdot u_{z,\theta}^0 \\ \gamma_{xz}^0 &= \beta_x + u_{z,x}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 &= \beta_\theta + (u_{z,\theta}^0 - u_\theta^0)/R \\ \chi_x &= \beta_{x,x} \\ \chi_\theta &= \beta_{\theta,\theta}/R \\ \chi_{\theta x} &= \beta_{\theta,x} + \beta_{x,\theta}/R \end{aligned} \tag{2}$$

셸 요소의 임의 단면에 작용하는 내력은 임의의 층에 작용하는 응력을 셸의 두께에 대하여 적분함으로써 얻을 수 있다. 여기에 탄성법칙을 적용하면 원통형 셸 구조의 미소요소에 대한 합응력-변위 관계식을 구할 수 있다. 비등방성 원통형 셸의 미소요소에 정의된 합응력에 의한 기하학적 비선형이 고려된 평형방정식은 최소 포텐셜 에너지 원리에 의해 구할 수 있으며, 식(3)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} / R &= -q_x \\
 N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} / R + Q_{\theta} / R &= -q_{\theta} \\
 Q_{x,x} + Q_{\theta,\theta} / R - N_{\theta} / R \\
 + [N_x \cdot u_{z,x} + N_{x\theta} \cdot u_{z,\theta} / R]_{,x} \\
 + [N_{x\theta} \cdot u_{z,x} + N_{\theta} \cdot u_{z,\theta} / R]_{,\theta} / R &= -q_z \quad (3) \\
 M_{x,x} + M_{x\theta,\theta} / R - Q_x &= -m_x \\
 M_{x\theta,x} + M_{\theta,\theta} / R - Q_{\theta} &= -m_{\theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccccc}
 L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\
 L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\
 L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\
 L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\
 L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55}
 \end{array} \right) + \\
 \left(\begin{array}{ccccc}
 0 & 0 & N_{13} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & N_{23} & 0 & 0 \\
 N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} & N_{35} \\
 0 & 0 & N_{43} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & N_{53} & 0 & 0
 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_x \\ u_{\theta} \\ u_z \\ \beta_x \\ \beta_{\theta} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} q_x \\ q_{\theta} \\ q_z \\ m_x \\ m_{\theta} \end{pmatrix} \quad (4)
 \end{aligned}$$

본 연구에서 사용한 수치해석 기법인 유한차분법을 적용하기 위해서 합응력으로 표현된 식(3)을 변위의 미분항으로 표현하면 식(4)와 같은 매트릭스 형태의 기본방정식을 구할 수 있다. 여기서, $L_{11}, L_{12}, L_{13}, \dots, L_{55}$ 은 선형항을, $N_{13}, N_{23}, \dots, N_{53}$ 은 비선형항을 의미하며, 부록에 수록하였다.

2.2 비선형 해법

일반적으로 비선형 문제들은 일련의 선형단계로 해석한다. 그 과정은 각 단계에서 선형화하여 비선형 방정식을 풀고 남은 불평형 하중을 다시 가하는 반복법을 사용하여 각각 선형 단계의 조합으로 비선형 문제를 해결하는 것이다.

비선형 해법으로는 하중을 증가시키면서 대응 변위를 구하는 하중증분법과 변위를 증가시켜 대응 하중을 구하는 변위증분법, 그리고 이 두 방법을 결합한 방법 등이 있다. 하중증분법은 각 단계에서 일정한 하중을 가하여 선형화하여 풀고 이 때 잔류하중을 구하여 다시 가하는 방법이다. 변위증분법은

특정한 변위성분의 크기를 독립적으로 증분시켰을 때 이에 대응하는 하중 및 다른 변위 성분을 산정하는 방법이다. 본 연구에서는 불평형 하중을 감소시켜 나아가는 수치해석 방법인 하중증분법을 사용하되 유한차분법에 적용할 수 있는 반복법을 이용하여 비선형 해석을 수행하였다. 반복법을 이용한 본 프로그램은 입력 단계, 처리 단계, 검사 단계로 구분할 수 있다. 입력 단계에서는 선형 및 비선형 해석의 전 단계에서 구한 변위를 기하학적 강도 매트릭스를 포함한 접선 강도 매트릭스에 변위벡터로 곱하여 불평형 하중을 계산하는 단계이며, 처리 단계는 불평형 하중을 구조체에 다시 재하시켜 전체 접선 강도 매트릭스에 의해 비선형 변위를 구하는 단계이다. 마지막으로 검사 단계에서는 최종 변위와 전 단계에서의 변위를 이용하여 수렴도를 검사하고, 허용오차에 따라 반복계산 여부를 전달하는 단계이다.

3. 유한 차분법

제한된 경계조건을 갖거나 특정 적층 형태를 갖는 셸 구조물은 이중삼각함수나 푸리에 급수를 이용하여 해를 구할 수가 있다. 그러나 임의의 경계조건과 다양하고 복잡한 하중을 받는 비등방성 구조물의 경우는 해석해를 구하는 것이 거의 불가능하다. 따라서 정확한 구조물의 거동을 해석하기 위해서는 적용성과 효율성, 정확성을 고려하여 수치해석 기법을 사용해야 한다. 복잡한 셸 구조물의 비선형 거동을 해석하기 위해서 구조물의 기본방정식에 직접 적용할 수 있고, 변위의 미분항을 차분식으로 나타내는데 있어서 항의 전개 수에 따라 오차의 범위를 감소시킬 수 있어 효과적인 유한차분법을 사용하였다.

셸 구조물을 해석하기 위해서는 임의의 한 점에서 구현한 차분식을 셸 구조물 전체에 대해서 시스템 매트릭스로 조합을 해야 한다. 시스템 매트릭스는 중첩의 원리를 이용하여 구할 수 있으며, 임의의 i 선상의 모든 j 점에서의 차분방정식을 매트릭스 형태로 나타내면 식(5)와 같다.

$$[A]\{X\}_{i-1} + [B]\{X\}_i \quad (5a)$$

$$+ [C]\{X\}_{i+1} = \{F\}_{i,j}$$

$$[A, B, C] = [A, B, C]_E + [A, B, C]_G \quad (5b)$$

윗 식에서 $[A], [B], [C]$ 는 각각 $i-1, i, i+1$ 에 대한 계수 매트릭스를 의미하며, $[\cdot]_E$ 는 시스템 매트릭스를, $[\cdot]_G$ 는 기하학적 매트릭스를 의미한다. 또한 각각의 매트릭스는 임의의 i 선상에 있는 모든 절점 $j-1, j, j+1$ 에 대한 정보가 포함되어 있다. $\{X\}_{i-1}, \{X\}_i, \{X\}_{i+1}$

는 변위벡터, $\{F\}_{i,j}$ 는 하중벡터를 의미하고 식(6)와 같다.

$$\{X\}_i = \{u_x \ u_\theta \ u_z \ \beta_x \ \beta_\theta\}_i^T \quad (6a)$$

$$\{F\}_{i,j} = \{q_x \ q_\theta \ q_z \ m_x \ m_\theta\}_i^T \quad (6b)$$

$$[K_E + K_G]\{X\} = \{F\} \quad (7a)$$

$$\{\Psi\} = \{F\} - [K_E + K_G]\{X\} \quad (7b)$$

여기서, $\{u_x\}, \{u_\theta\}, \{u_z\}, \{\beta_x\}, \{\beta_\theta\}$ 는 $j-1, j, j+1$ 의 세 성분을 가지고 있는 벡터이고, 임의 (i, j) 점의 차분방정식인 식(5)를 중첩의 원리를 통해 조합하면 구조물 전체에 대한 차분방정식을 식(7)과 같이 구할 수 있다. $\{F\}$ 는 쉘 구조물 전체에 대한 하중벡터이고, $\{\Psi\}$ 는 쉘 구조물 전체에 대한 불평형 하중이며, $\{X\}$ 는 쉘 구조물 전체에 대한 변위벡터를 나타낸다. $[K_E]$ 는 쉘 구조물 전체에 대한 시스템 매트릭스를 의미하며, $[K_G]$ 는 쉘 구조물 전체에 대한 기하학적 매트릭스를 의미한다.

4. 해석 예 및 결과분석

본 연구에서는 앞서 전개한 비선형 쉘 이론과 Δ^2 의 오차를 갖는 유한 차분식에 의한 수치해석 기법을 바탕으로 작성된 해석 프로그램의 타당성을 유한요소법에 근거한 범용 구조 해석 프로그램인 LUSAS의 해석결과와 비교하여 검증하고, 해석 예의 결과를 통해 원통형 쉘에 대한 비선형 거동 특성을 분석하였다. 원통형 쉘의 반경길이를 R 와 원통길이를 L , 중심각을 θ , 총두께를 h 로 설정하였으며, 재료는 등방성인 경우 물성치는 $E=3.103 \text{ kN/m}^2$, $\nu=0.3$ 이며, 적층셀인 경우 직교이방성으로 $E_1=5600 \text{ kN/m}^2$, $E_2=1200 \text{ kN/m}^2$, $G_{23}=500 \text{ kN/m}^2$, $G_{12}=600 \text{ kN/m}^2$, $G_{13}=600 \text{ kN/m}^2$, $\nu_{12}=0.26$ 을 사용하였다.

4.1 수렴도와 타당성 검증

표 1은 원통형 쉘의 기하학적 비선형을 해석하기 위해 작성한 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 Ref.(3)과 비교하여 나타낸 것이다. 화이버가 보강되지 않은 등방성 재료를 사용하였으며, 반경길이는 100, 원통길이는 20, 총두께는

0.125, 중심각은 0.1 rad인 4변 고정지지된 부분 원통형 쉘을 해석모델로 설정하였다. 그림 3은 요소 분할수 증가에 따른 처짐의 수렴도를 나타낸 것이다. 해석모델은 직교이방성 재료를 [0/90/90/0]으로 적층, 반경길이는 10, 원통길이는 5, 총두께는 1, 중심각은 60°인 4변 고정지지된 부분 원통형 쉘이다. 본 연구에서 작성한 프로그램의 결과와 Ref.(3)의 처짐이 유사하며, 절점수를 증가시킬수록 일정한 값으로서 수렴함을 볼 수가 있다. 이러한 검증을 바탕으로 복합적층 원통형 쉘의 기하학적 비선형 해석을 수행하였다.

표 1. 중앙점에서의 비선형 처짐 비교
($h=3.175, L=254, R=2540, \theta=0.1 \text{ rad}$, 단위: mm)

하중 (kN/m^2)	0.5	1.0	1.5	
처짐 (m)	Ref.(3)	0.390	1.390	3.560
	Present	0.386	1.379	3.528

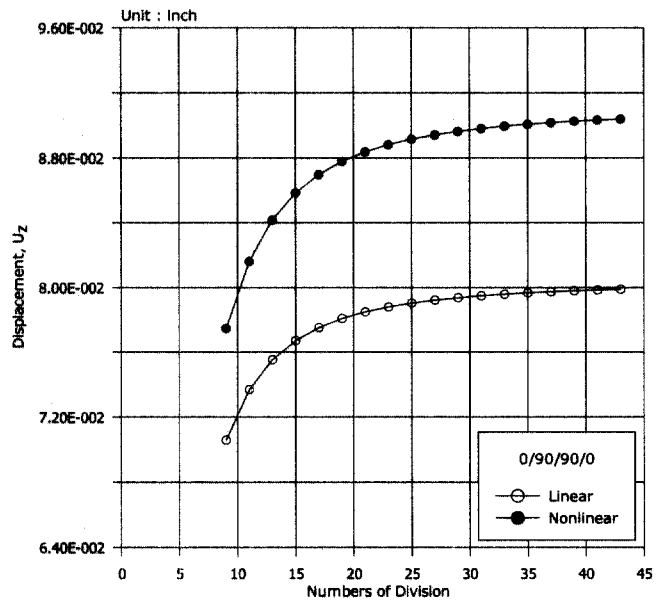


그림 3. 분할수에 따른 수렴도
($\theta=60^\circ, h=1, L=5, R=10$)

4.2 하중 변화

표 2는 4변이 고정경계이고, [0/90/90/0]으로 적층된 원통형 쉘을 해석하여 나타낸 것이다. 중심각은 60°이고 각층의 두께는 일정하며 전체 두께는 1로 고정하였다. 원통형 쉘의 비선형 처짐이 초기하중근처에서는 선형과의 차이가 없지만, 초기하중을 지나 어느 정도 하중이 증가함에 따라 눈에 띄게 처짐 차이를 보이며 비선형적으로 증가하였다. 초기하중에서는 선형과 비선형 반경방향 처짐 차이가 2.21%, 원주방향 처짐 차이가 3.41% 정도였으나, 하중이 20에서는 반경방

표 2. 하중변화에 따른 선형과 비선형 처짐
(0/90/90/0, $\theta = 60^\circ$, $h = 1$, $L = 10$, 단위: mm)

처짐	하중	선형	비선형	비교
반경 방향	1	0.02972	0.03039	2.21%
	4	0.11886	0.13032	8.79%
	12	0.35659	0.49183	27.50%
	16	0.47545	0.77807	38.89%
	20	0.59432	1.27952	53.55%
원주 방향	1	0.00222	0.00230	3.41%
	4	0.00890	0.01019	12.73%
	12	0.02669	0.03985	33.03%
	16	0.03559	0.06117	41.82%
	20	0.04448	0.09156	51.42%

방향 처짐은 53.55%, 원주방향 처짐은 51.42%로 비선형 처짐이 선형 처짐에 비해 2배 이상 크게 발생하였음을 보여 주고 있다. 즉, 쉘과 같이 면내하중에 저항하는 구조물은 비선형 거동시 선형에 비해 강성이 작아지는 경향이 있다.

4.3 형상비 변화

표 3은 원주방향 2변이 자유경계, 원통방향 2변이 고정경계이고, [0/90/90/0]으로 배열된 부분 원통형 쉘에 대하여 원주길이와 원통길이를 일정하게 유지하면서, 반경 R 의 변화에 따른 비선형 처짐값을 나타낸 것이다. 여기서, 형상비 γ 는 반경 R 을 원통길이 L 로 나눈 값으로 정의한다. 형상비가 커질수록 비선형 처짐이 크게 발생하면서, 선형과 비선형 처짐이 최대 29.97%까지 차이를 보였다. 하지만 형상비가 3 이상에서는 선형 처짐은 조금씩 증가하는 반면 비선형 처짐은 그 반대로 감소하여 12.99% 선형과의 거동차이를 보이고 있다. 원통형 쉘의 비선형 거동특성이 변하는 $\gamma = 3$ 을 한계점이라 정의한다면, 그 한계점 이하에서는 면내 거동이 지배적이며, 이상에서는 면외 거동의 효과가 크게 지배적인 것으로 판단된다.

표 3. 형상비 변화에 따른 선형과 비선형 처짐
(0/90/90/0, $\theta = 60^\circ$, $h = 1$, $L = 10$, 단위: mm)

형상비	선형	비선형	비교
1.0	0.08449	0.09408	10.18%
2.0	0.20191	0.27410	26.34%
3.0	0.27171	0.38797	29.97%
4.0	0.30908	0.42178	26.72%
6.0	0.34274	0.42155	18.69%
8.0	0.35632	0.40952	12.99%

표 4. 중심각 변화에 따른 선형과 비선형 처짐
(0/90/90/0, $h = 1$, $L = 10$, 단위: mm)

중심각	선형	비선형	비교
60	0.59432	1.27952	53.55%
120	0.21418	0.26174	18.17%
180	0.09977	0.10836	7.93%
240	0.05555	0.05774	3.79%
300	0.03448	0.03501	1.53%
360	0.01476	0.01477	0.01%

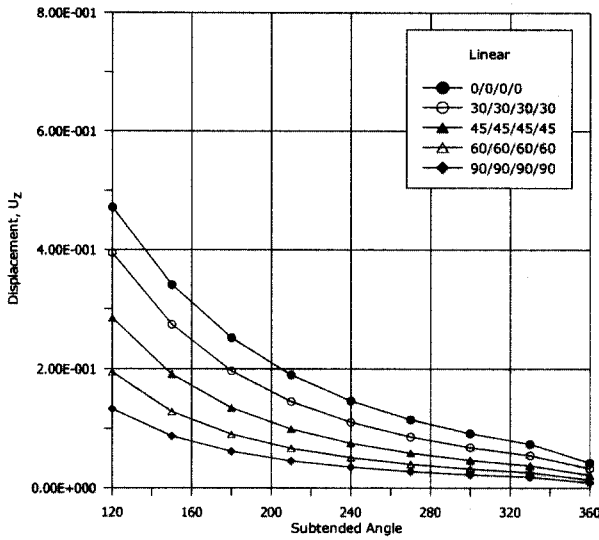
4.4 중심각 변화

고정경계를 갖는 원통형 쉘에 대하여 원주길이와 원통길이를 일정하게 유지, 중심각을 60° 에서 360° 까지 변화시키면서 해석하였다. 그림 4은 비선형 처짐 분포를 나타낸 것으로 동일한 중심각에 대하여 화이버가 원통방향인 [0/0/0/0]으로 적층시 선형과 비선형 처짐이 가장 크게 발생하였으며, 그 거동차이가 다른 보강각도에 비해 현저하게 크게 나타남을 알 수 있다. 동일한 보강각도에 대해서 원통형 쉘의 중심각이 커질수록 선형과 비선형 처짐 및 거동차이가 감소함을 보이고 있다. 중심각이 60° 일 경우 53.33%로 비선형 거동이 선형에 비해 2배이상 크게 발생하였고, 그 거동차이는 중심각이 커질수록 감소하여 360° 일 경우 0.01%의 미소한 차이를 나타내었다. 이를 통해 원주길이와 원통길이가 일정한 경우 원통형 쉘의 중심각이 커질수록 즉, 폐합될수록 비선형 거동이 선형과 비교하여 큰 차이를 보이며 발생하지 않아 구조 공학적으로 훨씬 유리함을 알 수 있다.

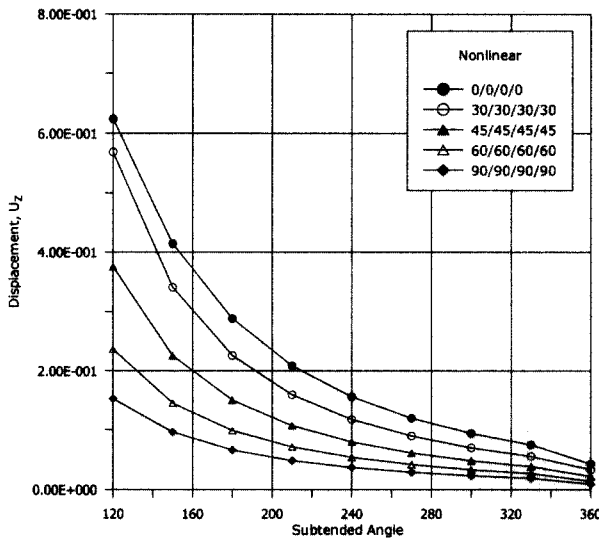
4.5 적층수 변화

해석모델은 원주방향 2변이 자유경계, 원통방향 2변이 고정경계인 부분 원통형 쉘로, 원주길이와 원통길이를 10, 총 두께를 1, 중심각을 60° 로 설정하였다. 적층수에 따라 각 층별 두께를 동일하게 변화시켰으며, 배열조건은 [0/90]을 반복적으로 적층시켜 해석하였다.

표 5는 [0/90]을 동일한 순서로 32번, 총 64개층까지 적층시켜 결과를 나타낸 것으로 적층수가 증가할수록 처짐이 감소하여, 선형은 11.35%, 비선형은 16.11%의 감소율을 보였다. 8개층 이상에서는 그 감소율이 크지 않아 필요 이상의 적층은 비효율적이다. 표 6은 적층수 변화에 따른 해석모델의 강성치를 나타낸 것이다. 적층수에 따른 휨-면내력 연계강도 $[B]$ 를 보면 2개층인 경우 558.1, 64개층인 경우 17.4를 보이고 있어, 휨-면내력 연계강도에 따라 비선형 거동이 영향을



(a) 선형 분포



(b) 비선형 분포

그림 4. 중심각 변화에 따른 처짐

받는 것으로 사료된다.

4.6 배열조건 변화

동일한 두께와 재료를 가진 4개의 층을 그림 5와 같이 배열조건을 달리하였으며, 이외의 조건은 표 5와 동일한 해석모델로 설정하였다. 한방향, 대칭, 역대칭 보강인 경우에 중점을 두어 선형과 비선형 해석을 통해 적절한 배열조건을 제시하고자 한다. 표 7은 배열조건에 따른 선형과 비선형 처짐을 비교하여 나타낸 것이다. 그림 5의 (b)와 같이 중립면에 대하여 두 층이 역대칭 배열인 경우 처짐이 가장 크게 발생하였고, 비선형 처짐이 선형과 비교하여 최대 37.83% 거동차이

표 5. 적층수 변화에 따른 처짐

$([0/90]_k, \theta = 60^\circ, h = 1, L = 10, \text{단위: mm})$

적층수	선형		비선형		비교
$[0/90]_1$	0.19441	↑	0.24843	↑	21.74%
$[0/90]_2$	0.17862		0.21876		18.35%
$[0/90]_4$	0.17449	11.35%	0.21178	16.11%	17.61%
$[0/90]_8$	0.17311		0.20958		17.40%
$[0/90]_{16}$	0.17257	↓	0.20876	↓	17.33%
$[0/90]_{32}$	0.17234		0.20841		17.31%

표 6. 적층수 변화에 따른 강성치

$([0/90]_k, \theta = 60^\circ, h = 1, L = 10, \text{단위: mm})$

적층수	A_{11}	A_{66}	B_{11}	B_{22}	D_{11}
$[0/90]_1$	3450.0	600.0	-558.1	558.1	287.5
$[0/90]_2$			-279.0	279.0	
$[0/90]_4$			-139.5	139.5	
$[0/90]_8$			-69.8	69.8	
$[0/90]_{16}$			-34.9	34.9	
$[0/90]_{32}$			-17.4	17.4	

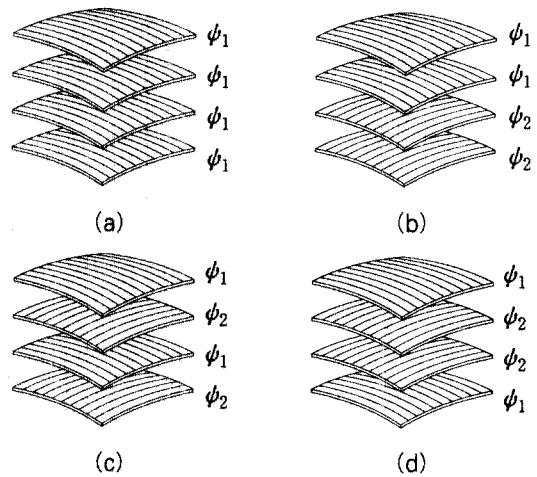


그림 5. 적층셀 각층의 배열조건

를 보였다. 선형 처짐은 보강 각도 45° 인 경우를 제외한 나머지 보강각도에서 그림 5의 (d)와 같이 중립면에 대하여 각 층이 대칭 배열인 경우 가장 작게, 보강 각도 45° 인 경우 배열조건 (c)와 같이 중립면에 대하여 각 층이 역대칭 배열인 경우 가장 작게 발생하였다.

비선형 처짐은 보강각도 75° 인 경우는 그림 5의 (d)에서, 나머지 다른 보강각도에서는 그림 5의 (c)에서 가장 작게 발생하였으며, 그 때 선형과 비교하여 비선형 처짐이 크게 발생하지 않았다.

표 7. 배열조건에 따른 처짐 ($\psi_2 = -\psi_1$, $\theta = 60^\circ$, $h = 1$, $L = 10$, 단위: mm)

보강각도	조건	선형	비선형	비교	보강각도	조건	선형	비선형	비교
$\psi_1 = 30$	(a)	0.43989	0.61594	28.58%	$\psi_1 = 60$	(a)	0.28577	0.38470	25.71%
	(b)	0.47521	0.72032	34.03%		(b)	0.30070	0.43140	30.30%
	(c)	0.43301	0.59729	27.50%		(c)	0.28244	0.38044	25.76%
	(d)	0.43222	0.59777	27.70%		(d)	0.28208	0.38134	26.03%
$\psi_1 = 45$	(a)	0.36959	0.52934	30.18%	$\psi_1 = 75$	(a)	0.23019	0.29443	21.82%
	(b)	0.39780	0.63984	37.83%		(b)	0.23507	0.30623	23.24%
	(c)	0.36295	0.51693	29.79%		(c)	0.22948	0.29373	21.88%
	(d)	0.36318	0.52113	30.31%		(d)	0.22905	0.29327	21.90%

4.7 화이버 각도 변화

화이버 각도 변화에 따른 원통형 셸의 비선형 거동을 분석하고자 한다. 4변이 고정경계이고 원통길이와 원주길이는 1:1, 중심각이 60° 인 경우에 대하여 동일한 두께와 재료를 가진 각 층을 한방향으로 적층하되 보강각도를 변화시켜 비선형 거동을 분석하였다.

표 8은 처짐을, 그림 6은 합응력 분포를 나타낸 것으로, [0/0/0/0]인 경우 선형 처짐이, [30/30/30/30]인 경우 비선형 처짐이 가장 크게 발생하였다. 선형과 비선형 처짐을 비교해보면 [45/45/45/45]인 경우 30.18% 거동차이를 보이고 있으며, 보강각도가 증가할수록 조금씩 그 차이가 감소하였다. 모멘트는 [0/0/0/0]인 경우 비선형 거동이 현저하게 나타났으며, 보강각도가 증가하면서 감소하여 선형과의 거동 차이가 발생하지 않았다. 원통길이의 중앙과 지점부근에서는 보강각도에 따른 선형과 비선형 거동차이가 확실하게 발생하였다. 면내력은 보강각도가 원주방향에 가까워질수록 비선형 효과로 인한 선형과의 거동차이가 가장 크게 발생하였다.

5. 결론

본 연구에서는 자유경계와 고정경계를 갖는 비등방성 원통형 셸의 비선형 거동특성을 파악하고자 1차 전단변형효과 및 기하학적 비선형성을 고려하여 지배방정식을 유도하고, 유한차분법을 사용하여 프로그램을 작성하였다. Iteration 방법을 사용하여 비선형 해석을 수행하였다. 하중증가에 따른 비선형 거동 특성을 우선 파악하고, 형상비, 중심각, 적층수, 배열조건, 화이버 보강각도 등 다양한 조건을 변화시켜 비등방성 원통형 셸의 기하학적 비선형 거동을 분석함으로써 다양한 특성을 파악할 수 있을 것으로 판단된다.

반경과 원통길이 비인 형상비가 커질수록 즉, 원통형 셸이 평판에 가까워질수록 선형 처짐은 증가하는 반면, 비선형 처

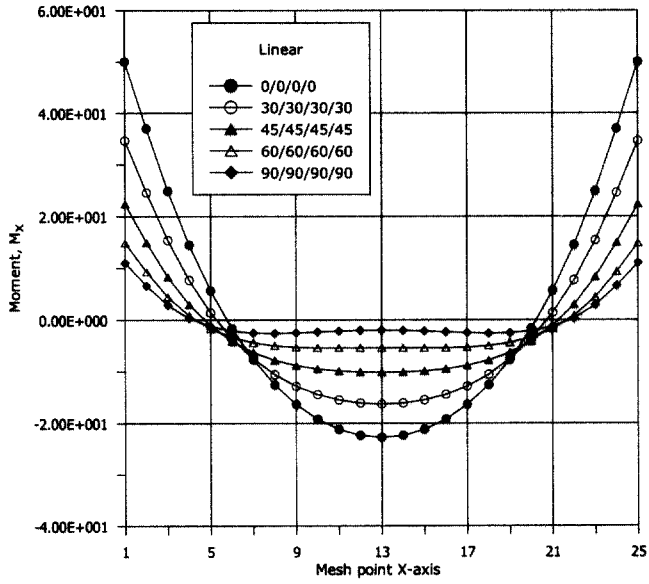
표 8. 화이버 각도에 따른 처짐

($\psi_1/\psi_1/\psi_1/\psi_1$, $\theta = 60^\circ$, $h = 1$, $L = 10$, 단위: mm)

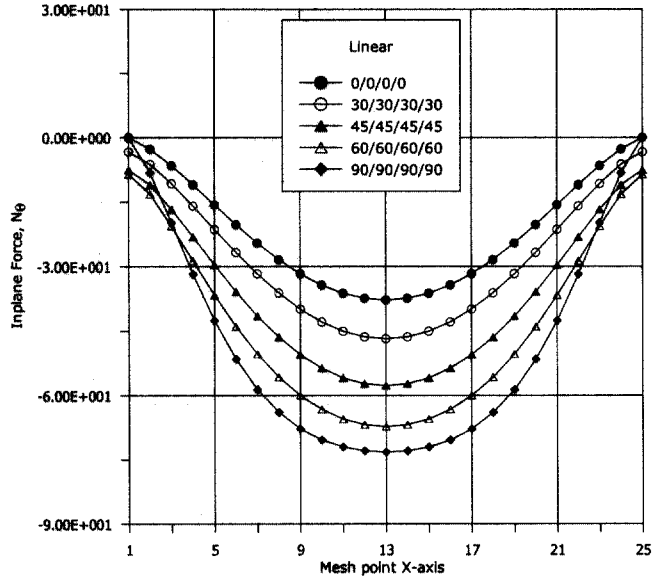
각도 (ψ_1)	선형	비선형	비교
0	0.46209	0.55490	16.73%
30	0.43989	0.61594	28.52%
45	0.36960	0.52934	30.18%
60	0.28577	0.38470	25.71%
90	0.21213	0.26673	20.47%

짐은 증가하다가 감소하는 경향을 보이고 있다. 원통방향 비선형 처짐은 형상비가 5.0 이상에서는 선형 처짐보다 작게 발생하여 평판의 비선형 거동 특성을 나타내었다. 즉, 형상비가 커질수록 셸 구조는 비선형 거동시 변형에 의한 에너지가 구조체에 저장되어 경화 거동을 하는 평판의 비선형 거동 특성을 나타내고 있다. 또한 동일한 변장과 하중에 대하여 원통형 셸의 중심각 변화에 따른 분석에서는 중심각이 커질수록 대변형에 의한 비선형 효과가 크게 감소하였으며, 특히 폐합될 경우 선형과의 거동차이가 0.01% 발생하였다. 즉, 곡률이 커질수록 셸의 거동에 지배적인 면내저항이 강해지고, 더 높은 강성을 가지게 되므로 비선형 거동에 의한 대변형 효과가 감소하여 구조 공학적으로 부분 원통형 셸보다 유리하다는 것을 알 수 있다.

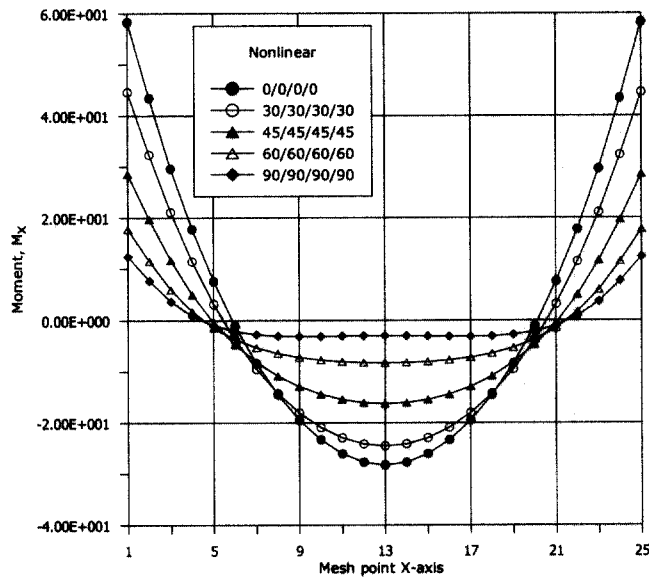
적층수 변화에 따른 분석에서 층수를 늘려갈수록 비선형 효과가 약 20% 정도 감소하였다. 그러나 8개층 이상에서는 비선형 거동의 감소효과가 크게 발생하지 않으므로 필요 이상의 적층을 하는 것은 비경제적이며 효율적이지 못하다. 동일한 보강각도에 대한 다양한 적층 배열조건에 따른 분석에서 한방향이나 중립면에 대하여 두 층을 역대칭으로 배열하는 것 보다는 각 층을 대칭이나 역대칭으로 교차 배열하는 것이 구조체의 강성을 높여 비선형 거동에서 약 43%의 감소 효과를 보였다. 셸에 있어 곡면 방향의 면내 거동이 지배적인 역할을 하며, 기하학적 비선형성을 고려한 비선형 해석에 있어서



(a) 선형 분포

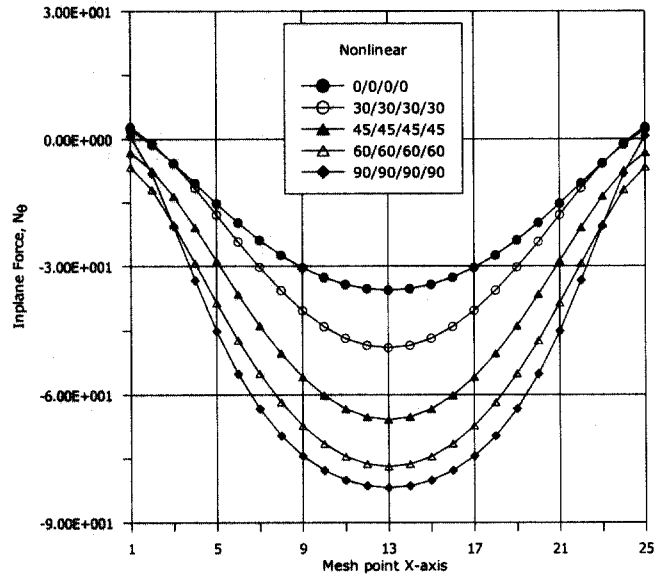


(a) 선형 분포



(b) 비선형 분포

그림 6.1 화이버 보강각도에 따른 모멘트



(b) 비선형 분포

그림 6.2 화이버 보강각도에 따른 면내력

면내력이 추가적으로 작용하게 되어 가장 민감하게 반응하여 불규칙한 양상을 보이고 예상밖의 결과가 나타나게 된다. 면내력과 원주방향의 강성이 쉘의 비선형 거동에 지배적인 영향을 미치므로, 화이버를 원주방향과 평행하게 보강함으로써의 강성이 높은 비등방성 구조체를 설계하고 그에 따른 안정성을 충분히 확보할 수 있을 것으로 판단된다.

위와 같은 결론들을 종합해 보면, 구조물의 설계시 선형과 함께 비선형 해석을 병행하고, 비선형 해석에 의한 처짐 및 합응력 거동특성을 구조물에 적용시 설계요구조건, 작용하중, 제작여건 등을 충분히 고려하여 결정해야 할 것이다.

참고 문헌

1. 윤석호, 장석윤 (1993), 전단변형을 고려한 비등방성 적층판의 기하학적 비선형 처짐 해석, 한국강구조학회논문집, 제5권 1호, pp. 141~161.
2. 장석윤, 윤석호, 한성천 (1994), 고차 전단변형이론에 의한 비등방성 복합적층판의 해석, 한국강구조학회논문집, 제6권 1호, pp. 125~137.
3. Z. Liu, Y. Rong (1988), Large Deflection Analysis of Thin Elastic Shells By A Hybrid Stress Method, Comput. Struct. 30, pp.995-998.

4. Novozhilov, V.V. (1953), Foundations of The Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press, Rochester, N.Y.
5. Sanders (1963), Nonlinear Theories for Thin Shells, Quarterly J. of Applied Math, Vol.21, pp.21-36.
6. Koiter, W.T. (1966), On The Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells, Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series B, Vol.69, pp.1-54.
7. Dennis, S. T., Palazotto, A. N., Large Displacement and Rotation Formulation for Laminated Shells including Parabolic Transverse Shear, Int. J. Non lin. Mech. 25, pp.67-85.
8. Frederick J. Stebbins (1971), Development and Evaluation of Solution Procedures for Geometrically Nonlinear Structural Analysis, AIAA Journal, Vol 10.
9. T. Y. Chang and K (1981) Sawamiphakdi, Large Deformation Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method, Comput. Struct. 13, pp.331-340.
10. Ball, R. E. (1968), A Geometrically Nonlinear Analysis of Arbitrarily Loaded Shells of Revolution, CR-909, Jan, NASA.
11. Reddy, J. N. and Chandrasekhara, K. (1985), Nonlinear analysis of laminated shells including transverse shear strains, AIAA, pp.440-441.

부 록

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix}$$

A_{ij} : 면내력 강도(Extensional Stiffness)

B_{ij} : 휨-면내력 연계강도(Coupling Stiffness)

D_{ij} : 휨강도(Bending Stiffness)

K : 전단보정계수(= 5/6)

$$A_{ij} = \sum_{k=0}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$A_{ij} = K \sum_{k=0}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 4, 5)$$

비등방성 원통형 쉘의 기하학적 비선형 방정식은 최소 포텐셜 에너지 원리에 의해 구할 수 있다.

$$\delta \Pi = \delta(U - \Omega) = 0$$

Π : 총 포텐셜 에너지

U : 내적 변형 에너지

Ω : 외력에 의한 포텐셜 에너지

$$U = \int_V (\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_\theta \cdot \epsilon_\theta + \tau_{x\theta} \cdot \gamma_{x\theta} + \tau_{\theta z} \cdot \gamma_{\theta z} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz}) dV$$

$$\Omega = \int_A (q_x \cdot u_x + q_\theta \cdot u_\theta + q_z \cdot u_z + m_x \cdot \beta_x + m_\theta \cdot \beta_\theta) dA$$

$\delta u_x, \delta u_\theta, \delta u_z, \delta \beta_x, \delta \beta_\theta$ 의 각 종속변수별로 정리하여 부분적분을 이용하고, 경계조건을 적용하면 각 항이 0이 되어야 $\delta \Pi = 0$ 을 만족시키게 된다.

$$\delta u_o : N_x \frac{\partial u_o}{\partial x} + N_{x\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial u_o}{\partial \theta}$$

$$\delta u_\theta : N_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + N_{x\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + Q_\theta \frac{u_\theta}{R} + N_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 - N_\theta \frac{u_z}{R} + N_\theta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2$$

$$\delta u_z : + N_{x\theta} \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + Q_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + Q_x \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\delta \beta_x : M_x \frac{\partial \beta_x}{\partial x} + M_{x\theta} \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_x}{\partial \theta} - Q_x \beta_x$$

$$\delta \beta_\theta : M_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + M_{x\theta} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial x} - Q_\theta \beta_\theta$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_x} = 0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} = -q_x$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_\theta} = 0 : \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} = -q_\theta$$